

I.- INTEGRACIÓN INDEFINIDA.

• INTEGRALES INMEDIATAS.

Definición: Si $F(x)$ es una función cuya derivada $F'(x) = f(x)$; $\forall x \in I$, entonces $F(x)$ se llama primitiva de $f(x)$.

LISTA DE INTEGRALES INMEDIATAS.

- 1.- $\int \frac{d}{dx} |f(x)| dx = f(x) + C$
- 2.- $\int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx$
- 3.- $\int k \cdot u \cdot dx = k \int u dx$; $k = cte$; $u = u(x)$
- 4.- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- 5.- $\int e^x dx = e^x + C$
- 6.- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- 7.- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- 8.- $\int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$
- 9.- $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$
- 10.- $\int \operatorname{tg}(ax) dx = \frac{\ln|\sec(ax)|}{a} + C$
- 11.- $\int \operatorname{ctg}(ax) dx = \frac{-\ln|\sin(ax)|}{a} + C$
- 12.- $\int \sec(ax) dx = \frac{\ln|\sec(ax) + \operatorname{tg}(ax)|}{a} + C$
- 13.- $\int \operatorname{cosec}(ax) dx = \frac{-\ln|\operatorname{cosec}(ax) + \operatorname{ctg}(ax)|}{a} + C$
- 14.- $\int \sec^2(ax) dx = \frac{\operatorname{tg}(ax)}{a} + C$
- 15.- $\int \operatorname{cosec}^2(ax) dx = \frac{-\operatorname{ctg}(ax)}{a} + C$
- 16.- $\int \sec(ax) \cdot \operatorname{tg}(ax) dx = \frac{\sec(ax)}{a} + C$
- 17.- $\int \operatorname{cosec}(ax) \cdot \operatorname{ctg}(ax) dx = \frac{-\operatorname{cosec}(ax)}{a} + C$
- 18.- $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{a}\right) + C$
- 19.- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arcsen}\left(\frac{bx}{a}\right) + C$
- 20.- $\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arccos}\left(\frac{bx}{a}\right) + C$
- 21.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arcsec}\left(\frac{bx}{a}\right) + C$

- FÓRMULAS DE RECURRENCIA.**

$$1.- \int \sin^n(x) dx = \frac{1}{n} \left[-\cos x \cdot \sin^{n-1}(x) + (n-1) \cdot \int \sin^{n-2}(x) dx \right] ; n \geq 2$$

$$2.- \int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \left[\cos^{n-1}(x) \cdot \sin(x) + (n-1) \cdot \int \cos^{n-2}(x) dx \right] ; n \geq 2$$

$$3.- \int \tan^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \cdot \tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x) dx ; n \geq 2$$

$$4.- \int \sec^n(x) dx = \frac{\sec^{n-2}(x) \cdot \tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \sec^{n-2}(x) dx ; n \geq 2$$

- SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS.**

TIPO DE INTEGRAL	SUSTITUCION
$\int f(x, \sqrt{a^2 - b^2 x^2}) dx ; a > 0 ; b > 0$	$x = \frac{a}{b} \cdot \sin(u)$
$\int f(x, \sqrt{b^2 x^2 - a^2}) dx ; a > 0 ; b > 0$	$x = \frac{a}{b} \cdot \sec(u)$
$\int f(x, \sqrt{a^2 + b^2 x^2}) dx ; a > 0 ; b > 0$	$x = \frac{a}{b} \cdot \tan(u)$

- INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES.**

Sea f una función racional, entonces las integrales de la forma $\int f(\sin(x), \cos(x)) dx$, se resuelven utilizando la sustitución:

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) ; dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}} ; \boxed{\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}} .$$

EJERCICIOS RESUELTOS INTEGRALES INDEFINIDAS

1.- Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx & \text{b) } \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx & \text{c) } \int x^2 \cdot 5^x dx & \text{d) } \int \arctg(\sqrt{x}) dx \\ \text{e) } \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx & \text{f) } \int \frac{1}{x^2+9} dx & \text{g) } \int \frac{dx}{\sin(2x) \cdot \ln(\operatorname{tg}(x))} \end{array}$$

Solución:

$$\text{a) Sea } u = 1 + \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \rightarrow I = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + C$$

$$\begin{aligned} \text{b) Sea } x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du \rightarrow I &= \int \frac{1+u}{1-u} \cdot 2u du = 2 \int \frac{u^2+u}{1-u} du = -2 \int \frac{u^2+u}{u-1} du \\ &= -2 \int \left[(u+2) + \frac{2}{u-1} \right] du = -2 \left[\frac{u^2}{2} + 2u + 2 \ln|u-1| \right] = -2 \left[\frac{x}{2} + 2\sqrt{x} + 2 \ln|\sqrt{x}-1| \right] + C \end{aligned}$$

$$\text{c) Por partes: Sea } u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx ; dv = 5^x dx \Rightarrow v = \frac{5^x}{\ln 5}$$

$$\rightarrow I = x^2 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5} \cdot 2x dx = x^2 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln 5} \int x \cdot 5^x dx.$$

Integrando por partes nuevamente $\int x \cdot 5^x dx$, se tiene que:

$$u = x \Rightarrow du = dx ; dv = 5^x dx \Rightarrow v = \frac{5^x}{\ln 5}$$

$$\text{Luego: } \rightarrow I = x^2 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln 5} \left[x \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5} dx \right] = x^2 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln 5} \left[x \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln 5} \right]$$

$$\text{d) Sea } u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2u du . \text{ Luego: } I = 2 \int u \cdot \arctg(u) du .$$

$$\text{Integremos por partes: Sea } p = \arctg(u) \Rightarrow dp = \frac{du}{1+u^2} ; dv = u du \Rightarrow v = \frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow I = 2 \left[\frac{u^2}{2} \operatorname{arctg}(u) - \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{du}{1+u^2} \right] = 2 \left[\frac{u^2}{2} \operatorname{arctg}(u) - \frac{1}{2} \int \frac{u^2+1-1}{1+u^2} du \right]$$

$$= 2 \left[\frac{u^2}{2} \operatorname{arctg}(u) - \frac{1}{2} \{u - \operatorname{arctg}(u)\} \right] + C = 2 \left[\frac{x}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \{ \sqrt{x} - \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) \} \right] + C$$

$$e) \quad I = \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx - \int \frac{dx}{e^{2x}+1} \cdot \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln|u| + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|e^{2x}+1| + \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|e^{2x}+1| + \frac{1}{2} \ln|1+e^{-2x}| + C$$

$$f) \quad \int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{1}{x^2+3^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$g) \quad \text{Sea } u = \ln(\operatorname{tg} x) \Rightarrow du = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2(x) dx = \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} \Rightarrow \frac{du}{2} = \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg}(x))} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|\ln(\operatorname{tg}(x))| + C$$

