

1. Obtenga las longitudes de los lados del triángulo ABC y determine si éste es rectángulo, isósceles o ambos:
a) A(2, 1, 3) B(3, -1, -2) C(0, 2, -1). b) A(4, 3, 1) B(2, 1, 2) C(0, 2, 4).
c) A(3, -1, -1) B(1, 2, 1) C(6, -1, 2). d) A(1, 2, -3) B(4, 3, -1) C(3, 1, 2).
2. Determine el punto medio del segmento que une los puntos A y B:
a) A(4, -2, 6) y B(-2, 8, 1). b) A(-2, 3, 5) y B(-6, 0, 4).
3. Halle las coordenadas de los tres puntos que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales.
a) A(3, 4, -1) y B(7, -2, 5). b) A(1, -6, 0) y B(6, 12, 7).
4. Uno de los extremos de un segmento de recta es $P_1(4, 6, -3)$ y el punto medio es $Q(2, 1, 6)$. Encuentre el otro extremo.
5. Uno de los extremos de un segmento de recta es $P_1(-2, 1, 6)$ y el punto medio Q está en el plano $y = 3$. El otro extremo P_2 está en la intersección de los planos de ecuaciones $x = 4$ y $z = -6$. Encuentre las coordenadas de P_2 y de Q.
6. Determine si los tres puntos dados en cada caso son colineales.
a) A(1, -1, 2), B(-1, -4, 3) y C(3, 2, 1).
b) A(2, 3, 1), B(4, 6, 5) y C(-2, -2, -7).
c) A(1, -1, 2), B(3, 3, 4) y C(-2, -6, -1)
7. Describa el conjunto de puntos del espacio definido en cada caso:
a) $\{(x, y, z): x = 2; y = -4\}$ b) $\{(x, y, z): -2 \leq y \leq 5\}$
c) $\{(x, y, z): x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}$ d) $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
8. Demuestre que las coordenadas de un punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ que divide al segmento de recta con extremos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en una razón de p es a q, están dadas por las fórmulas:
$$x_0 = \frac{px_2 + qx_1}{p + q}, \quad y_0 = \frac{py_2 + qy_1}{p + q}, \quad z_0 = \frac{pz_2 + qz_1}{p + q}$$
9. Obtenga la ecuación de la gráfica de todos los puntos del espacio que son equidistantes de los puntos de coordenadas (2, -1, 3) y C(3, 1, -1). ¿Podría usted describir esta gráfica?
10. Obtenga la ecuación de la gráfica de todos los puntos del espacio tales que la suma de sus distancias a (1, 0, 0) y C(-1, 0, 0) es siempre igual a 4. Describa la gráfica.

18. Dado el conjunto $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, halle los puntos de $S \cap L$, donde L es la recta que pasa por el origen y con números directores 2, 1 y 3.
19. Determine el centro y el radio de la esfera cuya ecuación es:
- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 14y - 8z + 1 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 22z + 77 = 0$
20. Obtenga las ecuaciones para cada recta que pasa por los puntos A y B dados.
- a) A(1, 3, 2) y B(2, -1, 4). b) A(4, -2, 0) y B(3, 2, -1).
- c) A(1, 0, 5) y B(-2, 0, 1). d) A(5, 5, -2) y B(6, 4, -4).
21. En cada caso, halle las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P_1 dado y con los números directores que le acompañan.
- a) $P_1(1, 0, -1)$ y los números directores 2, 1 y -3.
- b) $P_1(-2, 1, 3)$ y los números directores 3, -1 y -2.
- c) $P_1(4, 0, 0)$ y los números directores 2, -1 y -3.
- d) $P_1(3, -1, -2)$ y los números directores 2, 0 y 0.
22. En cada caso, decida si las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares.
- a) $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4};$ $L_2: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}.$
- b) $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3};$ $L_2: \frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{2}.$
- c) $L_1: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3};$ $L_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}.$
- d) $L_1: \frac{x+5}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+8}{5};$ $L_2: \frac{x-4}{3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+4}{1}.$
- e) $L_1: \frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+8}{0};$ $L_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{0}.$
23. Encuentre los puntos de intersección de $L = \{(x, y, z): \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{7}\}$ con cada uno de los planos coordenados.
24. Demuestre que las siguientes rectas son coincidentes: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{4}$ y $\frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-8}{4}.$

