

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Ejercicios N° 3 de Mat 1502. Cálculo Uno
Segundo semestre 2000
Contenido:

Sucesiones. Límites y continuidad

Nombre:

Sección N° :

(I) Sucesiones

1. Demostrar, por definición, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{2n+1} = 2 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 5n + 6}{3n^3 - 3n + 7} = \frac{1}{3} .$$

2. Calcular los límites de las sucesiones cuyos términos generales son:

(i) $a_n = \frac{2n^4 + n^3 + 1}{4n^4 + n^2 + 4}$

(v) $a_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$

(ii) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$

(vi) $a_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{9}{10}\right)^n}$

(iii) $a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$

(iv) $a_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \sqrt[n]{n}}$

(vii) $a_n = \sum_{k=3}^n \frac{2k^2 - 13k + 26}{(k-1)!}$

3. Si $0 < b \leq a$ demostrar que la sucesión de término general:

$$a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

converge a a .

4. En los siguientes ejercicios se entrega el término general de la sucesión $\{a_n\}$. En cada caso se pide:

(I) determinar si la sucesión converge o diverge,

(II) hallar el límite de cada sucesión convergente.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad a_n &= \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \\
\text{(ii)} \quad a_n &= \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \\
\text{(iii)} \quad a_n &= \cos \frac{n\pi}{2} \\
\text{(iv)} \quad a_n &= \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \\
\text{(v)} \quad a_n &= \frac{n}{2^n} \\
\text{(vi)} \quad a_n &= 1 + (-1)^n \\
\text{(vii)} \quad a_n &= \frac{1 + (-1)^n}{n} \\
\text{(viii)} \quad a_n &= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2} \\
\text{(ix)} \quad a_n &= 2^{\frac{1}{n}} \\
\text{(x)} \quad a_n &= 3^{\frac{1}{n}} \\
\text{(xi)} \quad a > 0, \quad a_n &= a^{\frac{1}{n}} \\
\text{(xii)} \quad a_n &= n^{\frac{1}{n}} \\
\text{(xiii)} \quad a_n &= n^{(-1)^n} \\
\text{(xiv)} \quad a_n &= \frac{n^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen} n!}{n+1} \\
\text{(xv)} \quad a_n &= \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \\
\text{(xvi)} \quad a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
\text{(xvii)} \quad |a| < 1, \quad a_n &= na^n \\
\text{(xviii)} \quad a > 1, \quad a_n &= \frac{\log_a n}{n} \\
\text{(xix)} \quad a_n &= \frac{100000n}{1+n^2} \\
\text{(xx)} \quad a_n &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 n \\
\text{(xxi)} \quad a_n &= \left(1 - \frac{2}{n}\right)^3 n \\
\text{(xxii)} \quad a_n &= 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} \\
\text{(xxiii)} \quad a_n &= (-1)^n \left(\frac{9}{10}\right)^n \\
\text{(xxiv)} \quad a_n &= \frac{2n^3}{n^2+1} \\
\text{(xxv)} \quad a_n &= \frac{3n^2 - 2n + 1}{4n^2 + 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(xxvi)} \quad a_n &= \frac{3}{\sqrt{n}} \\
\text{(xxvii)} \quad a_n &= \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n} \\
\text{(xxviii)} \quad a_n &= \sqrt{n^2+1} - n \\
\text{(xxix)} \quad a_n &= \sqrt{n^2+n+1} - n \\
\text{(xxx)} \quad a_n &= \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \\
\text{(xxxix)} \quad a_n &= \frac{2n^2+3n+4}{3n^3} \\
\text{(xxxii)} \quad a_n &= \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \\
\text{(xxxiii)} \quad a_n &= \frac{\sqrt{n^3+2n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n^2+1} + \sqrt[3]{n}} \\
\text{(xxxiv)} \quad a_n &= \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + 1}{3\sqrt{2n} - \sqrt[4]{n} + 5} \\
\text{(xxxv)} \quad a_n &= \frac{(-1)^n \cos n}{n^2} \\
\text{(xxxvi)} \quad a_n &= \sqrt{\frac{4n-1}{n+1}} \\
\text{(xxxvii)} \quad a_n &= 1 + \left(\frac{9}{10}\right)^n \\
\text{(xxxviii)} \quad a_n &= \sqrt{\frac{2 + \cos n}{n}} \\
\text{(xxxix)} \quad a_n &= n \cos \pi n \\
\text{(xl)} \quad a_n &= n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \\
\text{(xli)} \quad a_n &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \\
\text{(xlii)} \quad a_n &= (2n+5)^{\frac{1}{n}} \\
\text{(xliii)} \quad a_n &= \frac{\operatorname{sen} n}{3^n} \\
\text{(xliv)} \quad a_n &= \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n \\
\text{(xlv)} \quad a_n &= \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \\
\text{(xlvi)} \quad a_n &= \sqrt[n]{2^{n+1}} \\
\text{(xlvii)} \quad a_n &= \left(\frac{2-n^2}{3+n^2}\right)^n \\
\text{(xlviii)} \quad a_n &= \pi^{\frac{\operatorname{sen} n}{n}}
\end{aligned}$$