2.- Calcular las siguientes integrales, usando sustitución trigonométrica.

$$a) \quad \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$$

$$b) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

Solución:

$$a) \quad \sqrt{9-4x^2} = \sqrt{3^2 - (2x)^2} \text{ hagamos } x = \frac{3}{2} \operatorname{sen} z$$

$$dx = \frac{3}{2} \cos z \, dz \quad \text{y} \quad \sqrt{9-4x^2} = \cos z$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx = \int \frac{3 \cos z}{\frac{3}{2} \operatorname{sen} z} \cdot \frac{3}{2} \cos z \, dz$$

$$= 3 \int \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen} z} dz = 3 \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} dz$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \int \operatorname{cosec} z \, dz - 3 \int \operatorname{sen} z \, dz \\
 &= 3 \ln |\operatorname{cosec} z - \cot z| + 3 \cos z + c \\
 &= 3 \ln \left| \frac{3}{2x} - \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x} \right| + \sqrt{9-4x^2} + c \\
 &= 3 \ln \left| \frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x} \right| + \sqrt{9-4x^2} + c
 \end{aligned}$$

b) $\sqrt{4+x^2} = \sqrt{2^2+x^2}$ hagamos $x = 2 \operatorname{tg} z$

$dx = 2 \sec^2 z \, dz$ y $\sqrt{4+x^2} = 2 \sec z$. pues

$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4 \sec^2 z} = 2 |\sec z| = 2 \sec z$

si $\sec z > 0$ para $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{luego: } \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2 \sec^2 z \, dz}{\sec z} = 2 \int \sec z \, dz \\
 &= \ln |\sec z + \operatorname{tg} z| + c \\
 &= \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + c
 \end{aligned}$$

3.- Calcule los siguientes integrales de funciones racionales .

a) $\int \frac{x dx}{x^2 - 3x - 4}$

b) $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$

Solución:

a) $\frac{x}{x^2 - 3x - 4} = \frac{x}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} \quad / \cdot (x+1)(x-4)$

$$x = A(x-4) + B(x+1)$$

$$x = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$x = 4 \Rightarrow B = \frac{4}{5}$$

$$I = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x-4} = \frac{1}{5} \ln |x+1| + \frac{4}{5} \ln |x-4| + c$$

$$= \frac{1}{5} \ln |(x+1)(x-4)^4| + c$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \\ -2x+4 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + \\ &\quad (A-2B+C)x + (B-C+D) \end{aligned}$$

Igualando polinomios se tiene que:

$$A+C=0$$

$$-2A+B-C+D=0$$

$$A-2B+C=-2$$

$$B-C+D=4$$

Resolviendo el Sistema se llega a:

$$A=2$$

$$B=1$$

$$C=-2$$

$$D=1$$

Reemplazando :

$$\begin{aligned} \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} / \int dx \\ \int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \\ &= \ln|x^2+1| + \arctg(x) - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \end{aligned}$$

4.- APLICACIONES INTEGRAL INDEFINIDA.

a) Un fabricante descubrió que el costo marginal cuando se producen q unidades viene dado por:

$$C_m(q) = 3q^2 - 60q + 400 \text{ dólares por unidad.}$$

Si el costo total de producción de las 2 primeras unidades es US\$ 900. ¿Cuál es el costo total de producción de las 5 primeras unidades?

- b) Se estima que dentro de x meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. Si la población actual es 5.000 personas. ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

Solución:

- a) Recuerde que el costo marginal es la derivada de la función costo total $C(q)$.

Luego:

$$C_m(q) = C'(q) = 3q^2 - 60q + 400 \Rightarrow C(q) = \int C_m(q) dq = q^3 - 30q^2 + 400q + K$$

Sea sabe que $C(2) = 900 \Leftrightarrow 900 = 8 - 120 + 800 + K \Rightarrow K = 212$.

$$\therefore C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 212 \Rightarrow C(5) = 5^3 - 30 \cdot 25 + 400 \cdot 5 + 212 = \text{US\$}1587$$

- b) Sea $P(x)$ la población dentro de x meses, entonces la razón de cambio de ésta, con respecto al tiempo es la derivada:

$$\frac{dP}{dx} = 2 + 6\sqrt{x}$$

Se concluye que la función de población $P(x)$ es una antiderivada de $2 + 6\sqrt{x}$, es decir:

$$P(x) = \int \frac{dP}{dx} \cdot dx = \int (2 + 6\sqrt{x}) dx = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + C$$

Para encontrar el valor de C , usamos la condición inicial de que en la actualidad, o sea, en $x = 0$, la población es 5000, es decir:

$$P(0) = 5.000 \Rightarrow 5.000 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0^{\frac{3}{2}} + C \Rightarrow C = 5.000$$

Finalmente: $P(x) = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + 5000$, y dentro de 9 meses la población será de:

$$P(9) = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9^{\frac{3}{2}} + 5.000 = 5.126$$

EJERCICIOS RESUELTOS INTEGRAL DEFINIDA.

