

GUIA 15:
EXTREMOS DE FUNCIONES EN VARIAS

1.- Determine los puntos máximos y mínimos o puntos sillas si existen de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = 2x^2 + 4x + y^2 + 6y$.
- b) $f(x, y) = -3x^2 - 5y^2 + 6x - 9y$.
- c) $f(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$.
- d) $f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$.
- e) $f(x, y) = e^x \cdot \cos y$.

2.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción dada:

- a) $f(x, y) = xy$; s.a $x^2 + y^2 = 1$.
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ s.a $xy = 1$.
- c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ s.a $2x + y = 22$.
- d) $f(x, y) = x^2 - y^2$ s.a $x^2 + y^2 = 4$.
- e) $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$ s.a $x + y = 15$.

3.- APLICACIONES

- a) Una lechería produce leche entera y descremada en cantidades x e y galones respectivamente. Suponga que el precio de leche entera es $p(x) = 100 - x$ y el de la leche descremada es $q(y) = 100 - y$. Si $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ es la función de costos conjuntos de los productos. ¿Cuáles deberán ser x e y para maximizar las utilidades? ¿Cuál es la utilidad máxima?
- b) Halle la combinación de bienes x e y que minimizarán los costos para que un producto enfrente la siguiente función de costo y las restricciones de cuotas de producción:

$$C = 5x^2 - 3xy + 8y^2 + 95, \text{ sujeta a } x + y = 64$$

- c) Una empresa produce x lavadoras e y secadoras a un costo de $C(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ unidades monetarias. Los ingresos son $I(x, y) = 2x + 3y$ unidades monetarias. Hallar la máxima utilidad. **NOTA:** La utilidad se obtiene como $U(x, y) = I(x, y) - C(x, y)$.
- d) La función de producción para un fabricante está dada por $P(x, y) = 100\sqrt[4]{x^3y}$, donde x representa las unidades de trabajo a 150 dólares la unidad e y representa las unidades de capital a 250 dólares por unidad. El costo total de trabajo y de capital se limita a 50.000 dólares. Halle el nivel de producción máxima de este fabricante.
- e) Un productor agrícola vende dos tipos de productos. Los ingresos anuales totales $I(x, y)$ en miles de dólares se comportan como una función del número de unidades

vendidas dada por la expresión: $I(x, y) = 400x - 4x^2 + 1960y - 8y^2$, en donde x e y son respectivamente el número de unidades, expresadas en cientos vendidas de cada uno de los productos. El costo total $C(x, y)$ de producción de los productos es $C(x, y) = 100 + 2x^2 + 4y^2 + 2xy$. Determine el número de unidades de cada producto que se deben producir y vender con el fin de maximizar la utilidad.

f) A un editor se le han asignado US\$ 60.000 para invertir en el desarrollo y la promoción de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan x miles de dólares en desarrollo e y miles de dólares en promoción, se venderán aproximadamente $f(x, y) = 20x^{\frac{2}{3}} \cdot y$ ejemplares del libro. ¿Cuántos dinero debe asignar al editor a desarrollo y cuánto a promoción para maximizar las ventas?

g) Un consumidor tiene US\$ 600 para gastar en dos artículos, el primero de los cuales tiene un valor de US\$ 20 por unidad y el segundo US\$ 30 por unidad. Si la utilidad obtenida por el consumidor de x unidades del primer artículo e y unidades del segundo está dada por la función de utilidad de Cobb - Douglas:

$$U(x, y) = 10x^{0.6}y^{0.4}$$

¿Cuántas unidades de cada artículo debería comprar el consumidor para maximizar la utilidad?

h) La función de producción para un cierto fabricante es $f(x, y) = 4x + xy + 2y$. Supongamos que la máxima inversión posible en trabajo y capital es de \$ 2000 y que las unidades de trabajo y capital cuestan respectivamente \$ 20 y \$ 4. Calcular el nivel de producción máximo para ese fabricante.