

ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PARTE II, PRIMER SEMESTRE 2004

1. Encontrar e identificar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $A(-1, 3)$ y $B(5, 1)$.
2. Dos vértices de un triángulo son $A(-1, 3)$ y $B(5, 1)$, encontrar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si la pendiente del lado $\overline{CA}$ es siempre el doble de la pendiente del lado $\overline{BC}$.
3. Un punto P se mueve de modo tal que su distancia a la recta de ecuación $5x + 12y - 20 = 0$ es el triple de su distancia a la recta de ecuación $4x - 3y + 12 = 0$ encontrar e identificar la ecuación del lugar geométrico.
4. Dado un punto en el interior de un triángulo equilátero, demostrar que la suma de las distancias desde ese punto a los lados del triángulo es constante.
5. Calcular la máxima y la mínima distancia desde el punto $(10, 7)$ a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$.
6. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$ y es tangente a la recta de ecuación $x + 3y - 14 = 0$.
7. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2ax - 3a^2 = 0$, se trazan por O circunferencias cuyo perímetro queda dimidiado por la circunferencia dada. Determinar el lugar geométrico de los centros de tales circunferencias.
8. Determinar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 = 8y$ que es paralela a la recta de ecuación $3x + 4y - 7 = 0$.
9. Encontrar el gráfico asociado a la ecuación $\pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \pm\sqrt{a}$.
10. Determinar el trinomio de segundo grado que corta al eje X en -3 y en 2 y al eje Y en 12 .
11. Encontrar e identificar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas focales de una parábola.
12. Pruebe que la cuerda focal de la parábola $y^2 = 4px$ con puntos finales (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene longitud $x_1 + x_2 + 2P$.
13. En el triángulo rectángulo cuyos vértices son $(2, -2)$, $(-8, 4)$, $(5, 3)$ demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los 3 vértices.

14. Determinar e identificar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una parábola y que son paralelas a una dirección dada.
15. En cualquier punto P de una parábola, no siendo el vértice, la recta tangente y la recta normal cortan al eje focal de la parábola en los puntos A y B respectivamente. Demostrar que los puntos A, B y P son equidistantes del foco.
16. El planeta Plutón tiene una órbita elíptica alrededor del Sol, con el Sol en un foco. Si la longitud del eje mayor es de 7,350 millones de millas y la longitud del eje menor es de 7,117 millones de millas. Encuentre las distancias mínimas y máximas entre Plutón y el Sol.
17. Un satélite de la Tierra se mueve en una órbita de trayectoria elíptica con el centro de la Tierra en un foco. Tiene una altitud mínima de 200 millas y una máxima de 1,000 millas sobre la superficie de la Tierra. Si el radio de la Tierra es de 4,000 millas. ¿Cuál es la ecuación de su trayectoria?
18. Un lanzador de dardos arroja un dardo desde 5 pies sobre la tierra. El dardo se lanza horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica; golpea la tierra a $10 \cdot 10^{\frac{1}{2}}$ pies del lanzador. A una distancia de 10 pies del lanzador. ¿Qué tan alto debería ser colocado un blanco para que el dardo lo golpee?
19. El faro delantero de un automóvil se diseña de manera que el corte transversal a través de su eje sea una parábola y la fuente de luz sea colocada en un foco. Si el faro delantero es de 16 cm. a través y 6 cm. de profundidad, encuentre la ubicación de la fuente de luz.
20. Se va a construir un puente de arco de concreto de forma semi elíptica. Debe salvar un espacio de 20 pies y, los 14 pies centrales deben tener una altura mínima de 8 pies. ¿Qué altura máxima tiene el arco?
21. Un parque en Washington D.C. está limitado por un sendero elíptico con un eje mayor de 458 metros de longitud y un eje menor con una longitud de 390 metros. Encuentre la distancia entre los focos y la ecuación de esta elipse.
22. La Tierra se mueve en órbita elíptica alrededor del Sol, y éste está en uno de los focos de la elipse. La distancia mínima y máxima de la Tierra al Sol son 91,446,000 millas y 94,560,000 millas, respectivamente. ¿Cuál es la excentricidad de la elipse?. ¿Qué longitudes tiene el eje mayor y el eje menor?
23. En la línea lateral de un campo de fútbol americano se instala un dispositivo para escuchar lo que se dice en el centro de la cancha. Consiste en un palto parabólico con un micrófono en su foco. El palto tiene 4 pies de diámetro y 16 pulgadas de profundidad $1\text{pie} = 12\text{pulgadas}$. Deduzca una ecuación de la parábola con su vértice en el origen del sistema de coordenadas, y que la curva se abra hacia la derecha. En qué punto se debe colocar el micrófono?
24. Se lanza una pelota hacia arriba de la orilla de la azotea de un edificio de 50 pies de altura. Llega al punto más alto de su trayectoria a 20 pies sobre la azotea y a 10 pies fuera del edificio. ¿A qué distancia del edificio cae la pelota al piso?
25. El sonido de una explosión de dinamita se oye a diferentes horas en dos puntos A y B . De esto se deduce que la explosión ocurrió 1,000 m. Más cerca de A que de B . Si A y B están