1.- Suponga que: $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$; $\int_1^4 f(x)dx = 2$; $\int_{-1}^1 h(x)dx = 7$; $\int_1^4 h(x)dx = 4$

Calcular:

a) $\int_4^1 f(x)dx$ b) $\int_{-1}^4 (3h(x) + 5f(x))dx$

Solución:

a) $\int_4^1 f(x)dx = -\int_1^4 f(x)dx = -2$

b) $\int_{-1}^4 (3h(x) + 5f(x))dx = 3\int_{-1}^4 h(x)dx + 5\int_{-1}^4 f(x)dx$

$$= 3\left[\int_{-1}^1 h(x)dx + \int_1^4 h(x)dx\right] + 5\left[\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx\right]$$

$$= 3 \cdot (7 + 4) + 5 \cdot (5 + 2) = 33 + 35 = 68$$

2.- Suponga que $\int_0^1 f(x)dx = 3$. Hallar $\int_{-1}^0 f(x)dx$ si:

- a) $f(x)$ es impar b) $f(x)$ es par.

Solución:

$$a) \quad f \text{ impar} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 -f(-x) dx = - \int_{-1}^0 f(-x) dx = \int_0^1 f(u) du = 3$$

$$b) \quad f \text{ par} \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(-x) dx = \int_1^0 f(u) du = - \int_0^1 f(u) du = -3$$

3.- Sea f una función continua en $\mathbb{R}$, que satisface la ecuación:

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) ; \quad \forall x$$

$$\text{Calcular: } f\left(\frac{\pi}{4}\right) ; f'\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Solución:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x f(t) dt \right] = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{2} + x^2 + x \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \right] = f(x)$$

$$\Rightarrow 2x + \cancel{\sin 2x} + 2x \cos 2x - \cancel{\sin 2x} = f(x) = 2x + 2x \cos 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 + 2 \cos 2x - 4x \sin 2x. \text{ Luego } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} ; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \pi.$$

4.- Si h es continua, f y g derivables, y sea $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt$, entonces:

$$F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$$

Si $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt$; $x > 0$, calcule $F'(x)$.

Solución:

$$F'(x) = \ln(x^3) \cdot 3x^2 - \ln(x^2) \cdot 2x = 3\ln x \cdot 3x^2 - 2\ln x \cdot 2x = \ln x [9x^2 - 4x]$$

APLICACIONES INTEGRAL DEFINIDA

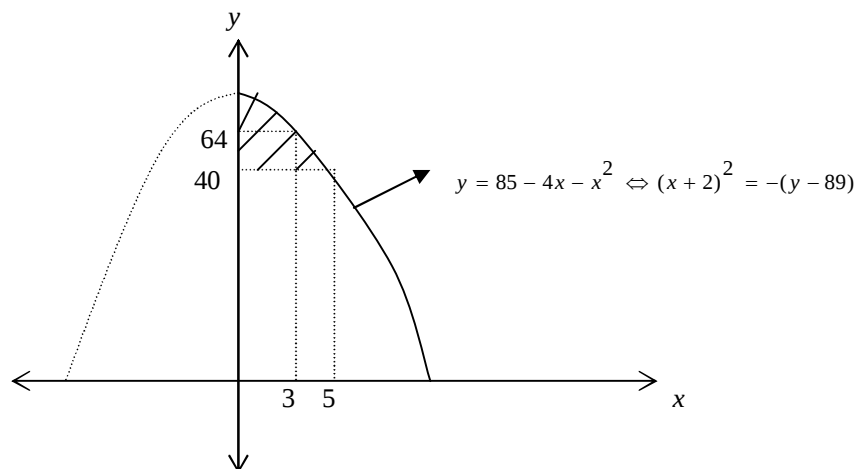
1.- Si la función de demanda es $y = 85 - 4x - x^2$, hallar el excedente del consumidor si:

a) $x_0 = 5$

b) $y_0 = 64$

Solución:

a)



Si $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 85 - 4 \cdot 5 - 5^2 = 40$.

Excedente del consumidor:

$$= \int_0^5 (85 - 4x - x^2) dx - 5 \cdot 40 = \left[85x - 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^5 - 200 = 133\frac{1}{3}$$

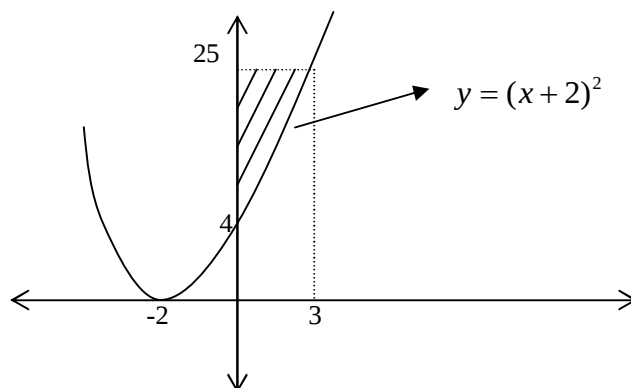
b) Si $y_0 = 64 \Rightarrow (x_0 + 2)^2 = -(64 - 89) \Rightarrow x_0 = 3$

Excedente del consumidor:

$$= \int_0^3 (85 - 4x - x^2) dx - 3 \cdot 64 = \left[85x - 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 - 192 = 36$$

2.- Si la ley de oferta es $y = (x + 2)^2$ y el precio se fija en $y_0 = 25$, hallar el excedente del productor.

Solución:



$$\text{Si } y_0 = 25 \Rightarrow 25 = (x_0 + 2)^2 \Rightarrow x_0 = 3$$

Excedente del productor:

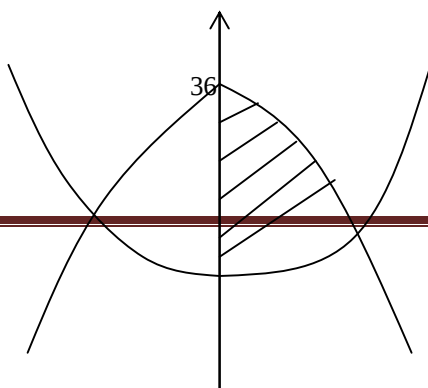
$$= 3 \cdot 25 - \int_0^3 (x+2)^2 dx = 75 - \frac{x+2}{3} \Big|_0^3 = 36$$

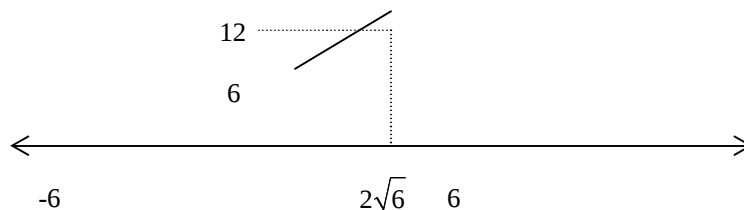
3.- La cantidad demandada y el correspondiente precio, en situación de competencia pura se determinan con las funciones de demanda y oferta $y = 36 - x^2$ e $y = 6 + \frac{x^2}{4}$, respectivamente. Determinar el correspondiente excedente del consumidor y el excedente del productor.

