

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Ejercicios N° 4 de Mat 1502. Cálculo Uno
Segundo semestre 2000
Contenido:

Diferenciabilidad

Nombre:

Sección N° :

1. Mediante la definición, calcular las derivadas de las funciones siguientes, en los puntos que se indican:
 - (i) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ en $x = \frac{1}{2}$.
 - (iv) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ en $x = 0$.
 - (ii) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ en $x = 5$.
 - (v) $f(x) = e^{2x}$ en $x = x$.
 - (iii) $f(x) = \operatorname{tg} x$ en $x = \frac{\pi}{3}$.
 - (vi) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{1}{3}$ en $x_0 = 2$.
2. Demostrar que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.
3. Dar un ejemplo de una función:
 - (i) Continua y derivable en $x = 5$.
 - (ii) Continua pero no derivable en $x = 5$
4. Contestar las interrogantes:
 - (i) ¿Puede ser una función discontinua y derivable en $x = 5$?
 - (ii) ¿Puede ser una función discontinua y no derivable en $x = 5$?
5. Sabiendo que $g(x) = f(x+a)$ se pide $g'(x)$
6. Sabiendo que $g(x) = f(ax)$ se pide $g'(x)$
7. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola de ecuación $x^2 = 3y$ en $x = 3$.
8. ¿En qué punto de la curva de ecuación $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$ la tangente a ella es paralela a la recta de ecuación $y = 2x + 1$?
9. Dada la función

$$f(x) = \frac{2x\sqrt[5]{x^3}}{3x^2 - 1024},$$

encontrar la ecuación de la recta tangente a ella en el punto $x_0 = -32$.

10. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 15)^{\frac{2}{3}}},$$

en el punto $x_0 = -2$

11. Sean $0 < b \leq a$ y $0 < x < \pi$; utilizando derivación establecer que la función:

$$f(x) = \operatorname{Arccos} \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} - 2 \operatorname{Arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$$

es constante.

12. Derivar las funciones:

(i)

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

(viii)

$$y = \operatorname{Arctg} \left(\frac{x}{a} \operatorname{Arctg} \frac{x}{a} \right)$$

(ii)

$$y = \frac{(x^2 + 2)^2 (x^2 - 1)^2}{x(3x^4 + 2)}$$

(ix)

$$s = \frac{\operatorname{sen} t - t \cos t}{\cos t + t \operatorname{sen} t}$$

(iii)

$$y = \sqrt{1 - \sqrt{1 + x^2}}$$

(x)

$$s = \frac{e^t - 1}{e^{3t} + 1}$$

(iv)

$$y = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$$

(xi)

$$y = x^{\sqrt{x}}$$

(v)

$$y = \left(\frac{a - bx^n}{a + bx^n} \right)^m$$

(xiii)

$$y = 3x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{3}{x^{\frac{4}{3}}}$$

(vi)

$$y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

(xiv)

$$\rho = \frac{1}{a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta + c}$$

(vii)

$$y = \operatorname{Arcsen} \frac{a + b \cos x}{b + a \cos x}$$

(xv)

$$\rho = a \operatorname{sen} 3\theta$$

13. Si:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos^2 x} - \log \sqrt{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} \text{ y } g(x) = -3 \cos x$$

demostrar que:

$$f'(x) + \frac{1}{\cos^3 x} = \frac{2 \cos x f''(x)}{g'(x)}$$

14. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 7$ en el punto $P_0(4, -3)$.
15. ¿En qué puntos la curva de ecuación $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$, tiene rectas tangentes que pasan por el origen?

16. ¿Para qué valores de a , b y c los gráficos de las funciones:

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad , \quad g(x) = x^3 + cx \quad ,$$

tienen una recta tangente común en $P_0(2, 2)$?

17. Encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$ en:

(i) $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$

(ii) $8x^2 - 12xy + 17y^2 = 100$

(iii) $\mathfrak{C} : \begin{cases} x = h + a \cos t \\ y = k + a \sin t \end{cases}$

(iv) $\mathfrak{E} : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$

(v) $\mathfrak{H} : \begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \tan t \end{cases}$

(vi) $\mathfrak{P} : \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$

(vii)

$$\begin{cases} x = (a+b) \cos t - a \cos \frac{a+b}{a} t \\ y = (a+b) \sin t - a \sin \frac{a+b}{a} t \end{cases}$$

(viii)

$$\mathfrak{T} : \begin{cases} x = at - b \sin t \\ y = a - b \cos t \end{cases}$$

(ix)

$$\mathfrak{E} : \begin{cases} x = a \cos t + at \sin t \\ y = a \sin t - at \cos t \end{cases}$$

(x)

$$\mathfrak{A} : \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

18. Derivar ρ con respecto a θ , o sea, encontrar $\frac{d\rho}{d\theta}$ en:

(i) $\rho \cdot \theta = a$
(espiral hiperbólica)

(ii) $\rho = e^{a\theta}$
(espiral logarítmica)

(iii) $\rho^2 = a^2 \theta$
(espiral parabólica)

(iv) $\rho = 1 - 2\theta$
(espiral de Arquímedes)

(v) $\rho = \frac{2}{\theta - 1}$
(espiral hiperbólica)

(vi) $\rho = a \cos 3\theta$
(rosa de de tres pétalos)

(vii) $\rho^2 \cdot \theta = a^2$
(lituus)

(viii) $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$
(lemniscata)

(ix) $\rho = \frac{1}{3 \cos \theta + 4 \sin \theta + 7}$
(cónica)

(x) $\rho = a \sin \theta \cos^2 \theta$
(bifolium)

- | | |
|--|--|
| (xi) $\rho^2 \cos 2\theta = a^2$
(hipérbola) | (xvi) $\rho = \frac{a}{\cos \theta} + \frac{a}{\sin \theta}$
(cónica) |
| (xii) $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$
(parábola) | (xvii) $\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$
(elipse) |
| (xiii) $\rho = a(1 + \sec \theta)$
(concoide) | (xviii) $\rho = a(1 + \sin \theta)$
(cardioide) |
| (xiv) $\rho = a(1 + 2 \sec \theta)$
(concoide) | (xix) $\rho = e^{\cos \theta} - 2 \cos 4\theta + \sin^5 \frac{\theta}{12}$
(mariposa) |
| (xv) $\rho = a(2 + \sec \theta)$
(concoide) | (xx) $\rho = e^{\cos 2\theta} - \frac{3}{2} \cos 4\theta$
(mariposa) |

19. Una partícula se mueve de modo que en el tiempo t se encuentra sobre la curva:

$$\mathfrak{C} : \begin{cases} x &= 2 \cos t - \cos 2t \\ y &= 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

hallar su vector velocidad y la respectiva rapidez cuando $t = \frac{\pi}{2}$.

20. Demostrar que la recta tangente trazada en un punto P_0 cualquiera de la hipérbola de ecuación $xy = 1$ determina en el eje $\overrightarrow{OX}$ un punto A tal que el triángulo OAP_0 es isósceles.
21. Hallar el punto en que la recta tangente a la curva $y = x^3$ en $P_0(1, 1)$ vuelve a cortar a la curva.
22. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a la elipse de ecuación:

$$3x^2 + 5y^2 = 32,$$

en un punto cuya abscisa es igual a su ordenada.

23. Hallar un punto de la curva $xy - 5x^2 - 4 = 0$ donde la recta tangente tenga pendiente 1.
24. Demostrar que la ecuación diferencial:

$$(1 - x^2)y' - xy + 1 = 0,$$

se satisface tanto para $y = \frac{\text{Arccos } x}{\sqrt{1 - x^2}}$ como para $y = \frac{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

25. Demostrar que las funciones:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x} \quad \text{y} \quad g(x) = f\left(\frac{a+x}{1+ax}\right),$$

tienen la misma derivada.

26. Si:

$$x \sin y^2 + y \sin x^2 = xy \sin xy,$$

calcular $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$.

27. Dada la ecuación $y = x + \log y$, determinar los valores de y' e y'' .

28. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6 = 0 ,$$

trazadas desde el punto $P_0(-3, -7)$.

