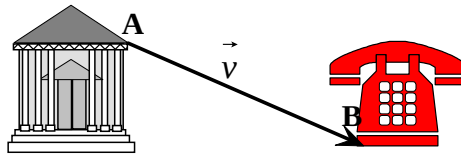


VECTORES EN EL ESPACIO

Vector fijo.

Es un segmento orientado. Lo representamos por $\overrightarrow{AB}$ o por $\vec{v}$. El punto A es el origen y el punto B el extremo. Mientras no preste confusión el vector $\vec{v}$ podemos expresarlo simplemente por v .

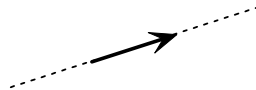


Características de un vector.

Módulo

Es la longitud del vector. Lo representamos por $\|\overrightarrow{AB}\|$ o $\|\vec{v}\|$. Las barras verticales pueden ser también sencillas.

Dirección



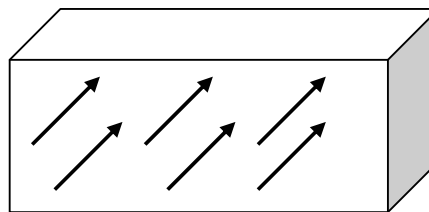
Es la dirección de la recta que lo contiene. Si dos vectores son paralelos, tienen la misma dirección.

Sentido

Es el que va del origen al extremo. Lo representamos por la punta de la flecha. Una dirección tiene dos sentidos.

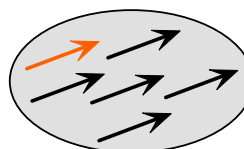
Vectores equipolentes

Son aquellos que tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido.



Vector libre

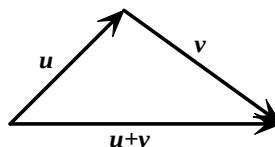
Es el conjunto formado por un vector fijo y todos los vectores equipolentes a él. Cada uno de los vectores fijos es un representante.



Suma geométrica de vectores

Para sumar dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, podemos hacerlo de dos maneras:

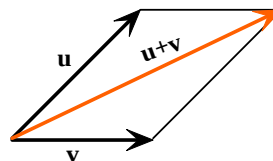
I. Desde un punto cualquiera del plano colocamos un vector equipolente a $\mathbf{u}$ y, a partir del extremo de este, colocamos otro vector equipolente a $\mathbf{v}$ de manera que coincida el extremo del primero con el origen del segundo.



La suma es el vector que tiene como origen el origen del primero y como extremo el extremo del segundo.

II. Ley del paralelogramo:

Formamos un paralelogramo con dos vectores equipolentes a los dados de forma que coincidan los orígenes y la suma es la diagonal del paralelogramo tomando como origen el origen de los vectores equipolentes elegidos.



Producto geométrico de un vector por un número real

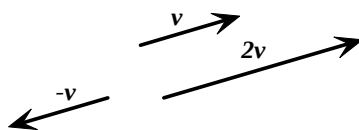
El producto de un vector $\mathbf{v}$ por un número real k es otro vector que expresaremos por $k\mathbf{v}$ y que tiene:

Dirección: la misma que $\mathbf{v}$.

Sentido: el mismo que $\mathbf{v}$ si k es positivo y sentido contrario si k es negativo.

Módulo: el producto del módulo de $\mathbf{v}$ por el valor absoluto de k .

$$\|k\mathbf{v}\| = |k| \cdot \|\mathbf{v}\|$$



Combinación lineal de vectores

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, diremos que el vector $\vec{v}$ es combinación lineal de ellos, si existen tres números reales α , β y λ tales que $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \lambda\vec{c}$

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, son linealmente independientes, si la relación $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{v}_n$, sólo se verifica cuando todos los coeficientes son nulos, es decir, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

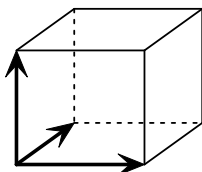
En el espacio, el máximo número de vectores linealmente independientes que pueden existir es tres.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$, son linealmente dependientes, si se pueden expresar en la forma $\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \dots + \lambda_n.v_n = 0$ y existe algún $\lambda_i \neq 0$

Base

Un conjunto de vectores del espacio son coplanarios si al tomar representantes con el mismo origen, quedan todos situados en el mismo plano.