Solución:

$$y = 36 - x^2 = 6 + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow 5x^2 = 120 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{6}$$

$$\therefore x_0 = 2\sqrt{6} \Rightarrow y_0 = 12$$





Excedente del consumidor:

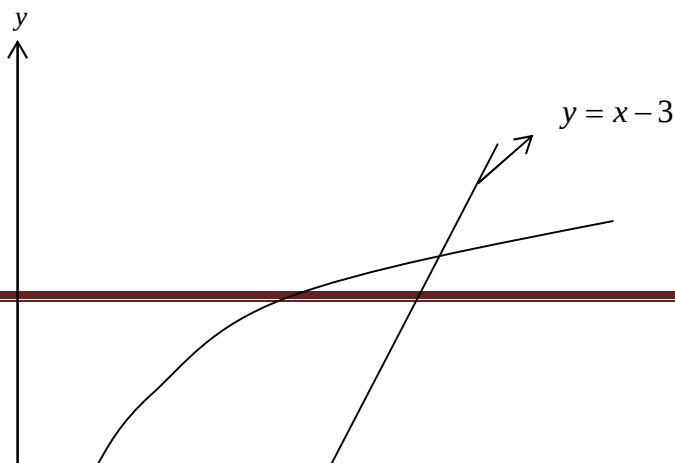
$$\int_0^{2\sqrt{6}} (36 - x^2) dx - 2\sqrt{6} \cdot 12 = \left(36x - \frac{x^3}{3} \right)_0^{2\sqrt{6}} - 24\sqrt{6} \approx 78.4$$

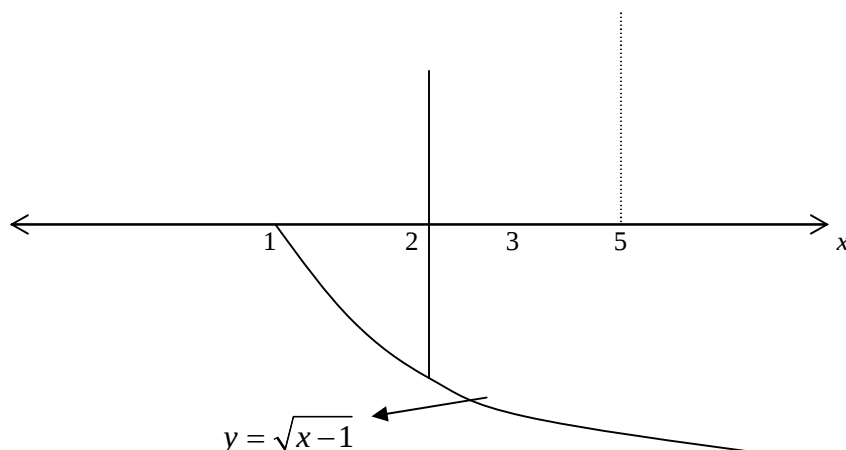
Excedente del productor:

$$= 2\sqrt{6} \cdot 12 - \int_0^{2\sqrt{6}} \left(6 + \frac{x^2}{4} \right) dx = 24\sqrt{6} - \left[6x + \frac{x^3}{12} \right]_0^{2\sqrt{6}} \approx 19.6$$

EJERCICIOS RESUELTOS CALCULO DE AREAS.

1.- Calcular el área de la región limitada por las curvas $y^2 = x - 1$ e $y = x - 3$.



**Solución:**

Puntos de intersección:

$$\begin{cases} x = y^2 + 1 \\ x = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \rightarrow x = 2 & (2, -1) \\ y = 2 \rightarrow x = 5 & (5, 2) \end{cases}$$

Primer método.

$$\begin{aligned} y = x - 3 &\Rightarrow x = y + 3 \\ y^2 = x - 1 &\Rightarrow x = y^2 + 1 \end{aligned} \Rightarrow A(R) = \int_{-1}^2 [(y + 3) - (y^2 + 1)] dy$$

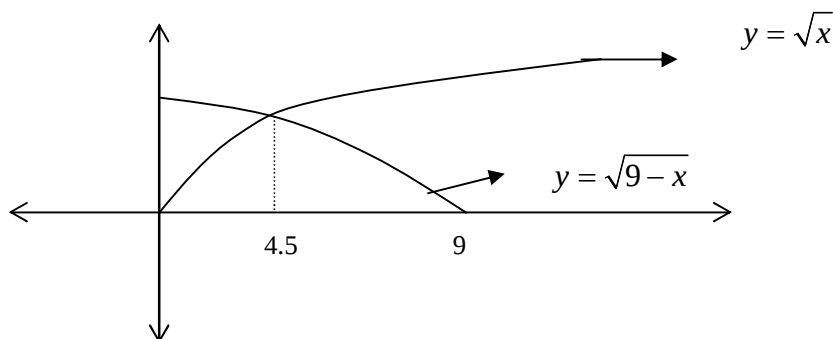
$$\Rightarrow A(R) = \left[\frac{y^2}{2} + 3y - \frac{y^3}{3} - y \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

Segundo método.

$$\begin{aligned} y &= x - 3 \\ y &= \sqrt{x - 1} \end{aligned}$$

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2), \text{ donde } A(R_1) = \int_1^2 2\sqrt{x-1} dx ; A(R_2) = \int_2^5 (\sqrt{x-1} - (x-3)) dx$$

2.- Calcular el área entre las curvas $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{9-x}$; $y = 0$.