5. Utilizando fracciones parciales, calcular el límite de la sucesión cuyo término general está dado por:

(i)

$$a_n = \sum_{k=2}^n \frac{7}{k^2 - 1} \quad (\text{vii})$$

(ii)

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)} \quad (\text{viii})$$

(iii)

$$c_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{k(k+1)} \quad (\text{ix})$$

(iv)

$$d_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)(k+1)(k+3)(k+5)} \quad (\text{x})$$

(v)

$$e_n = \sum_{k=1}^n \frac{3k-1}{(4k-1)(4k+3)(4k+7)} \quad (\text{xi})$$

(vi)

$$f_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$g_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

$$i_n = \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right)$$

$$j_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctg} \frac{2}{k^2}$$

$$k_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

$$l_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2^k} + \cot \beta$$

Indicación: Utilizar la identidad:

$$\frac{1}{2} \cot \frac{\alpha}{2} - \cot \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

6. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y se tiene la sucesión de término general:

$$a_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n,$$

entonces ella tiene como límite a

$$\frac{a+b}{2}$$

7. Utilizando el criterio del sandwich establecer los límites de las sucesiones de términos generales:

(i)

$$a_n = \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n^{100}}{n+2} \right) + \frac{1}{3} \cos^2 \left(\frac{n^{100}}{n+2} \right) \right)^n$$

(ii)

$$b_n = \prod_{k=2}^n (2 - \sqrt[k]{e})$$

Indicación

Para (ii), demostrar que:

$$0 < 2 - \sqrt[k]{e} < \frac{k-1}{k}$$

8. Utilizando la identidad:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) ,$$

calcular el límite de la sucesión cuyo término general está dado por:

(i) (iii)

$$a_n = n \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{a}{n}} \right)$$

$$c_n = n \left(\sqrt[3]{8 + \frac{2}{n}} - 2 \right)$$

(ii) (iv)

$$b_n = n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{a}{n}} - 1 \right)$$

$$d_n = n \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{7}{n}} \right)$$

9. Calcular los límites de las sucesiones cuyos términos generales son:

(i) (iv)

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$$

$$d_n = \left(1 - \frac{2}{4n+1} \right)^n$$

(ii) (v)

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n$$

$$e_n = \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2n + 1} \right)^n$$

(iii) (vi)

$$c_n = \left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{4n}$$

$$f_n = \left(\frac{an+b}{an+c} \right)^n$$

10. Dada la sucesión $\{a_n\}$ que satisface la forma recursiva:

$$a_1 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4) ,$$

demostrar por inducción que $a_n < 4$; que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y, por lo tanto, determinar su límite.

