Penurunan Rumus Deret Fourier

Wikaria Gazali
Universitas Bina Nusantara

Abstrak

Pada makalah ini penulis mengemukakan penurunan rumus Deret Fourier yang berasal dari Aljabar Linear Elementer, yaitu Penghampiran Terbaik ; metode kuadrat terkecil di mana rinciannya akan dijabarkan pada makalah ini hingga diperoleh rumus Deret Fourier :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Pendahuluan

Penurunan rumus Deret Fourier berasal dari Aljabar Linear Elementer, yaitu Penghampiran Terbaik (metode kuadrat terkecil) di mana terlebih dahulu dikenalkan beberapa dalil di bawah ini.

<u>Dalil Proyeksi</u>

Jika W ruang bagian linear berdimensi berhingga dari ruang berperkalian skalar V, maka setiap $\bar{v} \in V$ dapat dinyatakan dalam tepat satu cara dengan
$\bar{v} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$, $\bar{w}_1 \in W$, $\bar{w}_2$ orthogonal pada W.

<u>Dalil Penghampiran Terbaik</u>

Jika :(i) W ruang bagian linear berdimensi berhingga dari ruang berperkalian skalar V, dan

(i i) $\bar{v} \in V$ dan $\bar{v}_w$ proyeksi orthogonal $\bar{v}$ pada W,

maka $\forall \bar{w} \in W$ dengan $\bar{w} \neq \bar{v}_w$ berlaku

$$\left\|\bar{v} - \bar{v}_w\right\| < \left\|\bar{v} - \bar{w}\right\|.$$

<u>Arti Ilmu ukur Penghampiran Terbaik di R^3.</u>

Mencari titik dengan vektor posisi $\bar{v}_w \in W$ (ruang bagian linear dari V) yang jaraknya dengan titik dengan vektor posisi $\bar{v} \in V$ sekecil mungkin jaraknya terdekat itu ialah $\left\|\bar{v} - \bar{v}_w\right\|$.

<u>Arti Penghampiran Terbaik pada Umumnya</u>

Mencari $\bar{v} \subset W$ pada ruang bagian linear berdimensi berhingga W ⊂ V , V ruang berperkalian skalar, yang jaraknya dengan $\bar{v} \subset V$ sekecil mungkin khususnya : Metode kuadrat terkecil

Mencari fungsi dalam bentang linear himpunan fungsi $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n\} \subset C[a,b]$ yang jaraknya dengan $f \in C[a,b]$ sekecil mungkin.

Jarak diturunkan dari perkalian skalar

$$< f, g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \, .$$

Polinom penghampiran terbaik berpangkat ≤ 2 dengan metode kuadrat terkecil untuk suatu fungsi $f \in C[a,b]$ ialah $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dengan $\int_a^b [f(x) - p(x)]^2\, dx$ sekecil mungkin.

Mencari polinom penghampiran terbaik itu lebih efisien dengan mencari proyeksi ortogonal f pada P_2 terhadap perkalian skalar

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Dibentuk dulu basis ortogonal P_2 dengan Proses Gram-Schmidt mulai dengan $\{ 1, x, x^2\}$.

Polinom Fourier orde ≤ n adalah polinom Trigonometri penghampiran terbaik orde ≤ n (PT_n) dengan metode kuadrat terkecil untuk fungsi f pada [-π,π] atau [0,2π].

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots$$

atau

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix) \, .$$

Fungsi f yang didefinisikan pada [-π,π] atau [0,2π] akan dihampiri dengan fungsi $P_n(x)$ pada selang itu. $P_n(x)$ membentuk ruang bagian linear dari $C[0,2\pi]$ atau $C[-\pi,\pi]$, kalau daerah definisi $P_n(x)$ dibatasi pada selang-selang itu saja.

Basis orthogonal ruang bagian linear itu adalah

$\text{B} = \{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots, \sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots\}$

karena B adalah himpunan orthogonal , maka menurut dalil B bebas linear, jadi merupakan basis untuk PT_n, dan adalah basis orthogonal untuk PT_n, terhadap perkalian skalar $< p, q >= \int_0^{2\pi} p(x)\, q(x)\, dx$ atau $< p, q >= \int_{-\pi}^{\pi} p(x)\, q(x)\, dx$.

Untuk mendapatkan basis orthonormal , terlebih dahulu ditentukan panjang masing-masing vektor dalam basis orthogonal itu.

$$\|1\| = \sqrt{\langle p,q\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi}(1)^2\,dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi}dx} = \sqrt{\left[x\Big|_0^{2\pi}\right]} = \sqrt{2\pi - 0} = \sqrt{2\pi}\ ,$$

$$\|\cos ix\| = \sqrt{\int_0^{2\pi}(\cos ix)^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{2i}\left[\cos ix \sin ix + ix\Big|_0^{2\pi}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2i}\left[\{\cos i(2\pi).\sin i(2\pi) + i(2\pi)\} - \{\cos 0.\sin 0 + i(0)\}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2i}.i(2\pi)} = \sqrt{\pi}\ ,$$

$$\|\sin ix\| = \sqrt{\int_0^{2\pi}(\sin ix)^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{2i}\left[-\sin ix \cos ix + ix\Big|_0^{2\pi}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2i}\left[\{-\sin i(2\pi)\cos i(2\pi) + i(2\pi)\} - \{-\sin 0.\cos 0 + i(0)\}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2i}.i(2\pi)} = \sqrt{\pi}\ .$$

Dengan demikian basis orthonormal untuk PT_n adalah

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

$$= \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n, \ldots, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \ldots\}$$

