GUIA DE EJERCICIOS
MATRICES
MATEMATICAS I

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular si es posible :

a) $C + E$ b) $A B$ c) $B A$ d) $A B + D^2$ e) $3(2 A)$ f) $A (B D)$
g)$(C + E) A$ h) A^t i) $(A B)^t$ j) $B^t A^t$ k) $(C + E)^t$ k) D^{-1} .

2.- Se define $A = (a_{ij})_{3x3}$ y $B = (b_{ij})_{3x3}$ tal que :

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & si \quad 1 < j \\ 2i - j & si \quad i \geq j \end{cases} \qquad y \qquad b_{ij} = \begin{cases} 2 & si \quad (i - j) \quad es \quad par \\ 3 - i & si \quad (i - j) \quad es \quad impar \end{cases}$$

Determinar a) $A - B$ b) $A + B$ c) $A B - 2 A$.

3.- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, verificar que $A^3 - 2 A^2 - 9 A = 0$.

4.- Sean las matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar el valor de la matriz **X** ,

Si es posible en : a) $3 X = E$
b) $5 X + B = 2 X + C$
c) $A X = C$.

5.- Determine los valores de X e Y en el sistema : $x + A y^t = B$
$x^t + y C = D$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

6.- Dadas las matrices $A = (1 \ 0 \ 2)$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$, encuentre el valor de x que satisface la condición $A \bullet B = 6$.

7.- Determine para que valor de k la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -k \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

8.- Sean A = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con a,b $\in$ R. Determine el valor de a + b

si 2 A E = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

9.- Determine el valor de la matriz A en 2 A – 5 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

10.- Determine el valor de las matrices A y B en el sistema :

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - 6B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

11.- Si $\begin{pmatrix} x & 2 \\ -3 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$, determine x – y

12.- Determine los valores m, n , p , de modo que H = m A + n B + p C.

Si A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; H = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

13.- Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, verificar que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

14.- Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular : a) $A + A^2 + A^3 + ...+ A^n$

b) $A^{-1} + A^{-2} + A^{-3} + ...A^{-n}$

15.- Determine el valor de x tal que : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & -14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 4x & -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16- a) Sea E, F $\in M_n$ con F no singular . Si EF = FE. Demuestre que

$EF^{-1} = F^{-1}E$

b) Sean E,F,T matrices cuadradas de orden “n” tal que E, F son conmutables para la multiplicación y E es no singular, además $T^2 = F$. Demuestre que $(E^{-1}TE)^2 = F$

17 a) Demuestre que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Determine $A^{100} - 8A^{30}$

18.- Sin desarrollar usando propiedades , demuestre que :

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$$

19.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.......$B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$.......$C = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

Calcule el valor de la matriz X, si ella satisface:

$$(XB - CA)^T + AX^T = A + B + 3C - BX^T$$

20.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,...........$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

Encuentre una matriz C tal que CA = B

21.- Sean A = B + C B, C $\in M_n(R)$ tales que $C^2 = 0$ y BC = CB

Demuestre que para $p > 0$, se tiene :

$$A^{p+1} = B^p \cdot \{ B + (p+1)C \}$$

22.- Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

a) Encuentre si existe la inversa de A

b) Exprese A como producto de matrices elementales

23.- a) Determine para que valores de “a” en R; la siguiente matriz es invertible

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

b) Considere uno de los valores obtenidos en la parte a) y encuentre A^{-1}

24.- Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{2x2}(R)}$ definida por : $\mathbf{a_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{3^i} & \mathbf{si} \quad \mathbf{i < j} \\ \mathbf{i^j} & \mathbf{si} \quad \mathbf{i \geq j} \end{cases}$

sean $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\mathbf{y}$ $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

Encuentre la matriz X, en la ecuación :

$$\left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X}^{\mathbf{t}}\right)^{\mathbf{t}} + \left(\mathbf{B}^{\mathbf{t}}\right)^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{XC}$$

25.- Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Encuentre $\mathbf{X} \in \mathbf{M_3(R)}$ tal que **AX = B**

26.- Determine $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$ **de modo que** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{x^2+1} \\ \mathbf{2x} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbf{S}$ donde

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbf{M_2(R)} / \ \mathbf{A^T} = -\mathbf{A} \right\}$$

27.- Se define A = $(a_{ij}) \in M_4(R)$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} \mathbf{2}i - j & si \quad i < j \\ \mathbf{0} & si \quad i = j \\ i - j & si \quad j < i \end{cases}$$

Encuentre explícitamente A y calcule A^2.

28.- Una matriz cuadrada A se llama INVOLUTIVA ssi $\mathbf{A^2 = I_n}$

a) Encuentre una matriz que no sea INVOLUTIVA
b) Demuestre que si A es INVOLUTIVA entonces $(I_n - A)(I_n + A) = 0$

29.- Encuentre una matriz cuadrada que conmute con $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

30.- Si A es idempotente, muestre que $B = 2A - I_n$ es su propia inversa

---

31.- Determine $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$ **de modo que** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{x^2+1} \\ \mathbf{2x} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbf{S}$ donde

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbf{M_2(R)} / \ \mathbf{A^T} = -\mathbf{A} \right\}$$

32.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

Encuentre una matriz C tal que CA = B

33.- Determine, si existe el conjunto solución del siguiente sistema :

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{array}\right|$$

34.- ¿Para que valores de “a” y “b” el sistema tiene solución?

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{5x - 13y = 5a - 2b} \\ \mathbf{x + 2y = a + b - 1} \\ \mathbf{3x - 7y = a} \\ \mathbf{x + y = b} \end{array}\right|$$

35.- Calcule en función de λ, cuando el siguiente sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o no tiene solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + (1+\lambda)x_4 = 1 \end{array}\right|$$

36.- Determine el valor de k de modo que el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (k^2 - 4) = k \end{array}\right|$$

a) infinitas soluciones

b) solución única

c) sea incompatible

P46.- Verificar que si $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

P47.- Una matriz *A* es simétrica si $A = A^t$. Encuentre los números α, β tales que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sea simétrica.

P48.- a) Una matriz cuadrada se llama antisimétrica si $-A = A^t$. Indique cuál de las siguientes matrices son antisimétricas:

i) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) Verifique que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.