a 2,600 m. De distancia el uno del otro, determine la ecuación que da cuenta del lugar donde ocurrió la explosión.

26. Se tiene un espejo rectangular $OABC$ de 85cm de ancho por 110cm de alto que se ha trizado según la recta $\overline{DE}$ de ecuación $\frac{x}{12} + \frac{y}{18} = 1$. Se pide encontrar un punto P_0 en la recta $\overline{DE}$ de modo que se forme un nuevo espejo rectangular $P_0P_1P_2P_3$ de área máxima.
27. Se diseña un faro giratorio grande de manera que la sección que atraviesa su eje sea una parábola y la fuente de luz esté en el foco. Encuentre la posición de la fuente de luz si el faro es de cuatro pies de abertura y dos pies de profundidad.
28. Encontrar e identificar el lugar geométrico del centro de una circunferencia variable que es siempre tangente a la recta de ecuación $y = 1$ y a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 9$.
29. Un telescopio reflector tiene un espejo parabólico que mide 20 pies de un lado otro, en la parte de arriba, y 4 pies de profundidad, en el centro. Dónde debería colocarse la lente?
30. Suponga que dos torres de un puente colgante tienen entre sí una distancia de 350 pies y el vértice del cable parabólico es tangente a la mitad de la carretera entre las torres. Si el cable está sobre la carretera en un punto a 20 pies del vértice, encuentre la altura de las torres sobre la carretera.
31. Demostrar que la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto de contacto (x_0, y_0) está dada por $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = r^2$.
32. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$ que tengan pendiente $-3/2$.
33. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(8, -4)$, $(3, 1)$.
34. Hallar la distancia del foco de la derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ a cualquiera de sus asíntotas.
35. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(3, -1)$, su centro está en el origen, su eje está sobre el eje X , y una de sus asíntotas es la recta $2x + 3y = 0$.
36. Encuentre los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$.
37. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus puntos extremos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si el producto de las pendientes de los lados variables es siempre igual a 4.
38. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$, mientras que sus focos son los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Encuentre su ecuación y su excentricidad.
39. Encuentre el lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$.

40. Desde cada punto la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y . Hallar e identificar el lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares
41. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje Y es siempre igual al doble de su distancia al punto $(3, 2)$.
42. Un carpintero desea cortar una pieza de madera rectangular en forma elíptica para construir la parte superior de una mesa con esa forma. Si la pieza de madera rectangular mide 5×4 mts. Y desea utilizar toda la longitud y ancho disponible. ¿Cuál sería la longitud del eje mayor y donde deben estar ubicadas las tachuelas para poder dibujar la elipse?
43. Suponga que una cámara susurrante está construida sobre una base elíptica plana rotando una semi-elipse 180° alrededor de su eje mayor. Por la propiedad de reflexión de la elipse, algo que se ha susurrado en un foco se oirá nítidamente en el otro foco. Si la altura es de 18 pies y la longitud es de 42 pies, halle la ubicación del susurro y el puesto donde se escucha.
44. Determinar el valor de k para que la familia de rectas de ecuación $x + 2y + k = 0$ corte a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ en:
- a) dos puntos distintos
 - b) un sólo punto
 - c) ningún punto.