

## EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Calcular las sumas de las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^n} \right) \quad \text{b) } \frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{5}{n(n+1)} + \dots$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{5}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$$

$$\text{Sea } s_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right), n - \text{ésima suma parcial.}$$

$$= 5 - \frac{5}{n+1} \quad (\text{serie telescópica}).$$

$$= \frac{5n}{n+1}. \quad \text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 5, \text{ se tiene que la serie converge y}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = 5.$$

2.- Estudiar la convergencia de las siguientes series, indicando criterio usado.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos^2 n}{n+1} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5}{2} \right)^n \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (2\sqrt[n]{n} + 1)^n \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

**Solución:**

$$a) \quad \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{n!(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}, \text{ y como:}$$

$$\frac{1}{n^2 + 3n + 2} < \frac{1}{n^2 + 3n} < \frac{1}{n^2}, \text{ y como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ c.v. se tiene que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!} \text{ es convergente,}$$

por criterio de comparación.

$$b) \quad \text{Como } 0 < \cos^2 n \leq 1 \Rightarrow 1 < 1 + \cos^2 n \leq 2 \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1 + \cos^2 n}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}, \text{ pero } \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} < \frac{1 + \cos^2 n}{n+1} \text{ y como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{ es divergente,}$$

por el criterio de comparación se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos^2 n}{n+1} \text{ es divergente.}$$

$$c) \quad \text{Sea } a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \cdot \frac{n!}{n^n}; \quad a_{n+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n\right) = \frac{5}{2} \cdot e^{-1} < 1$$

$\therefore$  Por criterio de comparación por límite la serie converge.

d) Usamos criterio de la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2\sqrt[n]{n} + 1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt[n]{n} + 1) = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 > 1.$$

$\therefore$  La serie diverge.

e) Usaremos el criterio de la integral.

Sea  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ , esta función es continua y positiva en  $[1, +\infty[$  y además es decreciente en

$$[1, +\infty[, \text{ pues } f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} < 0; \quad \forall x \geq 1.$$

Luego:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \ln |t^2+1| - \ln 2 \right] = \infty$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \text{ diverge.}$$

3.- Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{e^n}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+2}{n+1}$

**Solución:**

a) Sea  $a_n = \frac{1}{e^n}$ , como  $\frac{1}{e^{n+1}} < \frac{1}{e^n}$ ;  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{e^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona decreciente y además

como:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0$ , se tiene que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{e^n}$  es convergente.

b) Sea  $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ ;  $a_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$ , como  $a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ , la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona decreciente y además como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{La serie es divergente.}$$

4.- Determine el intervalo de convergencia, analizando los puntos terminales de las siguientes series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+1)^n}{2^n}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x-3)^n}{n^2}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

**Solución:**

a) Sea  $a_n = \frac{(-1)^n \cdot (x+1)^n}{2^n}$ ;  $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (x+1)^{n+1}}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot (x+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n \cdot (x+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)(x+1)}{2} \right| = \frac{|x+1|}{2}$$

Luego, la serie converge ssi  $\frac{|x+1|}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$ .

$\therefore$  La serie converge en  $] -3, 1[$ .

**Puntos terminales:**

$$x_0 = -3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-3+1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \Rightarrow \text{Diverge.}$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (1+1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Rightarrow \text{Diverge.}$$

Luego la serie converge en  $] -3, 1[$ .

$$b) \quad a_n = \frac{(2)^n \cdot (x-3)^n}{n^2} ; \quad a_{n+1} = \frac{(2)^{n+1} \cdot (x-3)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2)^{n+1} \cdot (x-3)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(2)^n \cdot (x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(x-3) \cdot n^2}{(n+1)^2} \right| = 2|x-3|$$

Luego, la serie converge ssi  $2|x-3| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$ .

$\therefore$  La serie converge en  $\left] \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right[$ .

**Puntos terminales:**

$$x_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n \cdot (\frac{5}{2}-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n \cdot (-\frac{1}{2})^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \text{Serie alternada y como}$$

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es monótona decreciente y además } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \text{La serie converge.}$$

$$x_0 = \frac{7}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n \cdot (\frac{7}{2}-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n \cdot (\frac{1}{2})^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{La serie converge ( serie } p > 1 \text{ ).}$$

Luego la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x-3)^n}{n^2}$  converge en  $\left[ \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right]$ .

$$c) a_n = \frac{x^n}{(2n)!} ; a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(2(n+1))!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot x^n} \right|$$

$$= |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0, \text{ luego la serie converge } \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.- Obtenga una representación en serie de potencias de la función  $f(x) = \arctan x$ .

**Solución:**

$$f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \cdot x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

$$\therefore \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}.$$

6.- Encuentre la serie de potencias para  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  y utilícela para aproximar  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ , con cuatro decimales.