Polinom Fourier untuk f(x) yaitu Polinom Trigonometri Penghampiran Terbaik untuk f(x) dengan perkalian skalar di atas, dengan memproyeksikan f(x) terhadap basis orthonormal untuk PT_n adalah

$$P(x) = \frac{< f, \bar{u}_0 >}{< \bar{u}_0, \bar{u}_0 >}\bar{u}_0 + \frac{< f, \bar{u}_1 >}{< \bar{u}_1, \bar{u}_1 >}\bar{u}_1 + \cdots + \frac{< f, \bar{u}_n >}{< \bar{u}_n, \bar{u}_n >}\bar{u}_n + \cdots + \frac{< f, \bar{v}_1 >}{< \bar{v}_1, \bar{v}_1 >}\bar{v}_1 + \cdots + \frac{< f, \bar{v}_n >}{< \bar{v}_n, \bar{v}_n >}\bar{v}_n + \cdots\ ,$$

di mana :

$$< \bar{u}_0, \bar{u}_0 > = \int_0^{2\pi}\bar{u}_0\ \bar{u}_0\ dx = \int_0^{2\pi}(\ \bar{u}_0)^2\ dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}[x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1\ ,$$

$$< \bar{u}_i , \bar{u}_i > = \int_0^{2\pi} \bar{u}_i \; \bar{u}_i \; dx = \int_0^{2\pi} (\bar{u}_i)^2 \; dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \mathrm{ix}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 ix}{\pi} \, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 ix \, dx = \frac{1}{\pi} (\pi) = 1 \quad ,$$

$$< \bar{v}_i , \bar{v}_i > = \int_0^{2\pi} \bar{v}_i \;\; \bar{v}_i \; dx = \int_0^{2\pi} (\bar{v}_i)^2 \; dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \mathrm{ix}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 ix}{\pi} \, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 ix \, dx = \frac{1}{\pi} (\pi) = 1 \quad ,$$

maka Polinom Fourier tersebut berubah menjadi

$$P(x) = \frac{< f , \bar{u}_0 >}{1} \bar{u}_0 + \frac{< f , \bar{u}_1 >}{1} \bar{u}_1 + \cdots + \frac{< f , \bar{u}_n >}{1} \bar{u}_n + \cdots + \frac{< f , \bar{v}_1 >}{1} \bar{v}_1 + \cdots + \frac{< f , \bar{v}_n >}{1} \bar{v}_n + \cdots \; ,$$

$$P(x) = < f , \bar{u}_0 > \bar{u}_0 + < f , \bar{u}_1 > \bar{u}_1 + \cdots + < f , \bar{u}_n > \bar{u}_n + \cdots + < f , \bar{v}_1 > \bar{v}_1 + \cdots + < f , \bar{v}_n > \bar{v}_n + \cdots \; ,$$

$$P(x) = < f , \bar{u}_0 > \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} < f , \bar{u}_i > \bar{u}_i + \sum_{i=1}^{\infty} < f , \bar{v}_i > \bar{v}_i \; ,$$

di mana :

$$< f , \bar{u}_0 > \; = \int_0^{2\pi} f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx ,$$

$$< f , \bar{u}_0 > \bar{u}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx}{2} = \frac{a_0}{2} \; ,$$

di mana $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$,

$$\bar{u}_i = \frac{\cos \; ix}{\sqrt{\pi}} \; ,$$

$$< f , \bar{u}_i > \; = \int_0^{2\pi} f(x) \left(\frac{\cos ix}{\sqrt{\pi}} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \; ix \, dx \; ,$$

$$< f , \bar{u}_i > \bar{u}_i = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos ix \, dx \right) \left(\frac{\cos ix}{\sqrt{\pi}} \right) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos ix . dx \right) (\cos ix)$$

$$= a_i \cos ix \; ,$$

di mana $a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos ix \, dx$,

$$\bar{v}_i = \frac{\sin ix}{\sqrt{\pi}} \quad ,$$

$$< f, \bar{v}_i > = \int_0^{2\pi} f(x) \left(\frac{\sin ix}{\sqrt{\pi}} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin ix \, dx \ ,$$

$$< f, \bar{v}_i > \bar{v}_i = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin ix \, dx \right) \left(\frac{\sin ix}{\sqrt{\pi}} \right) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin ix \, dx \right) (\sin ix)$$

$$= b_i \sin ix \ ,$$

di mana $b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin ix \, dx$.

Jadi $P(x) = < f, \bar{u}_0 > \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} < f, \bar{u}_i > \bar{u}_i + \sum_{i=1}^{\infty} < f, \bar{v}_i > \bar{v}_i$,

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin ix \ ,$$

$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$ di mana $i = 1,2,3,\ldots,n$.

Polinom Fourier itu adalah

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

di mana :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos ix \, dx$$

$b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin ix \, dx$, pada interval $[0,2\pi]$

atau

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos ix \, dx$$

$b_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin ix \, dx$, pada interval $[-\pi, \pi]$

Ambil $i = n = \dfrac{n\pi}{\pi}$ dan penyebut $\pi = L$, maka

$i = \dfrac{n\pi}{L}$ dan intervalnya $[-L, L]$

sehingga

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \text{, pada interval } [-L, L]$$

Dengan demikian Polinom Fourier berubah menjadi:

Deret Fourier :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ di mana } n = 1,2,3,\ldots,\infty\ .$$

Simpulan

Rumus umum atau model matematika (rumus) dari DERET FOURIER adalah :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ di mana } n = 1,2,3,\ldots,\infty$$

di mana $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$, $a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$, dan

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \text{, pada interval } [-L, L]$$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Rorres.1994, *Elementary Linear Algebra* , seventh edition. John Wiley & Sons, Inc

Anton, Howard. 2000, *Dasar-Dasar Aljabar Linear Jilid 2* , edisi 7. Interaksara