

1. Preguntas

1.1. Ejercicios propuestos para la práctica.

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos^5\left(\frac{1}{x}\right) \sin^2(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

halle la derivada de f en $x = 0$ (si existe).

2. Usar las reglas de derivación para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 - 1)$

b) $f(x) = \frac{5x - 4}{3x^2 + 1}$

3. Para las siguientes funciones encuentre la derivada

a) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x \sin x}$

4. Encuentre el dominio de $f(x) = \frac{x + 3}{(x - 1)(x + 5)}$ y halle la ecuación de la recta tangente en el punto $x_0 = 1/2$

5. Derive $z = \frac{3}{(a^2 - y^2)^2}$ respecto a y .

6. Calcule la derivada de

$$f(x) = \cos\left(\sqrt[7]{\sin\left((\sqrt{x})^5 + 2\right)}\right)$$

7. Hallar $\frac{dy}{dx}$, en las funciones $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ y $u = \sqrt[3]{x^2 + 2}$.

8. Determine $\frac{dy}{dx}$ mediante la derivación implícita y escriba una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $12(x^2 + y^2) = 25xy$, en el punto $(x_0, y_0) = (3, 4)$

9. Hallar y' , en la ecuación $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$

10. Dos automóviles se dirigen uno hacia el Este a razón de 40 km/h y el otro hacia el Sur a razón de 30 km/h, y están viajando hacia la intersección de dos carreteras. ¿A qué velocidad se aproximan los dos automóviles,

uno con respecto al otro en el instante en que el primer carro está a 400 metros de la intersección y el segundo a 300 metros?

11. Escriba dy en términos de X y dx si $Y = \frac{\sin 2x}{3x}$

12. Hallar $\frac{dy}{dx}$, con las funciones $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ y $u = \sqrt[3]{x^2 + 2}$.

- 13.

$$f(x) = \cos\left(\sqrt[7]{\sin\left((\sqrt{x})^5 + 2\right)}\right)$$

14. Calcule la derivada de

$$f(x) = \sin^5((x^2 + 1)) \cdot \sqrt{x + 1}$$

15. Un punto se mueve sobre la curva $y = x^3 - 3x + 5$ de forma que $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$ siendo t el tiempo. Calcular la variación de y con respecto al tiempo en el instante $t = 4$.

1.2. Ejercicios adicionales recomendados para la casa.

16. Hallar la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en un punto $x_0 > 0$.

17. Usar las reglas de derivación para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

b) $f(x) = \frac{4}{2x^3 - 3x}$

18. Encuentre la derivada de $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

19. Calcule la derivada de

$$f(x) = \sin^5((x^2 + 1)) \cdot \sqrt{x - 1}$$

20. Un punto se mueve sobre la curva $y = x^3 - 3x + 5$ de forma que $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$ siendo t el tiempo. Calcular la variación de y con respecto al tiempo en el instante $t = 4$.

21. Derive $y = \frac{3-2x}{3+2x}$.
22. Derive $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$.
23. Demuestre que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.
24. Mostrar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en el punto $x_0 = 1$
25. Determine $\frac{dy}{dx}$, dado que $xy^3 - x^5y^2 = 4$. Determine después la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto $(1, 2)$.
26. Hallar y' e y'' en la ecuación $x^3y + xy^3 = 2$ para el punto $(x, y) = (1, 1)$.
27. Un hombre de 1.80m de alto corre a una velocidad de 8m/seg alejándose de una luz callejera al tope de un poste de 9m de altura. ¿Con que rapidez se mueve el extremo de su sombra sobre el suelo cuando está a 200 metros del poste de la luz?
28. El diámetro exterior de un delgado casquete esférico es de 12 pies. Si el casquete tiene 0.3 pulgadas de espesor, use diferenciales para calcular el volumen aproximado de la región interior del mismo

2. Respuestas

2.1. Ejercicios propuestos para la práctica.

1. Solución:

Se calcula $f'(0)$ como límite de un cociente incremental (obsérvese que en este problema no se puede calcular la derivada en $x = 0$ con los teoremas operacionales vistos en clase).