29. Derivar, aplicando derivación logarítmica:

(i)

$$y = x^3 \sqrt[5]{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}} \quad (\text{v})$$

(ii)

$$y = x^{x^x}$$

$$y = 3x \frac{\cos^2(\log(3x^5 + 10x^8))}{4e^{3x^3+2x} - 3x} \sec(3x^2+4)$$

(iii)

$$y = x^{\sin^2 x}$$

(vi)

(iv)

$$y = \frac{(3x-2)(2x-3)\cos x}{(5x+7)\log x}$$

$$y = \frac{(3x-2)^{41}(7x+4)^{23}\sqrt{3x^7+2x}}{\sqrt[3]{\cos^4(5x^2-1)+2} \cdot (2x^{10}+9)^{41}}$$

30. Utilizando diferenciales, calcular aproximadamente:

$$\operatorname{tg} 46^\circ \quad , \quad \sqrt[4]{80} \quad , \quad \log 0,99 \quad , \quad \operatorname{sen} 61^\circ$$

31. Sea $0 \in \operatorname{dom} f$, f derivable y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(i) \quad f \text{ par} \Rightarrow f^{(2n-1)}(0) = 0 .$$

$$(ii) \quad f \text{ impar} \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0 .$$

32. Trazar el gráfico aproximado de:

(iv)

(i)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2 \quad (\text{v})$$

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$$

(ii)

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1} \quad (\text{vi})$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$$

(iii)

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad (\text{vii})$$

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^3 - 4x^2 - x + 2}$$

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

33. Trazar el gráfico aproximado de:

$$f(x) = xe^{-x^2} .$$

34. Trazar un gráfico aproximado de:

$$f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{18-x^2} .$$

35. Calcular:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(a+h) - f(a)} - \frac{1}{hf'(a)} \right]$$

36. Si $f(x)$ es una función tal que $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^2 \left(|f(u) - f(v)| < (u - v)^2 \right)$, entonces $f(x)$ es constante.

37. Probar que $f(x) = x^3 - 3x + b$ no puede tener más de una raíz en $[-1, 1]$ cualquiera sea el valor de b .

38. Demostrar que:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^2 x < \sin x^2 .$$

39. Sea $f(x)$ una función tal que $f''(x) \geq 0$. Probar que :

$$\forall x_1 \in]a, b[, \forall x_2 \in]a, b[\left[x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right] .$$

40. Si la función $xf(x)$ es derivable en $x_0 \neq 0$ y $f(x)$ es continua en x_0 , mostrar que $f(x)$ tiene derivada en x_0 .

41. Mostrar que:

$$x^2 = x \sin x + \cos x ,$$

tiene exactamente dos raíces reales.

42. Una motonave, cuya capacidad es de 150 pasajeros, se desea arrendar para una excursión. El precio de un pasaje es de U\$ 3000 si van 100 pasajeros, pero la compañía reducir el precio de cada pasaje en U\$ 18 por cada pasaje vendido sobre 100. ¿Cuál es el número de pasajeros que optimiza los ingresos de la compañía?

43. Se quiere construir una caja en forma de paralelepípedo recto cortando un cuadrado de cada esquina de una pieza rectangular de cartón y doblándolos hasta formar la caja deseada. Si las dimensiones del cartón son 20 cm. por 30 cm. se desea encontrar las dimensiones de la caja más grande que puede construirse.

44. Un jardinero quiere construir y cercar un prado que tenga la forma de un sector circular. Si para cercarlo tiene 20 m. de alambre, ¿qué radio deberá tener el sector para que el prado sea lo más grande posible?

45. Hallar un punto sobre la recta de ecuación $y = x$ tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(0, c)$ sea mínima.

46. Un rayo de luz va de un punto A situado en un medio a un punto B situado en otro, estando los dos medios separados por una superficie plana. Si la rapidez de propagación en el primer medio es v_1 y en el segundo es v_2 , se desea hallar la trayectoria del rayo para que el tiempo de propagación de A a B sea mínimo.

47. En la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

inscribir un rectángulo con sus lados paralelos a los ejes de la elipse, de modo que su área sea máxima.

48. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio R .