Tres vectores del espacio, no coplanarios, forman una base porque cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos.



Base ortogonal

Es aquella en la que los vectores son perpendiculares dos a dos.

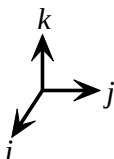
Base ortonormal. (base canónica del espacio)

Es la formada por tres vectores perpendiculares dos a dos y de módulo unidad.

Se expresa por $B = \{i, j, k\}$.

$$\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1$$

$$i \perp j; j \perp k; i \perp k$$



Sistema de referencia en el espacio

Es el conjunto formado por:

I. Un punto fijo **O** del espacio, llamado origen.

II. Una base cualquiera.

Tomando la base canónica $B = \{i, j, k\}$ como base habitual, un sistema de referencia en el espacio, queda expresado en la forma siguiente: $R = \{O, \{i, j, k\}\}$

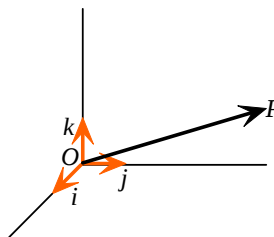
Dado un sistema de referencia, a cada punto **P** del espacio se le asocia el vector $\overrightarrow{OP}$ que recibe el nombre de vector de posición.

Expresando el vector $\overrightarrow{OP}$ como combinación lineal de los vectores que forman la base, existen tres números reales x, y, z tales

$$\text{que } \overrightarrow{OP} = x.i + y.j + z.k.$$

Los números x, y, z reciben el nombre de coordenadas del vector y dicho vector se puede expresar simplemente así:

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$



Los vectores **i**, **j** y **k** también se pueden expresar como combinación lineal de ellos mismos:

$$i = 1.i + 0.j + 0.k = (1,0,0)$$

$$j = 0.i + 1.j + 0.k = (0,1,0)$$

$$k = 0.i + 0.j + 1.k = (0,0,1)$$

Suma analítica de vectores

Para sumar dos vectores analíticamente, sumamos cada coordenada del primer vector, por la correspondiente coordenada del segundo vector.

Ejemplo: Si $u = 2i + 3j - 5k = (2,3,-5)$ y $v = -i + 4j - 6k = (-1,4,-6)$

$$u + v = i + 7j - 11k = (1,7,-11)$$

Producto analítico de un vector por un número real

Para multiplicar un vector por un número real, se multiplica cada una de las coordenadas del vector por dicho número.

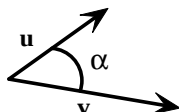
Ejemplo: Siendo $u = -3i + 2j - k = (-3,2,-1)$, el producto de u por 3, será:

$$3u = 3.(-3i + 2j - k) = -9i + 6j - 3k = (-9,6,-3)$$

Producto escalar de dos vectores

Es el número que se obtiene al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$u.v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos \alpha$$



El producto escalar es conmutativo

Si los vectores vienen expresados en coordenadas de una base ortonormal, el producto escalar adopta la siguiente forma:

$$u = x_1i + y_1j + z_1k; \quad v = x_2i + y_2j + z_2k;$$

$$u.v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

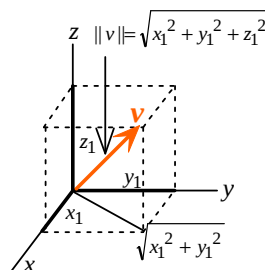
teniendo en cuenta que $i.i = j.j = k.k = 1$ y que $i.j = j.i = i.k = k.i = j.k = k.j = 0$ ($\cos 0^\circ = 1$; $\cos 90^\circ = 0$)

Ejemplo: Si $u = 2i + 3j - 5k = (2,3,-5)$ y $v = -i + 4j - 6k = (-1,4,-6)$,

$$u.v = -2 + 12 + 30 = 40$$

Módulo de un vector

Observando la figura, el módulo del vector v , se obtiene aplicando dos veces el teorema de Pitágoras.



