

Ejercicios 3
Ecuaciones Diferenciales 9009
Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden.

En cada uno de los problemas del 1 al 7, a) verifique que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial; b) utilice el wronskiano para demostrar que y_1 y y_2 son linealmente independientes; c) escriba la solución general de la ecuación diferencial; y d) obtenga la solución única del problema de valor inicial.

- (1) $y'' - k^2 y = 0$; $y_1(x) = \cosh(kx)$, $y_2(x) = \sinh(kx)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- (2) $y'' + k^2 y = 0$; $y_1(x) = \sin(kx)$, $y_2(x) = \cos(kx)$; $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$
- (3) $y'' + 4y' - 12y = 0$; $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-6x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
- (4) $y'' + 11y' + 24y = 0$; $y_1(x) = e^{-8x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$
- (5) $y'' - y' - 6y = 0$; $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = e^{3x}$; $y(-1) = 3$, $y'(-1) = 6$
- (6) $y'' + 11y' - 42y = 0$; $y_1(x) = e^{3x}$, $y_2(x) = e^{-14x}$; $y(0) = -5$, $y'(0) = 0$
- (7) $y'' - \frac{7}{x}y' + \frac{16}{x^2}y = 0$; $y_1(x) = x^4$, $y_2(x) = x^4 \ln(x)$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 4$

En cada uno de los problemas del 8 al 17, obtenga una segunda solución de la ecuación diferencial que sea linealmente independiente con la solución dada en el intervalo. Luego escriba la solución general.

- (8) $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$; $y_1(x) = x^2$; para $x > 0$
- (9) $y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{8}{x^2}y = 0$; $y_1(x) = x^4$; para $x > 0$
- (10) $y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$; $y_1(x) = x$; para todo x
- (11) $y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0$; $y_1(x) = x$; para $-1 < x < 1$
- (12) $y'' - \frac{4x}{1+2x^2}y' + \frac{4}{1+2x^2}y = 0$; $y_1(x) = x$; para todo x
- (13) $y'' + \left(1 - \frac{2}{x}\right)y' - \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)y = 0$; $y_1(x) = x$; para $x > 0$
- (14) $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$; $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(x)$; para $x > 0$

$$(15) \quad y'' - \left(2 \tan(x) + \frac{2}{x}\right) y' + \left(\frac{2 \tan(x)}{x} + \frac{2}{x^2}\right) y = 0; y_1(x) = x; \text{ para } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(16) \quad y'' - \frac{1}{x}(x+2)y' - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)y = 0; y_1(x) = x; \text{ para } x > 0$$

$$(17) \quad y'' + \frac{2x}{2x^2 + 3x + 1}y' - \frac{2}{2x^2 + 3x + 1}y = 0; y_1(x) = x; \text{ para } x < -1$$

En cada uno de los problemas del 18 al 25, obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$(18) \quad y'' - y' - 6y = 0$$

$$(19) \quad y'' - 16y' + 64y = 0$$

$$(20) \quad y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$(21) \quad y'' + 10y' + 26y = 0$$

$$(22) \quad y'' + 6y' - 40y = 0$$

$$(23) \quad y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$(24) \quad y'' + 22y' + 121y = 0$$

$$(25) \quad y'' + 3y' + 9y = 0$$

En cada uno de los problemas del 26 al 33, resuelva el problema de valor inicial.

$$(26) \quad y'' + 3y' = 0; y(0) = 3, y'(0) = 6$$

$$(27) \quad y'' + 2y' - 3y = 0; y(0) = 0, y'(0) = -2$$

$$(28) \quad y'' + 2y' - 3y = 0; y(0) = y'(0) = 1$$

$$(29) \quad y'' - 2y' - 3y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 3$$

$$(30) \quad y'' - 4y' + 4y = 0; y(0) = 3, y'(0) = 5$$

$$(31) \quad y'' + y' + y = 0; y(0) = 2, y'(0) = 0$$

$$(32) \quad y'' - 2y' + y = 0; y(1) = 1, y'(1) = -3$$

$$(33) \quad y'' - 4y' + 5y = 0; y(0) = 2, y'(0) = 1$$

En cada uno de los problemas del 34 al 39, obtenga la solución general de la ecuación de Euler, suponiendo que $x > 0$.

$$(34) \quad x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0$$

$$(35) \quad x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0$$

$$(36) \quad x^2 y'' - 6x y' + 12y = 0$$

$$(37) \quad x^2 y'' + x y' + 4y = 0$$

$$(38) \quad x^2 y'' + 3x y' + y = 0$$

$$(39) \quad x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0$$

En cada uno de los problemas del 40 al 45, resuelva el problema de valor inicial.

$$(40) \quad x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0; y(1) = 3, y'(1) = 3$$

$$(41) \quad x^2 y'' + 5xy' + 20y = 0; y(1) = 0, y'(1) = 2$$

$$(42) \quad x^2 y'' + 5xy' - 21y = 0; y(2) = 1, y'(2) = 0$$

$$(43) \quad x^2 y'' + 25xy' + 144y = 0; y(1) = -3, y'(1) = 0$$

$$(44) \quad x^2 y'' + xy' - y = 0; y(2) = 1, y'(2) = -3$$

$$(45) \quad x^2 y'' - 9xy' + 24y = 0; y(1) = 1, y'(1) = 2$$

En los problemas 46 y 47, encontrar una transformación que convierta la ecuación diferencial en una ecuación diferencial con coeficientes constantes y luego resolver el problema de valor inicial.

$$(46) \quad (x+2)^2 y'' - 4(x+2)y' + 6y = 0; y(0) = -4, y'(0) = 8$$

$$(47) \quad (3x-4)^2 y'' + 3(3x-4)y' + 36y = 0; y\left(\frac{5}{3}\right) = 3, y'\left(\frac{5}{3}\right) = 12$$

(48) Considere la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, y una función derivable $f(x)$ tal que $q(x) = (f'(x))^2$. Pruebe que si la función $\frac{f''(x) + p(x)f'(x)}{q(x)}$ es constante, entonces el cambio de coordenadas $t = f(x)$, transforma la ecuación en una ecuación con coeficientes constantes.

En cada uno de los problemas del 49 al 54, utilice el resultado del problema 48 para encontrar una transformación que convierta la ecuación diferencial en una ecuación con coeficientes constantes. Utilice esta transformación para resolver la ecuación diferencial.

$$(49) \quad x(1-x^2)^2 y'' - (1-x^2)^2 y' + x^3 y = 0$$

$$(50) \quad xy'' + (x^2 - 1)y' + x^3 y = 0$$

$$(51) \quad y'' + (e^x - 1)y' + e^{2x} y = 0$$

$$(52) \quad y'' + \tan(x)y' + \cos^2(x)y = 0$$

$$(53) \quad 4y'' + 4(e^x - 1)y' + e^{2x} y = 0$$

$$(54) \quad xy'' - y' + 4x^3 y = 0$$