

GUIA N°5: CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROBLEMA 1.

Calcular $f_x; f_y$ para las siguientes funciones que se indican:

- a) $f(x, y) = x^3 y^4$ b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ c) $f(x, y) = e^{3x} \cdot \ln(xy)$
- d) $f(x, y) = \frac{2^x}{y^3}$ e) $f(x, y) = \frac{x^3 y + 1}{\sqrt{xy}}$ f) $f(x, y) = \cos(x^2 + 2y)$
- g) $f(x, y) = x^y$ h) $f(x, y) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)$ i) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right)$
- j) $f(x, y) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{y^2}}\right)$

PROBLEMA 2.

Calcular las cuatro derivadas parciales de orden dos $f_{xx}; f_{xy}; f_{yy}; f_{yx}$.

- a) $f(x, y) = 5x^2 - 3xy$ b) $f(x, y) = x^4 + x^4 y^{-7} - 6x^3 y$
- c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 y)$ d) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x + 3y)$
- e) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

PROBLEMA 3.

Evaluar las derivadas parciales de las siguientes funciones en los puntos dados. ($f_x; f_y; f_{xy}; f_{yx}; f_{xx}; f_{yy}$).

- a) $f(x, y) = 2x - 3y + 6$ en $(2, -2)$.
- b) $f(x, y) = (x^2 - y) \cdot e^{2y}$ en $(3, 0)$.
- c) $f(x, y) = y \cdot \ln(2xy^2 + 5y)$ en $(3, -1)$.
- d) $f(x, y) = \cos(2xy) + \frac{1}{x^2 + y^2}$ en $(0, 1)$.

PROBLEMA 4.

Hallar las derivadas parciales: $f_{xyy}; f_{yxy}; f_{yyx}; f_{xxx}; f_{yyy}$ si:

- a) $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ b) $f(x, y, z) = e^{-x} \cdot \operatorname{sen}(yz)$
- c) $f(x, y, z) = \frac{x}{y + z}$ d) $f(x, y, z) = xyz \cdot e^{xyz}$
- e) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{\cos z}$

PROBLEMA 5.

Aplicando la regla de la cadena, determinar las derivadas parciales indicadas.

- a) $f(x, y) = x^2 + y^3$; $x = 3t + 1$; $y = t^5$; $\frac{\partial f}{\partial t}$.
- b) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $x = \sqrt{t}$; $y = \frac{1}{t}$; $\frac{\partial f}{\partial t}$
- c) $f(x, y) = 3x^5 + 2y^3$; $x = t^2 + s^4$; $y = 3ts$; $\frac{\partial f}{\partial t}$; $\frac{\partial f}{\partial s}$
- d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$; f_r , f_θ
- e) $f(x, y, z) = \cos(xyz^3)$; $x = \sin t + s^2$; $y = \cos t - s^2$; $z = \sqrt{ts}$; f_t , f_s
- f) $f(x, y, z) = e^{xy+z}$; $x = s + t$; $y = s - t$; $z = t^2$; f_s ; f_t

PROBLEMA 6.

Usando derivación implícita, calcular z_x, z_y si $z(x, y)$ viene dada por:

- a) $z^4 - x^5 y^7 - 1 = x + y$
- b) $z^5 x^3 + z^2 y^4 + y^3 + x^4 = xy$
- c) $e^{xyz} - z = 0$
- d) $x^2 - 2xy + 2xz - 3y^2 + z^2 = 21$
- e) $ze^{xz} - ye^{yz} + e^{yy} = 1$

PROBLEMA 7.

Hallar la derivada direccional de la función en el punto P en la dirección de v :

- a) $f(x, y) = 3x - 4xy + 5y$; $P(1, 2)$; $v = \frac{1}{2}(i + \sqrt{3}j)$
- b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $P(3, 4)$; $v = 3i - 4j$
- c) $f(x, y) = xy$; $P(2, 3)$; $v = i + j$
- d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$; $P(1, 1)$; $v = -j$
- e) $f(x, y) = e^x \sin y$; $P(1, \frac{\pi}{2})$; $v = -i$
- f) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$; $P(1, 1, 1)$; $v = 2i + j - k$
- g) $h(x, y, z) = x \arctg(yz)$; $P(4, 1, 1)$; $v = (1, 2, -1)$

PROBLEMA 8.

Hallar la derivada direccional de la función en el punto P en la dirección de Q :

- a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$; $P(3, 1)$; $Q(1, -1)$
- b) $f(x, y) = \cos(x + y)$; $P(0, \pi)$; $Q(\frac{\pi}{2}, 0)$
- c) $h(x, y, z) = \ln(x + y + z)$; $P(1, 0, 0)$; $Q(4, 3, 1)$
- d) $g(x, y, z) = xye^z$; $P(2, 4, 0)$; $Q(0, 0, 0)$

PROBLEMA 9.

Calcular el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto indicado:

- a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$; $P(4, 2)$
- b) $f(x, y) = y\sqrt{x}$; $P(4, 2)$
- c) $h(x, y) = y \cos(x - y)$; $P(0, \frac{\pi}{3})$
- d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $P(1, 4, 2)$
- e) $g(x, y, z) = xe^{yz}$; $P(2, 0, -4)$

PROBLEMA 10.