$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Si calculamos el producto escalar de un vector por sí mismo, se obtiene:
 $v \cdot v = \|v\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha = \|v\| \cdot \|v\| \cdot 1 = \|v\|^2$ y entonces, $\|v\|^2 = v \cdot v$, es decir, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

El módulo de un vector es la raíz cuadrada positiva del producto escalar de un vector por sí mismo.

Ángulo de dos vectores

Se obtiene aplicando la fórmula de definición de producto escalar.

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Ejemplo:

Halla el ángulo que forman los vectores $u = (3, 2, 6)$ y $v = (-4, 5, 1)$

$$u \cdot v = -12 + 10 + 6 = 4$$

$$\|u\| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7; \quad \|v\| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42}$$

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{4}{7\sqrt{42}}$$

Buscando con la calculadora el ángulo cuyo coseno es $\frac{4}{7\sqrt{42}}$, se obtiene

$$\alpha = 84,94^\circ$$

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores u y v es otro vector $u \times v$ definido de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } u &= x_1 i + y_1 j + z_1 k = (x_1, y_1, z_1) \\ \text{y } v &= x_2 i + y_2 j + z_2 k = (x_2, y_2, z_2) \end{aligned} \quad u \times v = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

El vector $u \times v$ tiene las siguientes características:

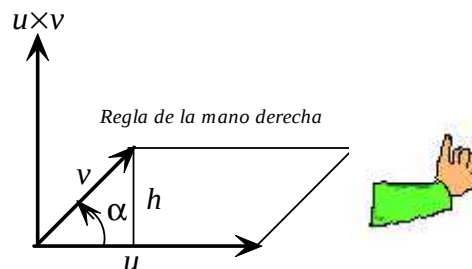
Módulo: El producto de los módulos por el seno del ángulo que forman.

$$\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin \alpha$$

Dirección: Perpendicular al plano determinado por los vectores u y v .

Sentido: Viene dada por la regla de la mano derecha: Si giramos con la mano el primer vector hasta hacerle coincidir con el segundo por el camino más corto, el dedo pulgar señala el sentido del vector $u \times v$.

El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo definido por los dos vectores.

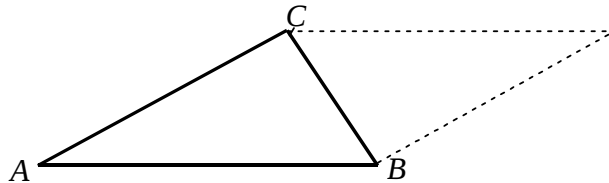


Como $h = \|v\| \operatorname{sen} \alpha$

$\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen} \alpha = \|u\| \cdot h = \text{área del paralelogramo.}$

Área del triángulo:

Dado el triángulo de vértices A, B y C, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinan un paralelogramo cuya área es el módulo del producto vectorial.



Como el triángulo es la mitad del paralelogramo, su área será:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}$$

Propiedades del producto vectorial

El producto vectorial es anticonmutativo: $u \times v = -v \times u$

El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo, es decir,

si $u \parallel v \Leftrightarrow u \times v = 0$

El producto $u \times v$ es perpendicular a cada uno de los vectores u y v , es decir,

$(u \times v) \cdot u = 0$; $(u \times v) \cdot v = 0$

Producto mixto

Producto mixto de tres vectores u , v y w es el número que se obtiene al realizar el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos. Se expresa por $[u, v, w]$. Por tanto, $[u, v, w] = u \cdot (v \times w)$

Si $u = x_1 i + y_1 j + z_1 k = (x_1, y_1, z_1)$

$v = x_2 i + y_2 j + z_2 k = (x_2, y_2, z_2)$

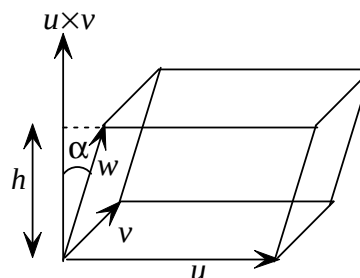
y $w = x_3 i + y_3 j + z_3 k = (x_3, y_3, z_3)$

el producto mixto viene definido por el valor del siguiente determinante:

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica:

El producto mixto de u , v y w , en valor absoluto, es el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores.



$$w.(u \times v) = \|w\| \cdot \|(u \times v)\| \cdot \cos \alpha = \|(u \times v)\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha,$$

$\|(u \times v)\|$ es el área de la base de paralelepípedo ;

$$\|w\| \cdot |\cos \alpha| = h = \text{altura}$$

Por tanto, $|w.(u \times v)| = \text{área de la base} \times \text{altura} = \text{Volumen del paralelepípedo}.$

Ejemplos:

1. Calcula el producto vectorial de los vectores $u = (1, 7, -3)$ y $v = (-5, 0, 4)$

Conviene colocar el primer vector y debajo de este el segundo:

$$\begin{aligned} u &= (1, 7, -3) \\ v &= (-5, 0, 4) \end{aligned}$$

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \right) = (28, 11, 35)$$

2. Dados los vectores $u = (3, 2, 5)$ y $v = (4, 1, 6)$, halla un vector perpendicular a ambos y el área del paralelogramo que determinan.

Un vector perpendicular a ambos es el producto vectorial:

$$\begin{aligned} u &= (3, 2, 5) \\ v &= (4, 1, 6) \end{aligned}$$

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (7, 2, -5)$$

El producto vectorial puede obtenerse también desarrollando el siguiente determinante:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12i + 20j + 3k - 8k - 5i - 18j = 7i + 2j - 5k = (7, 2, -5)$$

El área del paralelogramo que determinan es el módulo del producto vectorial:

$$\text{Área} = \|u \times v\| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78}$$

$$\text{Área} = \sqrt{78} u^2$$

Ejercicios resueltos

1.- Determina el valor de t para que los vectores de coordenadas $(1, 1, t)$, $(0, t, 1-t)$ y $(1, -2, t)$ sean linealmente dependientes).

Solución:

Si son linealmente dependientes, uno de ellos, se podrá expresar como combinación lineal de los otros restantes, por tanto,

$$(1, 1, t) = \alpha(0, t, 1-t) + \beta(1, -2, t)$$

Y de aquí se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \beta = 1 \\ \alpha t - 2\beta = 1 \\ \alpha(1-t) + \beta t = t \end{array} \right\} \text{ y de aquí resulta } \left. \begin{array}{l} \alpha t = 3 \\ \alpha(1-t) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Si } \alpha(1-t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ó } 1-t = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Y si } t = 1, \alpha = 3$$

La relación de dependencia es $(1,1,1) = 3 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (1,-2,1)$, es decir,

$$(1,1,1) - 3 \cdot (0,1,0) - 1 \cdot (1,-2,1) = (0,0,0)$$

2.- ¿Puede haber dos vectores u y v tales que $u \cdot v = -3$, $\|u\| = 1$ y $\|v\| = 2$?

Solución:

Si α es el ángulo que forman, de la definición de producto escalar, se obtiene:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Y entonces, } -3 = 1 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -1,5$$

Dicha relación es imposible porque $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

3.- Halla el valor de a para que los vectores $u = (-2,1,5)$ y $v = (a,2,6)$, sean perpendiculares.

Solución:

Para que sean perpendiculares, el producto escalar ha de ser nulo, por tanto,

$$(-2,1,5) \cdot (a,2,6) = 0 \Rightarrow -2a + 2 + 30 = 0 \text{ y de aquí se obtiene } a = 16$$

4.- Halla un vector w cuyo módulo sea 4 y además perpendicular a $u = (2,0,1)$ y $v = (3,-1,2)$

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a cada uno de ellos,

$$\text{Por tanto, } u \times v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (1, -1, -2)$$

Lo dividimos por su módulo para obtener un vector de módulo unidad:

$u \times v = (1, -1, -2)$ es perpendicular a u y a v .

$$\|u \times v\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}; \quad \frac{u \times v}{\|u \times v\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

El vector unitario obtenido lo multiplicamos por 4 y obtenemos el vector buscado:

$$w = 4 \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{-2\sqrt{6}}{3}, \frac{-4\sqrt{6}}{3} \right)$$

5.- Comprueba si los vectores (1, 2, 3), (4, 5, 6) y (7, 8, 9) de R^3 son linealmente independientes.