**Solución:**

Usaremos la serie de Maclaurin de  $\sin x$  para encontrar la aproximación.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}.$$

$$\text{Si } f(x) = \sin x \Rightarrow$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{iv}(x) = \sin x \Rightarrow f^{iv}(0) = 0$$

$$f^v(x) = \cos x \Rightarrow f^v(0) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!} \\ &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot x^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} \Rightarrow \int \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!5} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{7!7} + \dots$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Encontrar los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$  y encontrar una fórmula para  $S_n$  en términos de  $n$ . También determinar si la serie infinita es convergente o divergente.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} n$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$

j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

k)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} \right)$

l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

2.- Determinar si las series dadas son convergentes o divergentes, indicando criterio usado. Si la serie es geométrica convergente, telescópica convergente o una combinación lineal entre ellas, calcular su suma.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2+3}$

j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

k)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

ll)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

m)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

n)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

ñ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos ecn|}{\sqrt{n}}$

o)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+2}$

p)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - \cos n}$

q)  $0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots$

r)  $0.27 + 0.0027 + 0.000027 + \dots$

s)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

t)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$

u)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n}$

3.- Escribir el decimal periódico infinito dado como un número racional.

a) 0.3333

b) 0.272727

c) 2.0454545.

4.- Encuentre el radio y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x+3)^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n+2}$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(5x-3)^n}{n!}$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} (4x-2)^{2n}$

e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(1-2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

f)  $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (x-3)^{2+n}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^4+16}$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(x+1)^n}{3^n}$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n (x-10)^n}{n!}$

k)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{5}\right)^n$

l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n \cdot 10^n}$

ll)  $1 - \frac{(3x-2)}{1!} + \frac{(3x-2)^2}{2!} - \dots$

5.- Utilizando la igualdad  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , donde  $|x| < 1$ , exprese cada una de las siguientes funciones como una serie de potencias centrada en  $x_0 = 0$ , o una combinación lineal entre ellas. Determine el intervalo de convergencia en que es válido este desarrollo.

a)  $f(x) = \frac{5}{4x-2}$

b)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$

c)  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

d)  $f(x) = \frac{1}{2+3x+x^2}$

e)  $f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}$

## SERIE DE TAYLOR.

## 1.- DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EN SERIES DE POTENCIAS.

Si una función  $f(x)$  admite un desarrollo en serie de potencias de  $(x - x_0)$  en un entorno  $|x - x_0| < R$  del punto  $x_0$ , esta serie ( serie de Taylor ) tendrá la forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)(x - x_0)^n}{n!}.$$

Cuando  $x_0 = 0$ , la serie de Taylor recibe el nombre de **Serie de Maclaurin**.

## 2.- PROCEDIMIENTOS QUE SE EMPLEAN AL DESARROLLAR EN SERIES DE POTENCIAS. ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES ( Demostrar las igualdades ).

$$a) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$b) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$c) \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$d) \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e) \quad \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots \quad 0 < x \leq 2$$

$$f) \quad (1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)x^n}{n!} = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \dots \quad -1 < x < 1$$

## 6.- APLICACIONES.

6.1 Desarrollar en series de potencias las siguientes funciones, utilizando los desarrollos anteriores y la progresión geométrica.

a)  $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$

b)  $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$

c)  $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}$

d)  $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

e)  $f(x) = \cos 2x$

f)  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

6.2 Aplicando la derivación, desarrollar en serie de potencias de  $x$  las siguientes funciones.

a)  $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$

b)  $f(x) = \arcsen x$

c)  $f(x) = \arctg x$

d)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

6.3 Supóngase que en un país se gasta aproximadamente el 90% de todos los ingresos y se ahorra el 10%. ¿Qué gasto adicional generará una devolución de impuestos de US\$ 40000 millones si los hábitos de ahorro no cambian?

6.4 A un paciente se le administra una inyección de 10 unidades de cierta medicina cada 24 horas. La medicina se elimina exponencialmente de manera que la fracción que permanece en el cuerpo del paciente después de  $t$  días es  $f(t) = e^{-\frac{t}{5}}$ . Si el tratamiento continúa de manera indefinida. ¿Aproximadamente cuántas unidades de la medicina habrá finalmente en el cuerpo del paciente, justo antes de una inyección?

6.5 Suponga que cuando una persona muere, el dinero del seguro de vida se deposita en una fundación, ganando el 8% de interés compuesto continuamente. Según los términos del testamento, la fundación pagará a sus descendientes y a los de ellos US\$  $a_1$  al final del primer año, US\$  $a_2$  al final del segundo año, US\$  $a_3$  al final del tercer año y así sucesivamente, para siempre. La cantidad que debería haberse depositado inicialmente en la fundación para poder hacer el enésimo pago es  $a_n \cdot e^{-0.08 \cdot n}$  ( esto corresponde al valor presente de la cantidad a su pagada en  $n$  años ). Por lo tanto,

el seguro de vida debe pagar un total de  $\sum a_n \cdot e^{-0.08 \cdot n}$  a la fundación, para poder hacer todos los pagos.

a) Determine el valor del seguro de vida, si  $a_n = 10000, \forall n$ .

b) Determine el valor del seguro de vida, si  $a_n = 10000 \cdot 0.9^n, \forall n$ .

c) Suponga que los pagos an deben se menores o iguales que una cantidad fija  $n \forall n$ . ¿Puede la fundación hacer todos los pagos del proceso para un valor del seguro?