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^5\left(\frac{1}{x}\right) \sin^2(x) - 0}{x}$$

Observemos que :

$$\frac{\cos^5\left(\frac{1}{x}\right) \sin^2(x)}{x} = \cos^5\left(\frac{1}{x}\right) \sin(x) \frac{\sin(x)}{x}$$

y también que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^5\left(\frac{1}{x}\right) \sin(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Entonces, $f'(0) \cdot (1) = 0$

2. Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= (x^2 + 2)'(x^3 - 1) + (x^2 + 2)(x^3 - 1)' \\ f'(x) &= 2x^4 - 2x + 3x^4 + 6x^2 = 5x^4 + 6x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{(5x-4)'(3x^2+1) - (5x-4)(3x^2+1)'}{(3x^2+1)^2} &= \\ \frac{15x^2+5-30x^2+24x}{(3x^2+1)^2} &= \frac{-15x^2+24x+5}{(3x^2+1)^2} \end{aligned}$$

3. Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \frac{\sec^2 x (\sin x - \cos x) - \tan x (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{\sec x (\tan x - 2) + \cos x - \sin x}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{2x^2 \sin x - (x^2 + 1)(\sin x + x \cos x)}{x^2 \sin^2 x}$$

4. Solución:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, -5\}$$

Recordemos que conociendo (x_0, y_0) y $m = f'(x_0)$ se obtiene la ecuación de la recta tangente en $x_0 = \frac{1}{2}$, $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ con $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \frac{1}{2}$ entonces $y_0 = -\frac{14}{11}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+3}{(x-1)(x+5)} \right)' &= -\frac{3+x}{(-1+5)(5+x)^2} + \\ &= \frac{1}{(-1+x)(5+x)} - \frac{3+x}{(-1+x)^2(5+x)} \end{aligned}$$

y entonces $m = f'(1/2) = -\frac{18}{11}$.

La recta tangente tiene ecuación:

$$y = -\frac{18}{11} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{14}{11} = -\frac{18}{11}x - \frac{5}{11}$$

5. Solución:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3} \cdot \frac{d}{dy}(a^2 - y^2) \\ &= 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}(-2y) = \frac{12y}{(a^2 - y^2)^3} \end{aligned}$$

6. Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin \left[\left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)^{\frac{1}{7}} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{7} \left[\left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)^{-\frac{6}{7}} \right] \cdot \left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)' \\ &= -\sin \left[\left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)^{\frac{1}{7}} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{7} \left[\left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)^{-\frac{6}{7}} \right] \cos \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

7. **Solución:**

$$\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2 + 1)^2} \text{ y}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2 + 2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2 + 1)^2} \cdot \frac{2x}{3u^2} = \frac{8x}{3u(u^2 + 1)^2}$$

8. **Solución:**

$$12 \left(2x + 2y \frac{dy}{dx} \right) = 25 \left(y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$24x - 25y = 25x \frac{dy}{dx} - 24y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} (25x - 24y) = 24x - 25y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24x - 25y}{25x - 24y}$$

Evaluando en el punto $(x_0, y_0) = (3, 4)$ tenemos que la pendiente es $4/3$ y la recta tangente tiene ecuación $y = \frac{4}{3}x$.

9. **Solución:** Calculamos derivadas implícitas,

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + y \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2y' + 2xy + 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0$$

Así obtenemos, $y' = \frac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$

10. **Solución:**

$$S^2 = X^2 + Y^2 \text{ (hacer un dibujo)}$$

$$2S \frac{ds}{dt} = 2X \frac{dx}{dt} + 2Y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{S} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 40 \text{ km/h, } \frac{dy}{dt} = -30 \text{ km/h}$$

$$X = -0,3 \text{ km, } Y = 0,4 \text{ km}$$

$$\text{Resp: } \frac{ds}{dt} = -48 \text{ km/h} = -13,3 \text{ m/s.}$$

Entonces podemos decir que la velocidad a la que se aproximan los dos automóviles es 48 km/h.

11. **Solución:**

$$dy = \frac{3x \cos(2x) 2dx - 3 \sin(2x) dx}{9x^2}$$

Es decir, $dy = \frac{6x \cos(2x) - 3 \sin(2x)}{9x^2} dx$

12. **Solución:**

$$\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2 + 1)^2} \text{ y}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2 + 2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2 + 1)^2} \cdot \frac{2x}{3u^2} = \frac{8x}{3u(u^2 + 1)^2}$$

13. **Solución:**

$$f'(x) = -\sin \left[\left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)^{\frac{1}{7}} \right] \cdot \frac{1}{7} \left[\left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)^{-\frac{6}{7}} \right] \cdot \left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)'$$

$$= -\sin \left[\left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)^{\frac{1}{7}} \right] \cdot \frac{1}{7} \left[\left(\sin \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \right)^{-\frac{6}{7}} \right] \cos \left(x^{\frac{5}{2}} + 2 \right) \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$$

14. **Solución:**

$$f'(x) = 5 \sin^4(\cos(x^2 + 1)) \cdot (\sin(\cos(x^2 + 1)))'$$

$$\sqrt{x-1} + \sin^5(\cos(x^2 + 1)) \frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x-1)$$

$$= 5 \sin^4(\cos(x^2 + 1)) \cdot \cos(\cos(x^2 + 1)) \cdot (-\sin(x^2 + 1)) \cdot (2x) \cdot \sqrt{x-1}$$

$$+ \sin^5(\cos(x^2 + 1)) \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

15. **Solución:**

Se trata de calcular el valor de $\frac{dy}{dt}$ para $r = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 1), \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3(x^2 - 1)}{4\sqrt{t}}$$

Cuando $t = 4$ $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 4$, y $\frac{dy}{dt} = \frac{3(16-1)}{4 \cdot 2} = \frac{45}{8}$ unidades por unidad de tiempo.