Solución:

Una forma de verlo es formar una matriz y aplicar la reducción de Gauss. Si se llega a una matriz escalonada, es decir, que tenga por debajo de la diagonal principal todos ceros pero que ninguna fila de la matriz sea nula, entonces los vectores dados son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ninguna fila es nula y por debajo de la diagonal principal todos son ceros. Los vectores dados son linealmente independientes.

Otra forma de verlo es hallar el determinante de la matriz y si es distinto de cero, los vectores son linealmente independientes.

6.- Consideremos el conjunto de los polinomios de grado dos con una indeterminada. Dichos polinomios pueden ser considerados como vectores. Estudia si los polinomios $A(x) = 1 - x + 4x^2$; $B(x) = 3 + 6x + 2x^2$ y $C(x) = 2 + 10x - 4x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución:

Los polinomios dados podemos expresarlos en la forma siguiente:

$A = (1, -1, 4)$, $B = (3, 6, 2)$ y $C = (2, 10, -4)$

Si aplicamos el método de Gauss, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 9 & -10 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 36 & -40 \\ 0 & 36 & -36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 0 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Para pasar de la segunda a la tercera matriz, la segunda fila la hemos multiplicado 4 y la tercera fila por 3.

Hemos llegado a tres filas, ninguna de ellas nulas, y todos ceros por debajo de la diagonal principal.

Los polinomios dados son linealmente independientes.

7.- El vector $v = (1, 3, -2)$ está dado en la base canónica. Halla sus componentes respecto de la base $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 2, 3)\}$

Solución:

$$(1,3,-2) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \lambda(0,2,3)$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\lambda = 3 \\ \alpha + \beta + 3\lambda = -2 \end{array} \right\}$$

Sumando la 1ª ecuación, cambiada de signo a las otras dos,

$$\left. \begin{array}{l} -\beta + 2\lambda = 2 \\ 3\lambda = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = -1 \text{ y entonces } \beta = -4$$

Si el valor de β lo llevamos a la 1ª ecuación del sistema inicial, $\alpha - 4 = 1 \Rightarrow \alpha = 5$

El vector v queda expresado en función de los elementos que forman la base en la forma siguiente: $(1,3,-2) = 5(1,1,1) - 4(1,0,1) - 1(0,2,3)$

8.- Estudia si los vectores $(1, 1, 0)$, $(0,1, 1)$ y $(2, 1, -1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$

Solución:

Hemos de saber que:

- Dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$ forman una base de $\mathbb{R}^2$
- Tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.
- Etc.

En nuestro caso si los vectores dados son linealmente independientes formarán una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a una matriz con la tercera fila nula, los vectores dados son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de $\mathbb{R}^3$

9.- Nos dan los vectores $a = (1,0,-1)$, $b = (0,2,-1)$ y $c = (2,0,0)$. Halla:

- a) Valor absoluto del producto mixto de a , b y c y da su significado geométrico.
- b) Ángulo que forman b y c .
- c) Razona si $\{a, b, c\}$ forman una base y, en caso afirmativo, halla las coordenadas del vector $u = (1,-2,0)$ en dicha base.

Solución

$$a) [a, b, c] = a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(0 - (-2)) = 4$$

Valor absoluto del producto mixto es $|4| = 4$

El valor absoluto del producto mixto es el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores.

b) Para calcular el ángulo que forman b y c aplicamos la definición de producto escalar: $b \cdot c = \|b\| \cdot \|c\| \cdot \cos \alpha$ y de aquí

$$\cos \alpha = \frac{b \cdot c}{\|b\| \cdot \|c\|} = \frac{0.2 + 2.0 + (-1).0}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{0}{\sqrt{5} \cdot 2} = 0$$

Si $\cos \alpha = 0$, entonces $\alpha = 90^\circ$

c) Podemos hacerlo por el método de Gauss o bien por determinantes. Si el determinante es distinto de cero, los vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(0 - (-2)) = 4 \neq 0$$