11. Calcular el límite de la sucesión $\{a_n\}$ cuyo término general es:

(viii)

$$(i) \quad a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)!}$$

$$(ii) \quad a_n = \left(1 + \frac{5n}{2n^2 - n + 2} \right)^{5n-7} \quad (ix)$$

$$(iii) \quad a_n = \left(\frac{n^2 + 3n - 1}{n^2 + n} \right)^{\frac{n^2+2}{2n^2+1}}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k!}$$

$$(iv) \quad a_n = \left(\frac{2n+2}{2n-1} \right)^{n+\sqrt{n}} \quad (x)$$

$$a_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^3}{k!}$$

$$(v) \quad a_n = \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 4n} \right)^{\frac{n^2-1}{n}} \quad (xi)$$

$$(vi) \quad a_n = n^{2n} (1 + n^2)^{-n}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2k+1)!}$$

$$(vii) \quad a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} \quad (xii)$$

$$a_n = \sum_{k=3}^n \frac{k^2 + 2k + 1}{(k-1)!}$$

12. Demostrar que si $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1 ,$$

entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 ,$$

aplicar este criterio para establecer que:

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

13. Explicar la razón por la que las sucesiones, cuyos términos generales son los siguientes, no tienen límite:

(i)

$$a_n = n!$$

(iii)

$$c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

(ii)

$$b_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

(iv)

$$d_n = 1,02^n$$

14. Dadas las sucesiones definidas por las recurrencias:

(i)

$$a_0 = 0 , \quad a_1 = 3 , \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + a_{n-1}}{3}$$

(ii)

$$b_1 = 1 , \quad b_{n+1} = \frac{1}{2 - b_n}$$

(iii)

$$c_1 = 1 , \quad c_2 = 6 , \quad c_{n+2} = \frac{1}{6}(5c_{n+1} - c_n)$$

(iv)

$$d_1 = 1 , \quad d_2 = 3 , \quad d_{n+2} = \frac{1}{2}(d_{n+1} - d_n)$$

(v)

$$6y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0 , \quad y_0 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{6} .$$

Calcular el límite de cada una de ellas.

(II) Límites y continuidad

1. Aplicando la definición de límite demostrar que:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = 6 ,$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3 ,$$

(iii) Siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si : } x < 3 \\ 8 & \text{si : } x = 3 \\ 3x - 3 & \text{si : } x > 3 \end{cases} ,$$

demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 .$$

Esbozar el gráfico en cada caso.

2. Explicar la razón por la que los siguientes límites no existen:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x(x-1)}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4}$$

(iii) Siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si : } x < 1 \\ 3 & \text{si : } x \geq 1 \end{cases} ,$$

cuyo límite cuestionado es:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) .$$

3. Calcular:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} ,$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x - \sin 3x}{2x + 3 \sin 4x} ,$$

4. Calcular:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^3 + 8x^2 - 3x - 9}{10x^3 + 9x^2 - 5x + 6} ,$$

(v) Si $m, n \in \mathbb{N}$, se pide:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} ,$$

(ii) Si $m, n \in \mathbb{N}$, se pide:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} ,$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2} ,$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right) ,$$

(vii)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2a - \sqrt[3]{4(a^3 + x^3)}}{\sqrt[3]{4(a^3 + x^3)} - 2x} ,$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} ,$$

(viii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}} .$$

5. Sean $x_1 < x_2$ las raíces de la ecuación $x^2 - 2ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a > b$. Determinar los límites:

(i)

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{a - b}},$$

(ii)

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{ax_2 - b^2}{ax_1 - b^2},$$

(iii)

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{ax_2 - bx_1}{ax_1 - bx_2}.$$

6. En los ejercicios que aparecen a continuación, utilice las propiedades de los límites para evaluar aquellos que existan.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 7x - 11)$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x - 2\sqrt{2x}}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - x + 7)$$

(k)

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16 - x}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x - x^7)$$

(l)

(d)

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2)^7$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 8x + 3}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)^7}{(2x - 5)^4}$$

(m)

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{3 - \sqrt{x}}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 - x - 2}$$

(n)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{2x^2 + 2x + 4}{6x - 3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^3 - 2x}$$

(ñ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{9x^2 - 16}{3x + 4}$$

(o)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x - 1}$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

(p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+7} - \frac{1}{7} \right)$$