2.2. Ejercicios adicionales recomendados para la casa.

16. **Solución:**

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2} \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (2)$$

17. **Solución:**

a) $f'(x) = 3 \left(-\frac{3x^2}{x^6} \right) - \left(-\frac{4x^3}{x^8} \right) = -\frac{9}{x^4} + \frac{4}{x^5}$

b) $f'(x) = 4 \left(-\frac{6x^2 - 3}{(2x^3 - 3x)^2} \right) = -12 \frac{2x^2 - 1}{(2x^3 - 3x)^2}$

18. **Solución:**

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 \sin x \cos x} = \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

19. **Solución:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5 \sin^4(\cos(x^2 + 1)) \cdot (\sin(\cos(x^2 + 1)))' \\
&\sqrt{x-1} + \sin^5(\cos(x^2 + 1)) \frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x-1) \\
&= 5 \sin^4(\cos(x^2 + 1)) \cdot \cos(\cos(x^2 + 1)) \cdot \\
&\cdot (-\sin(x^2 + 1)) \cdot (2x) \cdot \sqrt{x-1} \\
&+ \sin^5(\cos(x^2 + 1)) \frac{1}{2\sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

20. **Solución:**

Se trata de calcular el valor de $\frac{dy}{dt}$ para $t = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 1), \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3(x^2 - 1)}{4\sqrt{t}}$$

Cuando $t = 4$ $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 4$, y $\frac{dy}{dt} = \frac{3(16-1)}{4 \cdot 2} = \frac{45}{8}$ unidades por unidad de tiempo.

21. **Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3+2x)(-2) - (3-2x)(2)}{(3+2x)^2} = \frac{-12}{(3+2x)^2}$$

22. **Solución:**

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}(2x) - x^2 \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{4-x^2} \\
&= \frac{2x(4-x^2) + x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

23. **Solución:**

Sea $p(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1$. Sabemos que $p(x)$ es continua para $x \in [0, 1]$. Por otro lado $p(0) = 1$ y $p(1) = -4$. Tenemos que $p(0) = 1 > 0 > p(1) = -4$ y concluimos (por T. Valor Intermedio) que existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $p(x_0) = 0$.

24. **Solución:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \\
f'(1) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

25. **Solución:**

$$y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} - 5x^4y^2 - 2x^5y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (3xy^2 - 2x^5y) = 5x^4y^2 - y^3 (y \neq 0).$$

Entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{5x + y - y^2}{3xy - 2x^5}$, y la pendiente en $(1, 2)$ será (evaluando) $m = \frac{3}{2}$.

26. **Solución:** Calculamos la primera derivada implícita,

$$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

Sustituyendo en $(x, y) = (1, 1)$ obtenemos $y' = -1$. Calculamos más derivadas implícitas,

$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3y^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0$. Sustituyendo en $(x, y) = (1, 1)$ y $y' = -1$ obtenemos $y'' = 0$

27. **Solución:** Consideramos x = distancia del hombre al poste y s la longitud de la sombra. $\frac{dx}{dt} = 8$ m/seg: velocidad del hombre $\frac{ds}{dt}$ = tasa de variación de la longitud de la sombra $\frac{x+s}{9} = \frac{s}{1,80}$ (Esta relación se obtiene de un dibujo usando el Teorema de Tales), o también $2(x+s) = 10s$, es decir $x = 4s$. Derivando se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = 4 \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{4} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} 8 = 2 \text{ (m/seg)}.$$

Entonces, la rapidez del extremo de la sombra = $\frac{dx}{dt} = 8 + 2 = 10$ (m/seg).

28. **Solución:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\Delta r = 0,3$ pulgadas = $\frac{0,3}{12}$ pies

$$dv = \frac{4}{3}\pi 3r^2 dr, dv = 4\pi r^2 \Delta r, dv = 4\pi (6)^2 \frac{0,3}{12} = 3,6\pi$$

$$V = (r - \Delta r) \approx V(r) - dv (= V(r) - V' \Delta r =$$

$$V(r) - V' \Delta r)$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi$$

$$V(r - \Delta r) \approx 288\pi - 3,6\pi = 284,4\pi$$

Entonces, $V(r - \Delta r) \approx 893,47$ pie³