Y como estamos en $\mathbb{R}^3$ los vectores forman una base. Esto significa que cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos. Si queremos hallar las coordenadas de $u = (1, -2, 0)$ respecto de la base, escribimos:

$(1, -2, 0) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 2, -1) + \lambda(2, 0, 0)$ y ello nos lleva al sistema siguiente

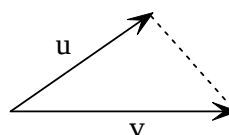
$$\left. \begin{array}{l} \alpha + 2\lambda = 1 \\ 2\beta = -2 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = -1; \alpha = 1; \lambda = 0 \text{ que son las coordenadas buscadas.}$$

10.- dados los vectores $u = (3, 2, 5)$ y $v = (4, 1, 6)$ halla el área del triángulo que determinan.

Solución:

El área del triángulo determinado por dos vectores viene dada por la fórmula siguiente:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$



Hemos de hallar, por tanto, el producto vectorial de los dos vectores dados:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 7i + 2j - 5k = (7, 2, -5)$$

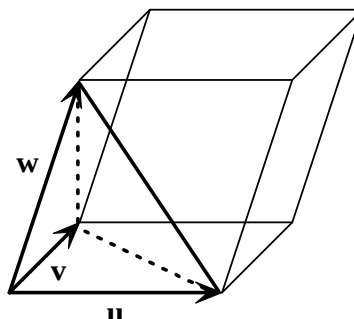
$$\|u \times v\| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|u \times v\| = \frac{\sqrt{78}}{2}$$

11.- Dados los vectores $u = (3, -2, 5)$, $v = (-4, 1, 6)$ y $w = (2, 0, -1)$, halla el volumen del tetraedro que determinan.

Solución:

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del producto mixto tomado en valor absoluto.



$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 24 - 10 + 8 = -29$$

$$\text{Volumen}_{(\text{tetraedro})} = \frac{1}{6} |-29| = \frac{29}{6}$$

12.- Halla un vector unitario que tenga la misma dirección que $u = (1, 1, -2)$

Solución:

Dado un vector u , entonces el vector $\frac{u}{\|u\|}$ es unitario.

Módulo de u :

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

Por tanto, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ será unitario (modulo 1) y de la misma dirección que u .

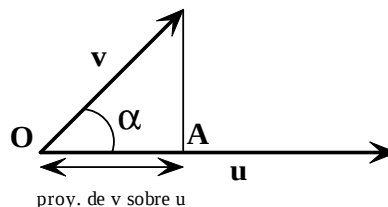
13.- Prueba que el producto escalar de dos vectores u y v , es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre el.

Solución:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$

$$OA = \|v\| \cdot \cos \alpha = \text{proy. de } v \text{ sobre } u$$

$$\text{luego } u \cdot v = \|u\| \cdot OA$$

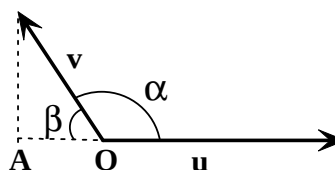


En el caso de que el ángulo sea obtuso se obtiene :

Los ángulos α y β son suplementarios
por tanto, $\cos \alpha = -\cos \beta$

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$

$\|v\| \cdot \cos \alpha = -\|v\| \cos \beta = -OA$
donde OA es la proyección de v sobre u



es decir, $u \cdot v = -\|u\| \cdot OA$

Observación importante:

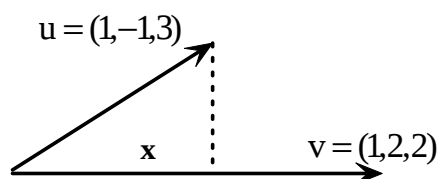
Cuando el producto escalar es positivo, el ángulo es agudo
Cuando el producto es negativo, el ángulo es obtuso.