Solución:

$$\text{Punto de intersección: } \sqrt{x} = \sqrt{9-x} \Rightarrow x = 9-x \rightarrow x = 4.5$$

$$A(R) = \int_0^{4.5} \sqrt{x} dx + \int_{4.5}^9 \sqrt{9-x} dx = 6.363 + 6.363 = 12.726.$$

3.- Determine el área comprendida entre el eje x y la curva $y = \sqrt{1 + \cos 4x}$; $0 \leq x \leq \pi$.

Solución:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 4x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2u} du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos 2u}{2}} du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 u} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} |\cos u| du \end{aligned}$$

Pero:

$$|\cos u| = \begin{cases} \cos u & 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos u & \frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{3\pi}{2} \\ \cos u & \frac{3\pi}{2} \leq u \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos u \, du + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos u \, du \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\operatorname{sen} u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \operatorname{sen} u \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \operatorname{sen} u \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right] = 2\sqrt{2}.$$

EJERCICIOS RESUELTOS INTEGRALES IMPROPIAS

1.- Calcular las integrales impropias de primera especie:

a) $\int_0^{\infty} e^x \cos x \, dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$

Solución:

a) Calculemos $I = \int e^x \cos x \, dx$ por partes.

Sea $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$; $dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$.

$$\Rightarrow I = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \right]$$

$$I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I \Leftrightarrow 2I = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) \Rightarrow I = \frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)}{2}$$

Luego:

$$\int_0^{\infty} e^x \cos x \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{e^t (\operatorname{sen} t + \cos t)}{2} - \frac{e^0 (\operatorname{sen} 0 + \cos 0)}{2} \right] = \infty$$

$\therefore$ La integral impropia diverge.

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx + \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$$

$$\text{Pero: } \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg}(u) = \operatorname{arctg}(e^x).$$

$$\text{Luego: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg}(e^x))'_t^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg}(e^x))'_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (\arctg 1 - \arctg(e^t)) + \lim_{t \rightarrow \infty} (\arg tg(e^t) - \arctg(1)) = (45^0 - 0) + (90^0 - 45) = 90^0$$

∴ La integral impropia converge.

2.- Calcular la integral impropia de segunda especie: $\int_0^{\ln 2} x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$.

Solución:

$$\int_0^{\ln 2} x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^{\ln 2} x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx, \text{ pero: } \int x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx = \int e^u du = e^u = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ utilizando el}$$

$$\text{cambio de variable } u = -\frac{1}{x} \rightarrow du = \frac{dx}{x^2}.$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^{\ln 2} x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} \Big|_t^{\ln 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[e^{-\frac{1}{\ln 2}} - e^{-\frac{1}{t}} \right] = e^{-\frac{1}{\ln 2}} - 0 = e^{-\frac{1}{\ln 2}}$$

∴ La integral impropia converge.

3.- Para la función $f(t)$ continua (o seccionalmente continua) $t \in [0, \infty[$, se define la función:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt ; s \in \mathbb{R}$$

Si $f(t) = e^{2t}$; $t \geq 0$. Encuentre todos los valores de $s \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $F(s)$ está bien definida; es decir, $\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$ es convergente.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{2t} dt = \int_0^{\infty} e^{(2t-st)} dt = \int_0^{\infty} e^{t(2-s)} dt = \int_0^{\infty} \frac{2-s}{2-s} e^{t(2-s)} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2-s} \int_0^b (2-s) e^{t(2-s)} dt = \frac{1}{2-s} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{t(2-s)} \Big|_0^b = \frac{1}{2-s} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{b(2-s)} - e^0] \\
 &= \frac{1}{2-s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-b(-2+s)} - 1 \right] = -\frac{1}{2-s} = \frac{1}{s-2}
 \end{aligned}$$

Converge si $2-s < 0 \Rightarrow 2 < s \Rightarrow s > 2 \quad \exists$ límite.

Diverge si $2-s > 0 \Rightarrow 2 > s \Rightarrow s < 2 \quad \nexists$ límite.

EJERCICIOS RESUELTOS INTEGRALES DOBLES

1-Calcular:

a) $\int_1^4 \int_{-2}^3 (x^2 - 2x \cdot y^2 + y^3) dx dy$

b) $\iint_I x^2 \cdot \sin(x \cdot y) dx dy \quad I = [0, \pi] \times [0, 1]$

c) $\int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y dx dy$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int_1^4 \int_{-2}^3 (x^2 - 2x \cdot y^2 + y^3) dx dy &= \int_1^4 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \cdot y^2 + y^3 \cdot x \right) \Big|_{-2}^3 dy \\
 &= \int_1^4 \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y^2 + x y^3 \right) dy
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{35}{3}y - \frac{5}{3}y^3 + \frac{5}{4}y^4 \right) \Big|_1^4 = \frac{995}{4}$$

$$b) \iint_I x^2 \sin(xy) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^\pi x^2 \sin(xy) \, dy \, dx = \int_0^1 -x \cos(xy) \Big|_0^\pi \, dx$$

$$= \int_0^\pi (x - x \cos x) \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \cos x - x \sin x \right) \Big|_0^\pi = 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

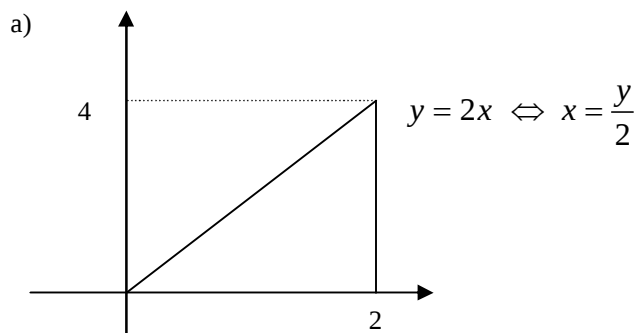
$$c) \int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y \, dx \, dy = \int_0^1 (xe^y) \Big|_{1-y}^1 \, dy = \int_0^1 (e^y - (1-y)e^y) \, dy = 1$$