Encontrar los diferenciales totales de las siguientes funciones:

- a) $z = x^3 + x^2y + 2 - y^3$; d_z
- b) $z = (x - y)(x + y)^{\frac{1}{2}}$; d_z
- c) $w = xy^2z^3$; d_w
- d) $w = e^{xyz}$; d_w
- e) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; d_w

PROBLEMA 11. APLICACIONES DE DERIVADAS PARCIALES.

- 1.- Dada la función $z = f(x, y) = x^2y^2 - \ln(x^2 + y^2)$. Determine si se cumple:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^2 - 2$$

- 2.- Si $f(x, y) = x^2y - xy^2 + \ln(xy)$. Entonces $f_{xy} = f_{yx}$.

- 3.- Sea $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$. Verifique si se cumple $f_x + f_y = 1$.

- 4.- Dada la función $f(x, y) = \ln(3x + y^2)$. Verifique que $f_{xy} = f_{yx}$.

- 5.- Dada la función $f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$. Demuestre que $f_{xy} = f_{yx}$.

- 6.- Demuestre que si $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow x \cdot f_x + y \cdot f_y = 0$.

- 7.- Si $f(x, y) = 800\sqrt[3]{xy^2}$. Demuestre que $x \cdot f_x + y \cdot f_y = f(x, y)$.

- 8.- Si $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cdot \text{sen}(5z)$. Demuestre que $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

- 9.- Si $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$. Pruebe si se verifica $x \cdot f_x + y \cdot f_y = f(x, y)$.

- 10.- Dada la función $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2y^2 - 12$. Demuestre que:

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- 11.- Dada la función $f(x, y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$. Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- 12.- Sea $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = e^r \cos(s)$; $y = e^r \text{sen}(s)$. Demuestre que:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = e^r ; \frac{\partial f}{\partial s} = 0$$

13.- Si $w = f(u)$; $u = g(x, y) = \frac{x}{y}$, entonces $x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

14.- Dada $f(x, y) = e^{xy}$; $x = 3u + 2v$; $y = 4u - 2v$. Demuestre que:

$$\frac{1}{e^{xy}} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 2x + 5y$$

15.- Si $z = xy + y \ln(xy)$. Demuestre que $x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

16.- Si $u = f(x, y)$; $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$. Expresa $u_r^2 + \frac{1}{r^2} \cdot u_\theta^2$ en términos de x e y .

17.- Si $z = \ln(x^2 + y^2)$. Demuestre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

18.- Si $z = xy + xe^{\frac{1}{y}}$. Demuestre que: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

19.- Si $u = x^2 y + y^2 z + z^2 x$. Demuestre que: $u_x + u_y + u_z = (x + y + z)^2$.

20.- Calcule $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial s}$, si $w = e^{xy+z}$, donde $x = s + t$; $y = s - t$; $z = t^2$.

21.- Si $u = \frac{Ax^n + By^n}{Cx^2 + Dy^2}$, demostrar que: $x \cdot u_x + y \cdot u_y = (n - 2) \cdot u$.

PROBLEMA 12.

Determine los puntos máximos y mínimos o puntos silla si existen de las siguientes funciones:

- $f(x, y) = 2x^2 + 4x + y^2 + 6y$.
- $f(x, y) = -3x^2 - 5y^2 + 6x - 9y$.
- $f(x, y) = 4x^3 - 2x^2 y + y^2$.
- $f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$.
- $f(x, y) = e^x \cdot \cos y$.

PROBLEMA 13. APLICACIONES DE LOS VALORES EXTREMOS.

- Suponga que cuando la producción de una mercancía determinada requiere de x horas – máquinas y de y horas – hombre, el costo de producción está dado por $C(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$. Determine el número de horas – máquina y el número de horas – hombre necesarias para producir la mercancía a un costo mínimo.
- Una empresa produce x lavadoras e y secadoras a un costo de $C(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ unidades monetarias. Los ingresos son $I(x, y) = 2x + 3y$ unidades monetarias. Hallar la máxima utilidad.
NOTA: La utilidad se obtiene como $U(x, y) = I(x, y) - C(x, y)$.
- La función de producción para un fabricante está dada por $P(x, y) = 100\sqrt[4]{x^3 y}$, donde x representa las unidades de trabajo a 150 dólares la unidad e y representa las unidades de capital a 250 dólares por unidad. El costo total de trabajo y de capital se limita a 50.000 dólares. Halle el nivel de producción máxima de este fabricante.
- Un productor agrícola vende dos tipos de productos. Los ingresos anuales totales $I(x, y)$ en miles de dólares se comportan como una función del número de unidades vendidas dada por la expresión: $I(x, y) = 400x - 4x^2 + 1960y - 8y^2$, en donde x e y son respectivamente el número de unidades, expresadas en cientos vendidas de cada uno de los productos. El costo total $C(x, y)$ de producción de los productos es $C(x, y) = 100 + 2x^2 + 4y^2 + 2xy$. Determine el número de unidades de cada producto que se deben producir y vender con el fin de maximizar la utilidad.

PROBLEMA 14. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

1.- Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción dada:

a) $f(x, y) = xy$; s.a $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ s.a $xy = 1$.

c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ s.a $2x + y = 22$.

d) $f(x, y) = x^2 - y^2$ s.a $x^2 + y^2 = 4$.

e) $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$ s.a $x + y = 15$.