

Guía 1 de Derivadas Parciales
Mat 163 Continuidad

PROBLEMA 1: Dada la función $u(x,y)$ encuentre sus derivadas parciales

$$u = x + y + xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \mathbf{R:} \quad u_x = \frac{x^2 y + x^2 y^2 + x^2 - y^2}{x^2 y}$$

$$u_y = \frac{xy^2 + x^2 y^2 - x^2 + y^2}{xy^2}$$

PROBLEMA 2: Dada la función $f(x,y,z)$, encuentre las derivadas parciales

$$f(x,y,z) = x^y + x^z + y^x + y^z + z^x + z^y \quad \mathbf{R:} \quad f_x = yx^{y-1} + zx^{z-1} + y^x \ln y + z^x \ln z,$$

$$f_y = x^y \ln x + xy^{x-1} + zy^{z-1} + z^y \ln z$$

$$f_z = x^z \ln x + y^z \ln y + xz^{x-1} + yz^{y-1}$$

PROBLEMA 3: Dada la función $f(x,y,z)$, encuentre las derivadas parciales

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y} \quad \mathbf{R:} \quad f_{xx} = -\frac{2y}{(x+y)^3}, \quad f_{xy} = \frac{x-y}{(x+y)^3}, \quad f_{yy} = \frac{2x}{(x+y)^3}$$

PROBLEMA 4:

Sea $u = \frac{xy}{x+y}$, muestre que u satisface la ecuación:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

PROBLEMA 5:

Sea $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, probar que $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

PROBLEMA 6:

Sea $f(x, y, z) = x^{(y/z)} + x^{(z/y)} + y^{(x/z)} + y^{(z/x)} + z^{(x/y)} + z^{(y/x)}$. Calcule $f_x(1,1,1)$, $f_y(1,1,1)$, $f_z(1,1,1)$
R: 2 en todos los casos

PROBLEMA 7:

10. Suponga que z es una función de x e y que satisface la ecuación que se da en cada caso. Encontrar sus derivadas parciales de primer orden.

a) $x^3 + y^3 + z^3 + \sin xz + \cos yz = 15$

b) $e^z + x^2 \ln z + y = 0$ **R:** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz \ln z}{ze^z + x^2}$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{ze^z + x^2}$

PROBLEMA 8:

Sea f una función diferenciable de (u, v) y sea g una función de (x, y) definida por:

$$g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$$

calcular: $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$

PROBLEMA 9:

3. Calcule las derivadas parciales de segundo orden para cada una de las siguientes funciones.

b) $u = xe^y + y \sin z$ **R:** $u_{xx} = 0$, $u_{yy} = xe^y$, $u_{zz} = -y \sin z$, $u_{xy} = e^y$, $u_{xz} = 0$,
 $u_{yz} = \cos z$

PROBLEMA 10:

5. Para la transformación $u(x, y) = \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(1+y)^2}$, $v(x, y) = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}$ con $(x, y) \neq (0, -1)$

a) Verificar que: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

b) Calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

PROBLEMA 11:

13. Encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si:

a) $x^3 + y^3 + z^3 = 3axyz$

b) $xe^z = y \sin z$

Resp: a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - ayz}{axy - z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2 - axz}{axy - z^2}$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x(\cot z - 1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y(1 - \cot z)}$

PROBLEMA 12:

- Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en (1,2) y en (0,0) si $z = \ln \sqrt{1+xy}$

R. $\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{6}$, 0.

PROBLEMA 13:

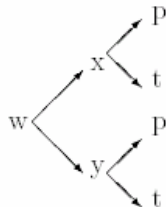
5.- Considere la ecuación $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Muestre, calculando las derivadas parciales y evaluando en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ que:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -1$$

3. Sea $w = f(x, y)$, con $x = pt$, $y = \frac{p}{t}$. Encuentre f_x y f_y en términos de w_p y w_t

Solución

Usando la Regla de la Cadena, se tiene:



$$\left[\begin{array}{l} w_t = f_x \cdot p + f_y \cdot -\frac{p}{t^2} \\ w_p = f_x \cdot t + f_y \cdot \frac{1}{t} \end{array} \right] \cdot \begin{array}{l} t \\ p \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t w_t = p t f_x - \frac{p}{t} \cdot f_y \\ p w_p = t p f_x + \frac{p}{t} \cdot f_y \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f_x = \frac{1}{2pt} (t w_t + p w_p) \quad , \quad f_y = \frac{t}{2p} (p w_p - t w_t)$$

PROBLEMA 14

Problemas de máximos y mínimos

En los siguientes 3 ejercicios, para cada función se pide estudiar existencia y determinación de extremos locales o puntos silla.

1.- $f(x, y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$

2.- $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

3.- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

1. $(0,0)$ es punto silla, $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ mínimos locales

2. $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ mínimo local ; 3. $(0,0,0)$ es único punto crítico, es un mínimo.