2- Dada la función $f(x, y) = xy$ y la región triangular R limitada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$, $x = 2$. Hallar el valor de las integrales :

$$a) \iint_{R_x} f(x, y) \, dA$$

$$b) \iint_{R_y} f(x, y) \, dA$$

Solución:



$$R_x = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x \right\}$$

$$R_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq 2 \right\}$$

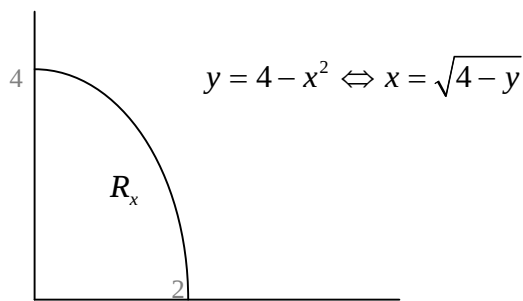
$$a) \iint_{R_x} f(x, y) \, dA = \int_0^2 \int_0^{2x} xy \, dx \, dy = \int_0^2 x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x} \, dy = \int_0^2 2x^3 \, dx = 8$$

$$b) \iint_{R_y} f(x, y) \, dA = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 xy \, dx \, dy = \int_0^4 y \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{y}{2}}^2 \, dy = \int_0^4 (2y - \frac{y^3}{8}) \, dy = 8$$

3-Calcular : $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x \cdot e^{2y}}{4-y} \, dy \, dx$

Solución:

$$R_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4 - x^2, 0 \leq x \leq 2\}$$



Como $\int \frac{e^{2y}}{4-y} dy$ es complicada de calcular, cambiamos el orden de integracion.

$$R_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y}\} \quad \text{Luego:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x \cdot e^{2y}}{4-y} \, dy \, dx &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x \cdot e^{2y}}{4-y} \, dx \, dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-y}} \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \cdot (4-y) \, dy = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} \, dy = \frac{1}{4} (e^8 - 1). \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS INTEGRAL INDEFINIDA.

1.- Calcular las siguientes integrales utilizando algún método conocido:

a) $\int (4x^3 + 8x - 3)dx$

c) $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$

e) $\int \ln x dx$

g) $\int \frac{x}{e^{x-2}} dx$

i) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

k) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$

m) $\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}} dx$

ñ) $\int \frac{e^x}{4+9e^x} dx$

p) $\int \frac{3x+2}{(x+2)(x-4)} dx$

r) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

t) $\int \sqrt{x} \left(x - \frac{1}{x} \right) dx$

v) $\int x e^{ax} dx$

x) $\int \frac{6}{\sqrt{9-e^{2x}}} dx$

z) $\int \frac{xdx}{9x^2(x^2+1)}$

b) $\int (x + x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx$

d) $\int x \cdot e^{-x^2+2} dx$

f) $\int x \sqrt{2x+3} dx$

h) $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$

j) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\cos x} dx$

l) $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

n) $\int \frac{1}{v^2+2v+5} dv$

o) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^{\frac{3}{2}}}$

q) $\int \frac{3}{x^2+x-2} dx$

s) $\int \frac{xdx}{x^2-3x-4}$

u) $\int \frac{x}{25-x^2} dx$

w) $\int \sin^2 3x dx$

y) $\int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} dt$

EJERCICIOS PROPUESTOS INTEGRAL DEFINIDA.

1.- Calcular las siguientes integrales definidas:

$$\text{a) } \int_0^1 x(x^2 + 1)^4 dx$$

$$\text{c) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx$$

$$\text{e) } \int_{-1}^1 x|2x-1| dx$$

$$\text{g) } \int_0^1 \frac{4x-2}{(x^2+1)(x^2-2x+2)} dx$$

$$\text{i) } \int_e^{e+3} \ln(x-2) dx$$

$$\text{k) } \int_0^{10} 800e^{-0.05x} dx$$

$$\text{m) } \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{b) } \int_1^3 |3x-6| dx$$

$$\text{d) } \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$\text{f) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx$$

$$\text{h) } \int_{-1}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$\text{j) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x} dx$$

$$\text{l) } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos x} dx$$

$$\text{n) } \int_2^e \frac{dx}{x-1}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS AREA Y APLICACIONES

1.- Encuentre las antiderivadas de $g(x)$

a) $g(x) = 9x^2 - 4x + 3$

b) $g(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$

c) $g(x) = 10x^4 - 6x^3 + 5\sqrt{x} - \sqrt[5]{x}$

d) $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

e) $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

2.- Resuelva:

a) Si $f(x) = 6x^2 + x - 5$; encuentre $F(x)$ si $F(0) = 2$

b) Si $f(x) = 12x^2 - 6x + 1$; encuentre $F(x)$ si $F(1) = 5$

c) Si $f'(x) = 9x^2 + x - 8$; encuentre $f(x)$ si $f(-1) = 1$

d) Si $f''(x) = 4x - 1$; encuentre $f(x)$ si $f'(2) = -2$, $f(1) = 3$

e) Si $f''(x) = x^{\frac{1}{9}} - 5$; encuentre $f(x)$ si $f'(1) = 2$, $f(1) = -8$

3) Calcule $\frac{dF}{dx}$, en los puntos donde ésta exista:

a) $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

c) $F(x) = \int_1^{e^x} \ln(t) dt$

b) $F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt$

d) $F(x) = \int_{2x}^{3x} \cos^2(t) dt$

- 4) Una función está dada por:

$$\int_1^x (2t^2 - 8t + 1) dt ; x \geq 1 \text{ Calcular : } f(1), f'(1), f''(1)$$

- 5) Una función $g(x)$ esta definida por:

$$g(x) = \int_1^x e^s (s^2 + 2s - 24) ds$$

Determine valores extremos concavidad, intervalos de concavidad.