49. Hallar las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio R .
50. Hallar un punto sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(2a, 0)$ y $B(0, 2a)$ sea lo más pequeña posible.
51. Se desea construir una tienda de campaña en forma de pirámide regular cuadrangular. Para una superficie lateral dada hallar la razón de su altura a una arista basal cuando el aire contenido dentro de la tienda es máximo.
52. Un reloj de arena se construye girando la curva $y = e^{2x}$ alrededor de la recta de ecuación $y = x$. Determinar el valor de la garganta del reloj.
53. La sección transversal de una canaleta tiene forma de trapecio. Si el área de la sección del agua que lleva es S y la profundidad es h , ¿cuál deberá ser la inclinación de los costados de la canaleta para que el perímetro mojado sea mínimo?
54. Dada la parábola de ecuación $x^2 = 4cy$ y el punto fijo $P_0(a, b)$ tal que $a^2 \leq 4bc$, se consideran las cuerdas de la parábola que pasan por ese punto fijo. Hallar entre ellas la de mínima proyección sobre el eje $\vec{OX}$. Calcular esa longitud mínima.
55. Una ventana tiene forma de rectángulo terminado en un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. La porción rectangular ha de ser de cristal transparente y la parte circular de cristal de color que admite sólo la mitad de la luz por metro cuadrado que el cristal transparente. El perímetro total de la ventana es el valor fijo de p metros. Hallar las dimensiones de la ventana que deja pasar la mayor cantidad de luz.
56. Las ecuaciones paramétricas de un punto móvil son, en función del tiempo t , las siguientes:

$$\mathfrak{C} : \begin{cases} x &= a \cos kt \\ y &= b \sin kt \end{cases}$$

donde a, b y k son constantes y $a > b$. Demostrar que la trayectoria es una elipse. Hallar el vector velocidad del punto en su trayectoria y su respectiva rapidez. Encontrar cuándo la rapidez es máxima y cuando es mínima.

57. Un camión deberá recorrer 300 km. con rapidez constante de $v \left[\frac{km.}{h} \right]$. El combustible cuesta \$ 120 el litro y el consumo es de $\left(\frac{v^2}{100} - 4 \right)$ litros por hora. Las leyes del tránsito dicen que v debe estar entre 30 y 100 $\left[\frac{km.}{h} \right]$. Si los costos fijos del camión (conductor, mantención y otros gastos) son de \$ 8670 por cada 4 horas de recorrido se pide determinar la rapidez más económica y el costo total del viaje. ¿Cambia la respuesta si las leyes del tránsito dijeran que v debe estar entre 50 y 80 $\left[\frac{km.}{h} \right]$?
58. Siendo $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, demostrar que:

$$\exists c \in]a, b[\left(\frac{\sin 2b - \sin 2a}{\cos 2a - \cos 2b} = \cot 2c \right).$$

59. Calcular los siguientes límites, sabiendo que $a, b \in \mathbb{R}^+$:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx},$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x^2 + x - 2},$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2},$$

(vii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \operatorname{sen} x^2},$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2},$$

(viii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{1 - \cos x},$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{Arctg} x},$$

(ix)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsen} 2x - 2 \operatorname{Arcsen} x}{x^3},$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}, \quad (b \neq 1),$$

(x)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}.$$

60. Calcular los siguientes límites:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x},$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2^x)^{\operatorname{sen} x},$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right),$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sec x}{x^3},$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

(vii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sec x}{x^3},$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} \right),$$

(viii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}.$$

61. Calcular los siguientes límites, sabiendo que $a, b \in \mathbb{R}^+$:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x - 1},$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{Arctg} \frac{1}{x}},$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(a \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{x}}{a} - b \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{x}}{b} \right),$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x},$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{1000}},$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(a + be^x)}{\sqrt{a + bx^2}},$$

- (vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} \right),$ (xiv) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right),$
- (viii) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\log (\operatorname{sen} x)}{\log (\operatorname{sen} 2x)},$ (xv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}),$
- (ix) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\log(1-2x)}{\operatorname{tg} \pi x},$ (xvi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\log x}{(1+x)^2} - \log \left(\frac{x}{1+x} \right) \right],$
- (x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b}, \quad (a > 1),$ (xvii) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}},$
- (xi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x}},$ (xviii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{Arcsen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}},$
- (xii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 5}{\sec x + 4},$ (xix) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\log(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)} \right).$
- (xiii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$