

Comment

Universidad de las Americas
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA

MAT 225

Segundo Semestre 20034

Comment Viviana Barile

PARTE I

1. Probar que $e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ es solución de $y' = 2xy + 1$.
2. Resuelva la ecuación diferencial o el problema de valor inicial indicado.
 - a. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$
 - b. $\frac{dP}{dt} = P - P^2$
 - c. $\frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = (1+x^2)^{-1/2} (1+y^2)^{1/2}$
 - d. $(x+y) \frac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$
 - e. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+xy}{x^2}$
 - f. $xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \quad y(1) = 2$
 - g. $x \frac{dy}{dx} - 3y = x^4$
 - h. $xy' + y = x^4 y^3$
3. Probar que la ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y \ln y$ puede resolverse mediante el cambio de variable $z = \ln y$. Aplicar este método para resolver

$$xy' = 2x^2y + y \ln y$$

4. Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = x + ce^{-x}$.
5. Resolver

$$\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3} dx + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y} dy = 0$$

(a) Como ecuación exacta, (b) como ecuación homogénea.

6. Probar que si

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx}$$

es una función $g(z)$ del producto $z = xy$, entonces

$$\mu = e^{\int g(z) dz}$$

es un factor integrante para la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

7. Resuelva utilizando factores integrantes

- a. $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$
- b. $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$

c. $ydx + (x - 2x^2y^3)dy = 0$

8. Probar que la ecuación

$$x^2y' = 3(x^2 + y^2) \tan^{-1} \frac{y}{x} + xy$$

es homogénea y resolverla.

9. Probar que el cambio de variable $z = ax + by + c$ transforma la ecuación diferencial $y' = f(ax + by + c)$ en una ecuación de variables separadas. Aplicar el método para resolver $y' = \sin^2(x - y + 1)$.

10. Resolver las siguientes ecuaciones reduciendo el orden, esto es haciendo el cambio $y' = u$ para llevar las ecuaciones de segundo orden a primer orden y luego calcular y por integración.

a. $y'' = 1 + (y')^2$

b. $(x + 2y')y'' + 2xy' = 0$ condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

11. Una extensión natural de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' = p(x) + q(x)y$ es la ecuación de Riccati

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

En general esta ecuación no se puede resolver por métodos elementales. No obstante, si se conoce una solución particular $y_1(x)$, la solución general tiene la forma

$$y(x) = y_1(x) + z(x)$$

donde $z(x)$ es la solución general de la ecuación de Bernoulli

$$z' - (q + 2ry_1)z = rz^2.$$

Demostrar esto y calcular la solución general de la ecuación

$$y' = \frac{1}{x}y + x^3y^2 - x^5,$$

que tiene a $y_1(x) = x$ como solución particular evidente.

12. Determinar la solución general de la ecuación de Riccati $y' = 6 + 5y + y^2$, buscando soluciones constantes.

PARTE II

- Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento, si la población se duplicó en cinco años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?
- En un trozo de madera quemada o carbón vegetal se determinó que el 85% de su C-14 se había desintegrado. Sabiendo que el período medio del C-14 es aproximadamente 5600 años. Determine la edad aproximada de la madera. Estos son precisamente los datos que usaron los arqueólogos para fechar los murales prehistóricos de una caverna en Lascaux, Francia.
- El Uranio 238 se desintegra a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Si hay x_1 y x_2 gramos en los instantes t_1 y t_2 . Probar que la semivida es

$$\frac{(t_2 - t_1) \ln(2)}{\ln(x_1/x_2)}$$

4. Se está celebrando una fiesta en una habitación que contiene 1800 metros cúbicos de aire, libre de monóxido de carbono. En el instante $t = 0$ varias personas comienzan a fumar. El humo que contiene 6 por 100 de monóxido de carbono se introduce en la habitación a razón de 0.15 metros cúbicos por minuto, y la mezcla removida por ventilación, sale a ese mismo ritmo por una ventana entreabierta. > Cuándo deberá abandonar una persona prudente esa fiesta si el nivel de monóxido de carbono comienza a ser peligroso a partir de una concentración de 0.00018 ?

5. Si la resistencia del aire sobre un cuerpo de masa m ejerce en su caída una fuerza retardadora proporcional a la velocidad la ecuación diferencial que modela la caída es

$$\frac{dv}{dt} = g - cv,$$

donde $c = k/m$. Si la velocidad $v = 0$ para $t = 0$, hallar v como función de t . > Cuál es en este caso la velocidad terminal del objeto ? Responder el problema anterior si ahora se supone una fuerza retardadora proporcional al cuadrado de la velocidad.

6. Se lanza hacia arriba, desde la superficie terrestre una masa m con velocidad inicial v_0 . Si la resistencia del aire se supone proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad k , y es la única fuerza que actúa además de la fuerza gravitacional constante, probar que la máxima altura alcanzada es

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$$

7. La ley de Newton también es válida cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea. Si una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es de 20°C se deja caer en un recipiente con agua hirviendo.
> Cuánto tiempo tardará en alcanzar 90°C , si se sabe que su temperatura aumentó 2°C en un segundo ? > Cuánto tiempo tardará en llegar a los 98°C ?

8. Un punto P es arrastrado por el plano xy mediante una cuerda PT de longitud a . Si T arranca del origen y se mueve a lo largo del eje y positivo, y si P arranca del punto $(a, 0)$.

a. Probar que la ecuación diferencial de la trayectoria es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

b. Separando variables e integrando (Recordando que $y = 0$ cuando $x = a$) Determinar la ecuación de la tractriz)

$$y = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

9. Un conejo parte del origen y corre por el eje y positivo con una velocidad a . Al mismo tiempo un perro que corre con velocidad b sale del punto $(c, 0)$ y persigue al conejo. > Qué trayectoria sigue el perro ?

Indicación: Si se complica en la solución vea Simmons de Ecuaciones Diferenciales, pag 72.

10. Un estanque tiene 500 litros de agua pura y le entra salmuera a razón de 2 gramos de sal por litro a un flujo de 5 litros por minuto. El estanque está bien mezclado y sale de él el mismo flujo de solución. Calcule la cantidad $A(t)$ de gramos de sal que hay en el estanque

en cualquier momento t .

- 11.** De acuerdo a la *ley de Torricelli*, el agua escapará de un depósito abierto por un pequeño orificio a una velocidad igual a la que adquiriría al caer libremente desde el nivel del agua hasta el orificio. Un cuenco hemisférico de radio R está inicialmente lleno de agua, y en el instante $t = 0$ se perfora un orificio circular de radio r en el fondo. Pruebe que el tiempo que tarda en vaciarse en segundos es

$$\frac{14R^{5/2}}{15r^2\sqrt{2g}}$$

Indicación: Si se complica en la solución vea Edwards-Penney Ecuaciones Diferenciales, pag 38.

- 12.** Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo nieve en forma constante durante todo el día. Al mediodía un quitanieves comenzó a limpiar la carretera a un ritmo constante, en términos de la cantidad de nieve retirada en cada hora. El quitanieves limpió dos kilómetros hasta las 2 PM y un kilómetro más hasta las 4 PM.

- a.** Sea $t = 0$ cuando comenzó a nevar y $x(t)$ la distancia recorrida por el quitanieves hasta el instante t . Demuestre que

$$k \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t},$$

donde k es una constante.

- b.** > A qué hora comenzó a nevar ?