- 6) Una función g satisface:

$$g(x) = \int_x^{x+1} \frac{4t - 6t^3}{1+t} dt, \quad x > 0. \text{ Encuentre puntos críticos de } g(\text{si } \exists).$$

- 7) Si x representa el tiempo que una persona permanece frente a una caja en un supermercado y $C(x)$ el costo de atención por persona dependiendo del tiempo que permanece frente a la caja. Si $g(x)$ representa el comportamiento del tiempo x , entonces se puede calcular el costo esperado por persona mediante:

$$\int_a^b g(x) \cdot c(x) dx, \quad \text{donde } [a, b] \text{ representa al conjunto de valores de } x.$$

Si en un caso en el cual se presenta este fenómeno:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{10} & \text{Si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{10} & \text{Si } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{Si } x \notin]1, 3[\end{cases} \quad c(x) = \begin{cases} \$ 15 & \text{Si } x \leq 1.75 \\ \$ 18 & \text{Si } 1.75 < x \\ \$ 25 & \text{Si } 2.25 \leq x \end{cases}$$

Determine el costo que se espera por persona.

- 8) Sea $g(x) = \frac{1+x}{16} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- a) Determine el valor de λ tal que $\int_{\lambda}^5 g(x) dx = 1$; $g(x) \geq 0$
 b) Con λ determinado en (a) calcule:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\lambda}^5 e^{tx} \cdot g(x) dt \right], \text{ evaluada en } t = 0$$

9) Calcular :

$$\int_0^2 g(x) dx, \text{ si } g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1[\\ 2-x^2 & x \in [1,2] \end{cases}$$

10) Hallar el área de la región R limitada por las curvas:

- a) $y = x^2 - 2x$; $y = 4x - x^2$
- b) $y^2 = 2ax$; $x = a$
- c) $y = 12 - 3x^2$; $y = 0$
- d) $y = x^3 + x^2$; $y = x^3 + 1$
- e) $y = x(x-1)(x+1)$; $y = x$
- f) $y = 6x - x^2$; $y = x^2 - 2x$
- g) $y = x^2$; $y = -x + 6$
- h) $y = x$; $y = 2 - x$; $y = (x-1)^2$
- i) $y = 3x - x^2$; $y = 3x^2 - x^3$; $x = 0$; $x = 3$
- j) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$; $y = x^2 - 4x$
- k) $y = x^4 - 2x^2$; $y = 2x^2$
- l) $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$

11) Hallar el área de la región R limitada por :

- a) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $y = 1$ entre $x = 0$ y $x = \ln(5)$
- b) $2x - y = 0$, $x^2 - 4x + y = 0$, $y = 0$
- c) $y = (x^2 - 1)^2$, $y = 1 - x^2$
- d) $y = 3^x$, $y = \ln(x)$, $x + y = 1$, $x = 2$

12) Determine el valor de la constante a de manera que el área de la región R limitada por :

$$y = \frac{1}{2} e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = a, \text{ sea igual a 1.}$$

- 13) Determine los valores de la constante positiva “k” de modo que el área de la región R, limitada por las curvas $y = x^2 + k$ e $y = 2x - 2$ entre $x = -1$ y $x = 2$ sea igual a 12. Grafique la situación planteada.

- 14) Una compañía planea incrementar su producción de 10 a 15 unidades diarias. La función de costo marginal es $C(x) = x^2 - 20x + 108$. Al rediseñar el proceso de producción y adquirir nuevo equipo,

la compañía puede cambiar la función de costo marginal a $C(x) = \frac{1}{2} x^2 - 12x + 75$.

Determine el área entre las gráficas de las dos curvas de costo marginal desde $x = 10$ hasta $x = 15$. Interprete esta área en términos económicos.

- 15) Una empresa tiene como función de ingresos marginales mensual $IMG = x^2$ y la función de costo marginal mensual $CMG = x^3$ en millones de pesos, donde x representa el n° de unidades producidas y vendidas en miles.

- Grafique ambas funciones marginales en el mismo sistema de coordenadas y calcule el área de la región comprendida entre ellas.
- Indique claramente el significado del resultado obtenido en (a) en el contexto del problema.

- 16) La propensión marginal a consumir (en billones de dólares) está dada por:

$$\frac{dc}{dx} = 0,6 + \frac{0,5}{2x^{1/2}}$$

Cuando la renta es cero el consumo es de 10 billones de dólares. Hallar la función consumo.

- 17) Una máquina industrial genera ingresos a razón de $\frac{dI}{dt} = 5.000 - 20t^2$, dólares al año.

Simultáneamente genera gastos a razón de $\frac{dg}{dt} = 2.000 + 10t^2$, dólares al año.

Determine cantidad de años que hace que el uso de esta maquinaria sea provechoso para la empresa que la posee. ¿Cuáles son las ganancias netas totales generados por esta maquinaria, en esta cantidad de años?

- 18) Si la curva de demanda está dada por:

$$p = \left(-q^{2/2}\right) - 3q + 30$$

y la curva de oferta: $p = 3q + 16$.

Encontrar al excedente en el consumo cuando $p = 22$.

- 19) Si $D(q) = 27/q^3$ y $f(q) = \left(q^{2/3}\right) + 7$. Definen las curvas de demanda y oferta.
Encontrar el excedente de consumo y producción.

- 20) La función de demanda y oferta (en libre competencia) son:

$$y = \frac{1}{4} (9 - x)^2 \quad ; \quad y = \frac{1}{4} (1 + 3x) \quad \text{respectivamente.}$$

Si se establece un impuesto adicional de 3 por cantidad unitaria sobre la mercancía. Calcular la disminución del excedente del consumidor.

