

GUIA LIMITES Y CONTINUIDAD

CALCULO

2004-02

Viviana Barile M

P1.- Encuentre una vecindad de 1, de modo que la función $f(x) = 2x + 3$ difiera, en valor absoluto, de 5 en menos de 0.001. Verifíquelo para un punto cualquiera de la vecindad hallada.

P2.- ¿Qué significa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$?

P3.- Pruebe que, en base a la definición $\varepsilon - \delta$:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 3 = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} 3x - 1 = -4$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 = 9$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

P4.- Suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe; si $f(x) \geq 0; \forall x \in V_\varepsilon(a), \forall \varepsilon > 0$, pruebe que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$. Indicación: Use demostración por contradicción y tome $\varepsilon = -\frac{L}{2}$.

P5.- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = n; \lim_{x \rightarrow a} h(x) = m$, calcule $\lim_{x \rightarrow a} (3f + 2g - 5r)$

P6.- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ y se tiene que $f(x) \geq g(x); \forall x$, pruebe que $L \geq G$.
Indicación: Use el problema 4.

P7.- Calcular los siguientes límites (si es que existen):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{x - \sqrt{x+6}}$

h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 5x + 3}$

P8.- Determine si existen los límites de las siguientes funciones, cuando x tiende al x_0 indicado:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 1$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \text{ en } x_0 = -1 \text{ y } x_0 = 1$$

P9 Calcule los siguientes limites

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2}{x^2 - x}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 2}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2} - 2}$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x}$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{28-x} - 3}{x-1}$$

$$\text{p) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\sin(4x)}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^3 + 1}{x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{x-a}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x}$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 2^{2x}}{4x}$$

$$\text{q) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin(2x)}$$

P 10 Calcular los siguientes limites

$$1.- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} \quad \text{R: } \frac{-1}{6}$$

$$2.- \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} \quad \text{R: } \frac{5}{3}$$

$$3.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \quad \text{R: } \frac{-1}{3}$$

$$4.- \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+x}) - 1}{(\sqrt[3]{1+x}) - 1} \quad \text{R: } \frac{3}{2}$$

$$5.- \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^3 + 2}$$

$$6.- \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x + 3}{x + 2}$$

$$7.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x + 4}$$

$$8.- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 0.5^x}{0.3^{x+1} + 5} \quad \text{R: } \frac{3}{5}$$

$$10.- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 + \frac{x}{x+1}}{2 + \frac{1}{x}} \quad \mathbb{R} : 5$$

$$11.- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x + 1}{7x^3 + 1} \quad \mathbb{R} : 0$$

$$12 \quad \lim_{x \rightarrow 1} x - \frac{x^2}{x+1} \quad \mathbb{R} : \frac{1}{2}$$

$$13 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} \quad \mathbb{R} : 0$$

$$14 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x \quad \mathbb{R} : e^{-2}$$

$$15 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1} \quad \mathbb{R} : \frac{1}{4}$$

$$16 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}} \quad \mathbb{R} : 0$$

$$17 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+5x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad \mathbb{R} : e^3$$

$$18 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} \right)^x \quad \mathbb{R} : e^8$$

$$19 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \mathbb{R} : 1$$

$$20 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \quad \mathbb{R} : 1$$

$$21 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+6^x)}{\ln(1+3^x)} \quad \mathbb{R} : \frac{\ln 6}{\ln 3}$$

$$22 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) \quad \mathbb{R} : 1$$

$$23 \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \quad \mathbb{R} : e^{-1}$$

$$24 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \mathbb{R} : 2$$

$$25 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 3x + x} \quad \mathbb{R} : 3$$

$$26 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad \mathbb{R} : \frac{1}{2}$$

$$27 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1-x} \quad \mathbb{R} : \frac{\pi}{2}$$

$$28 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x \quad \mathbb{R} : \frac{2}{\pi}$$

$$29 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-\sqrt{x}} \quad \mathbb{R} : 2\pi$$

$$30 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+\tan x}}{x} \quad \mathbb{R} : 0$$

$$31 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} \quad \mathbb{R} : -3$$

$$32 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x} \quad \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{3}}$$

P11 Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & x \neq 4 \\ 4 & x = 4 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & x \neq 4 \\ 5 & x = 4 \end{cases}$$

- ♦ Analizar su discontinuidad en $x = 4$
- ♦ Construya el gráfico para cada función
- ♦ Indique el carácter de la discontinuidad en $x = 4$

P12 Determinar el valor del parámetro M de modo que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 + 4x + M & \text{si } |x-2| \geq 1 \end{cases}$$

P13.- Determine el o los valores de los parámetros indicados en cada caso para la función dada sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{Si } x \neq 2 \\ a & \text{Si } x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f(x) &= \begin{cases} ax+5 & \text{Si } x \leq 2 \\ 1+2ax & \text{Si } x > 2 \end{cases} \\ \text{c)} \quad f(x) &= \begin{cases} ax+b & \text{Si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{Si } -1 < x \leq 3 \\ -ax+b & \text{Si } x > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

P14.- Calcule los siguientes límites:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x}$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \quad \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} \quad \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x}$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \quad \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x^2}$$

P15.- Calcular:

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2} & \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \left(\frac{5x^2 - 1}{x^2} \right) \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2} & \quad \text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4x-1}} \end{aligned}$$

P16.- Calcule, si existen los siguientes límites

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \cos ec \Pi x$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \operatorname{sen} 2x}{2x + 3 \operatorname{sen} 4x} \quad \text{e)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{|x - 4|}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$$

P17.- Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ que hace a la siguiente función continua en cero.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 - a^2 x^2) + \ln(1 + ax)^{-1}}{x} & \text{Si } x < 0 \\ x^2 - 3 & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$

P18.- En los siguientes casos, determine encuentre en que punto la función es discontinua y repare, si es posible, tal discontinuidad.

$$a) f(x) = \frac{3x+3}{x+1} \quad b) f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$c) f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad d) f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

$$e) f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)} \quad f) f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{Si } x \leq 1 \\ 6x-1 & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$$

P19.- Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Calcular:

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{nx}, n \in \mathbb{N}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

P20 Determinar los valores de A y B para que la función sea continua para todo R:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{A(x^3-1)}{x+1} + B & \text{si } x < 1 \\ 2Ax-3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{B(x^2+3x-10)}{x-2} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

P21 Determine condiciones sobre $p \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = \begin{cases} 2px + x^2 & , \quad \text{si } x \leq 1 \\ 8p + x + 1 & , \quad \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

P22 Existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$?, donde:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta}{1+x}, & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 3\alpha + 2x, & \text{si } 4 < x < 8 \\ 6, & \text{si } 8 \leq x \end{cases}$$