14.- Halla la proyección ortogonal del vector $u = (1, -1, 3)$ sobre $v = (1, 2, 2)$

Solución:

$$u \cdot v = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 5$$

El ángulo que forman los vectores es agudo



$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$u \cdot v = \|v\| \cdot x \Rightarrow 5 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (que es la medida del segmento x)}$$

Dividimos el vector v por su módulo a fin de obtener un vector de la misma dirección y sentido pero de módulo unidad:

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3; \quad \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Finalmente, el vector unitario obtenido lo multiplicamos por $\frac{5}{3}$:

$$\text{proy. de } u \text{ sobre } v = \vec{x} = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

Ejercicios propuestos

1.- Determinar los valores del parámetro **a**, para los cuales forman base de $\mathbb{R}^3$ los vectores $(a,1,-2)$, $(1,a,2)$ y $(2a,1,0)$

Sol. Para todo valor de a distinto de $\frac{1}{2}$ y de -1

2.- En el conjunto $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores siguientes:

$$u = (1,2,-1), v = (3,-2,0) \text{ y } w = (-7,10,-2)$$

Prueba que son linealmente dependientes y encuentra la relación de dependencia.

Sol. Basta comprobar que el determinante es nulo

$$2(1,2,-1) - 3(3,-2,0) - (-7,10,-2) = (0,0,0)$$

3.- Sean los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $u = (1,2,-1)$, $v = (1,-1,1)$ y $w = (2,5a,-3a)$

Determina el valor numérico del parámetro a para que sean linealmente dependientes y encuentra una relación de dependencia.

Sol. $a = 2$

$$4(1,2,-1) - 2(1,-1,1) - 2(2,10,-6) = (0,0,0)$$

4.- Dados los vectores $A = (a,8,4)$, $B = (-1,2,0)$ y $C = (0,1,2)$. Halla los valores de **a** para que **A** se pueda expresar como combinación lineal de **B** y de **C**

Sol. $a = -3$

5.- Dados los vectores $u = (1,2,3)$ y $v = (1,-1,1)$, se pide:

- ¿Son linealmente independientes?
- Escribe un vector w tal que u , v y w sean linealmente independientes.
- Encuentra un vector t , tal que u , v y t sean linealmente dependientes.

Sol.

- Son l.i. porque sus coordenadas no son proporcionales
- Puede ser, por ejemplo, $w = (0,0,1)$. Aplíquese primero el método de Gauss
- Basta tomar una combinación lineal de los vectores dados.

6.- Prueba que los vectores $a = (1,1,-1)$, $b = (1,-1,1)$ y $c = (1,1,1)$ son una base de $\mathbb{R}^3$

Halla las componentes del vector $x = (-7,9,15)$ en esta base.

Sol. Como son tres vectores, basta probar que son l.i. (determinante $\neq 0$)

$$x = -11a - 8b + 12c$$

7.- Determina la expresión general de los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son combinación lineal de los vectores $(1,2,-1)$ y $((4,1,1)$

Sol. $(\alpha + 4\beta, 2\alpha + \beta, -\alpha + \beta)$

8.- Los vectores $a = -i + 2k$, $b = 2i + j - k$ y $c = i + 2j + 2k$ están expresados en una base ortonormal. Calcula: $a \times b$; $a \times (c \times a)$ y $a \cdot (a \times b)$

Sol. $a \times b = -2i + 5j - k$; $a \times (c \times a) = 8i + 10j + 4k$; $a \cdot (a \times b) = 0$

9.- Sean u y v tales que $\|u\| = 2$, $\|v\| = 1$ y que forman un ángulo de 45° . Calcula λ de modo que $u + \lambda v$ sea perpendicular a u

Sol. $\lambda = -2\sqrt{2}$

10.- dados los vectores $v = (2, 5, -1)$ y $u = (1, 0, 3)$, halla la proyección ortogonal de v sobre u .

Sol. $x = \left(\frac{-1}{10}, 0, \frac{-3}{10} \right)$

11.- Dados los vectores $a = (1, 2, 1)$, $b = (3, 1, -2)$ y $c = (4, -1, 0)$, determina:

Su producto mixto

Volumen del paralelepípedo determinado por ellos.

Sol. $[a, b, c] = -25$

$V = 25u^3$