- 21) Determine el excedente del consumidor y del productor, suponiendo que se ha establecido el equilibrio en el mercado y las funciones de oferta y demanda, respecto a un producto, están dadas por:

- | | | |
|----|---------|-----------------------------|
| a) | Oferta | : $y = 52 + 2x$ |
| | Demanda | : $y = 100 - x^2$ |
| b) | Oferta | : $y = \sqrt{0.1x + 9} - 2$ |
| | Demanda | : $y = \sqrt{25 - 0.1x}$ |
| c) | Oferta | : $y = 6 + \frac{x^2}{4}$ |
| | Demanda | : $y = 36 - x^2$ |
| d) | Oferta | : $y = 6 + \frac{x^2}{4}$ |
| | Demanda | : $y = 36 - x^2$ |
| e) | Oferta | : $y = 50 + 6x^2$ |
| | Demanda | : $y = 300 - 4x^2$ |

EJERCICIOS PROPUESTOS INTEGRALES IMPROPIAS

1.- Calcular las integrales impropias de primera especie.

$$\text{a) } \int_1^{\infty} (1-x) \cdot e^{-x} dx$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} e^x \cdot \cos x dx$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$$

$$\text{d) } \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$$

$$\text{e) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$\text{f) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$\text{g) } \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$$

$$\text{h) } \int_1^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$\text{i) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

$$\text{j) } \int_1^{\infty} \frac{2x \cdot \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$$

2.- Calcular las integrales impropias de segunda especie.

$$\text{a) } \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\text{b) } \int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$\text{c) } \int_0^2 \frac{dx}{4-x^2}$$

$$\text{d) } \int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$$

$$e) \int_{-3}^0 \frac{x}{(x^2 - 4)^{2/3}} dx$$

$$f) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$$

$$g) \int_{-2}^4 \frac{dx}{x^2 - 4}$$

$$h) \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$i) \int_0^1 \frac{\theta + 1}{\sqrt{\theta^2 + 2\theta}} d\theta$$

$$j) \int_0^{\ln 2} x^{-2} \cdot e^{\frac{-1}{x}} dx$$

3.- Haciendo uso de la definición de integral impropia, calcule el área bajo la curva:

$$a) y = \frac{\ln x}{x^2}, \text{ entre } x = 1 \wedge x = \infty.$$

$$b) y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ entre } x = 0 \wedge x = 1.$$

$$c) y = e^{-x} \text{ e } y = 0 \quad (x \geq 0)$$

$$4.- \text{ Demostrar que: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

5.- Se sabe que una función es “función de distribución de probabilidad” si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Demuestre que la siguiente función es una función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{(x+100)^3} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6.- Una función f positiva se llama función de densidad de probabilidad si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

- Demuestre que si $\forall c > 0$, la función f , definida por $f(x) = c \cdot e^{-cx}$, cuando $x \geq 0$ y $f(x) = 0$ para $x < 0$, es una función de densidad de probabilidad.
- Calcular el promedio definido por:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

c) Calcular la desviación estándar definida por:

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

7.- En probabilidades, se define la función Gamma por: $\Gamma(x) = \int e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$; $x > 0$

- a) Calcule $\Gamma(1)$.
- b) Demostrar que $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$

EJERCICIOS PROPUESTOS INTEGRALES DOBLES

1). Calcular las integrales dobles, por interacción

- a) $\iint_I (x^2 + y^2) dx dy$ Si $I = [0, 2] \times [0, 5]$
- b) $\iint_I \frac{1}{x^3} e^{\frac{y}{x}} dx dy$ Si $I = [1, 3] \times [0, 2]$
- c) $\iint_I \frac{dx dy}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$ Si $I = [1, 2] \times [0, 1]$
- d) $\iint_I \frac{x}{y} dx dy$ Si $I = [-1, 1] \times [1, 2]$

2). Calcular las integrales iteradas

a) $\int_0^2 \int_0^{x^2} y \, dy \, dx$

b) $\int_1^2 \int_y^{y^2} (x + 2y) \, dx \, dy$

c) $\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}} \, dy \, dx$

d) $\int_1^e \int_0^y \frac{dx \, dy}{x^2 + y^2}$

e) $\int_{1/2}^{e/2} \int_0^{\frac{2x-x}{2x+1}} \frac{1}{x^2 - y^2} \, dy \, dx$

f) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} (4 - x^2) \, dy \, dx$

g)

3). Para cada integral doble, intercambie el orden de integración.

a) $\int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) \, dy \, dx$

b) $\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2}y} f(x, y) \, dx \, dy$

c) $\int_{-3}^2 \int_{x^2}^{6-x} f(x, y) \, dy \, dx$

d) $\int_0^3 \int_{y/3}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) \, dx \, dy$

Además representa la región de integración.

4). Invertir la descripción de cada uno de los dominios de $\mathbb{R}^2$ y calcular: $\iint_R f(x, y) \, dA$ en el orden que más convenga.

a) $\iint_R \frac{y}{x} \, dA$; $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq e^2 \right. \\ \left. \ln x \leq y \leq 2 \right\}$

b) $\iint_R y \, dA$; $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq a \right. \\ \left. 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$

$$c) \quad \iint_R \frac{dA}{\sqrt{1+x}} ; \quad R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \right. \\ \left. \frac{1}{2} \arccos x \leq y \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$d) \quad \iint_R \frac{1+x}{e^x} dA ; \quad R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \right. \\ \left. e^x \leq y \leq e \right\}$$

5). Calcular las siguientes integrales sobre los dominios que se indican.

$$a) \quad \iint_R 4 dA ; \quad R: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$b) \quad \iint_R (x^2 + y^2) dA ; \quad R: x^2 + 4y^2 = 4 \\ R: y \geq x$$

$$c) \quad \iint_R \frac{4}{y^2 + 1} dA ; \quad y \leq 3 \\ x \geq 0$$

$$d) \quad \iint_R \frac{1}{y^2 + 1} dA ; \quad R: y = \frac{1}{2}x, y = -x, y = 2$$

$$e) \quad \iint_R 12x^2 e^{y^2} dA ; \quad R: y = x^3, y = x \text{ en el } 1^\circ \text{ cuadrante}$$

6). Usando integral doble, calcular el área de la región limitada por las curvas indicadas.

$$a) \quad \text{El eje } y, \text{ las rectas } y = 2x, y = 4$$

$$b) \quad y^2 + x = 0 ; \quad y = x + 2$$

$$c) \quad x = y^2 ; \quad x = 2y - y^2$$

$$d) \quad y = \ln x ; \quad y = e^x ; \quad x = 1 ; \quad x = 3$$

$$e) \quad (x^2 + 4a^2)y = 8a^3 ; \quad 2y = x ; \quad x = 0$$

$$f) \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} ; \quad x + y = a$$

7). Calcular por integración doble el área de cada región achurada, definida por los siguientes gráficos.