7. Calcular los límites siguientes:

(a)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$	(ñ)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$
(b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x}$	(o)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} 3x}$
(c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\frac{7-x}{7+x}}$	(p)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{x}{3}$
(d)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{2x}$	(q)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x \cos 2x}$
(e)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{sen} 2x}{7 \operatorname{sen} 3x}$	(r)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} 3x)^2}{x^2 \cos x}$
(f)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{x}$	(s)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$
(g)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{17})^x - 1}{\frac{x}{2}}$	(t)	$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 7x$
(h)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$	(u)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 21x}{\operatorname{sen} 49x}$
(i)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{x}$	(v)	$\lim_{x \rightarrow 0} x \sec x \operatorname{cosec} x$
(j)	$\lim_{x \rightarrow 1} [x]$	(w)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$
(k)	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} - \sqrt{9 - x^2} \right)$	(x)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right)$
(ℓ)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}$	(y)	$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$
(m)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3\pi x}{x}$	(z)	$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
(n)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - 3}{x}$	(A)	$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

8. En cada uno de los ejercicios siguientes evaluar el límite o demostrar que la función

tiende a $+\infty$ o bien a $-\infty$.

(a) (j)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1 - x^2}$$

(b) (ℓ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{3x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{4 - x^2}$$

(c) (m)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 - 6x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$$

(d) (n)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 7x + 5}{(x + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$$

(e) (ñ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$$

(f) (o)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$$

(g) (p)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{6 - 5x + x^2}}$$

(h) (q)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{|x|}$$

(i) (r)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + a^2} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$$

9. Esbozar el gráfico de:

$$f(x) = \frac{2(x - 4)}{\sqrt{x} - 2} \quad x \geq 0, \quad x \neq 4.$$

10. Dadas las funciones:

(i)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3},$$

(ii)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{si : } x \neq 3 \\ 3 & \text{si : } x = 3 \end{cases},$$

(iii)

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{si : } x \neq 3 \\ 5 & \text{si : } x = 3 \end{cases},$$

Dibujar el gráfico de cada una de ellas, estudiar la continuidad de ellas en $x = 3$. Redefinir aquellas funciones cuando en $x = 3$ hay discontinuidad evitable.

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsen } x}{x},$$

(xii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}},$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{\text{sen } \frac{x}{2} - \text{sen } \frac{a}{2}},$$

(xiii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[x]{a} - 1),$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen } \frac{x}{2} + \cos x}{1 + \text{sen}^2 x + \cos x},$$

(xiv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\text{tg } x - 1},$$

(xv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\text{sen } ax - \text{sen } bx},$$

(vii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\text{sen } x},$$

(xvi)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} - 1}{x+1},$$

(viii)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg } x \left(1 - \text{tg } \frac{x}{2}\right)}{\text{tg } x - 1},$$

(xvii)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)},$$

(ix)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^2 - 3^x}{x},$$

(xix)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5}}{2x},$$

(x)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{5^x - 3^x},$$

(xx)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+2x} - 3}{x},$$

(xi)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}},$$

(xxi)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+h} - \sqrt{3x}}{h}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{7^x - 5^x},$$

11. Encontrar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y discernir si la discontinuidad es evitable o esencial:

(i)

$$f_1(x) = \frac{x}{x^3 - 4x} ,$$

(iii)

$$f_3(x) = [x] ,$$

(ii)

$$f_2(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} ,$$

(iv)

$$f_4(x) = x - [x] .$$

12. Determinar los intervalos de continuidad de las funciones:

(i)

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 9} ,$$

(ii)

$$f_2(x) = \frac{4}{x^2 + x} ,$$

(iii)

$$f_3(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x+6}} .$$

13. Encontrar los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x & \text{si : } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si : } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si : } \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$. Hacer el gráfico de f .

14. Dada la función real

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ -\sqrt{14x - x^2 - 45} & \text{si } 5 < x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide construir con ella el gráfico de g pero ahora con dominio $\mathbb{R}$ sabiendo que además de ser impar posee período 18.

15. Si f es una función continua en $[a, b]$; además $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.

16. Ocupando el problema anterior, resolver la ecuación:

$$\operatorname{sen} x = x^2 ,$$

y encontrar un método para conseguir la raíz positiva con la exactitud que se desea.