25. Halle las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(3, 1, -2)$ y es perpendicular e intercepta a la recta de ecuaciones $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$. [Sugerencia: Llame (x_0, y_0, z_0) al punto de intersección y determine sus coordenadas]
26. Obtenga la ecuación del plano que pasa por el punto P_0 y que tiene los números posicionales dados.
- a) $P_0(1, 4, 2)$; $3, 1, -4$. b) $P_0(2, 1, -5)$; $3, 0, 2$.
c) $P_0(4, -2, -5)$; $0, 3, -2$. d) $P_0(-1, -2, -3)$; $4, 0, 0$.
27. Construya la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados.
- a) $(1, -2, 1)$; $(2, 0, 3)$; $(0, 1, -1)$. b) $(2, 2, 1)$; $(-1, 2, 3)$; $(3, -5, -2)$.
c) $(3, -1, 2)$; $(1, 2, -1)$; $(2, 3, 1)$. d) $(-1, 3, 1)$; $(2, 1, 2)$; $(4, 2, -1)$.
28. Determine la ecuación de un plano que pasa por el punto P_1 y que es perpendicular a la recta L_1 .
- a) $P_1(2, -1, 3)$; $L_1: x = -1 + 2t, y = 1 + 3t, z = -4t$.
b) $P_1(1, -2, -3)$; $L_1: x = t, y = -2 - 2t, z = 1 + 3t$.
c) $P_1(2, -1, -2)$; $L_1: x = 2 + 3t, y = 0, z = -1 - 2t$.
29. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto P_1 y que es perpendicular al plano dado M_1 .
- a) $P_1(-2, 3, 1)$; $M_1: 2x + 3y + z - 3 = 0$.
b) $P_1(1, -2, -3)$; $M_1: 3x - y - 2z + 4 = 0$.
c) $P_1(-1, 0, -2)$; $M_1: x + 2z + 3 = 0$.
30. Determine la ecuación de un plano que pasa por el punto P_1 y es paralelo al plano Φ .
- a) $P_1(1, -2, -1)$; $\Phi: 3x + 2y - z + 4 = 0$.
b) $P_1(-1, 3, 2)$; $\Phi: 2x + y - 3z + 5 = 0$.
c) $P_1(2, -1, 3)$; $\Phi: x - 2y - 3z + 6 = 0$.
31. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto P_1 y es paralela a la recta L .
- a) $P_1(2, -1, 3)$; $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{4}$.
b) $P_1(0, 0, 1)$; $L: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$.
c) $P_1(1, -2, 0)$; $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

32. En cada caso, determine la ecuación de un plano que contiene a las rectas L_1 y L_2 .
- a) $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$; $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$.
- b) $L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{2}$; $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$.
- d) $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$; $L_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$. (L_1 paralela con L_2)
33. Demuestre que el plano $5x - 3y - z - 6 = 0$ contiene a la recta de ecuaciones
 $x = 1 + 2t$; $y = -1 + 3t$; $z = 2 + t$.
34. Un plano tiene números posicionales A, B, C, y una recta tiene números directores a, b, c. ¿Qué condición se debe satisfacer para que el plano y la recta sean paralelos?
35. Demuestre que los tres planos de ecuaciones respectivas, $7x - 2y - 2z - 5 = 0$, $3x + 2y - 3z - 10 = 0$, $7x + 2y - 5z - 16 = 0$; contienen a una recta común. Entregue las coordenadas de dos puntos de esta recta.
36. Calcule $\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los planos dados.
- a) $2x - y + 2z - 3 = 0$, $3x + 2y - 6z - 11 = 0$.
- b) $x + 2y - 3z + 6 = 0$, $x + y + z - 4 = 0$.
- c) $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x - 2y + 2z - 7 = 0$.
37. Construya las ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos dados.
- a) $3x + 2y - 3z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 3 = 0$.
- b) $x + 2y + 2z - 4 = 0$, $2x + y - 3z + 5 = 0$.
- c) $x + 2y - z + 4 = 0$, $2x + 4y + 3z - 7 = 0$.
38. Determine el punto de intersección del plano y la recta dados.
- a) $3x - y + 2z - 5 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2}$.
- b) $2x + 3y - 4z + 15 = 0$, $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{3}$.
- c) $x + 2z + 3 = 0$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{2}$.
39. Calcule la distancia desde el punto dado al plano dado.
- a) $(2, 1, -1)$; $x - 2y + 2z + 5 = 0$.

- b) $(3, -1, 2); 3x + 2y - 6z - 9 = 0.$
c) $(0, 4, -3); 3y + 2z - 7 = 0.$
40. Determine la ecuación de un plano que pasa por la recta $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$ y que es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0.$
41. Encuentre la ecuación de un plano que pasa por la recta $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}$ y que es paralelo a la recta $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$
42. Determine la ecuación del plano que pasa por la recta $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$ y que es paralelo a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}.$
43. Obtenga las ecuaciones de cualquier recta que pase por el punto $(1, 4, 2)$ y que sea paralela al plano $2x + y + z - 4 = 0.$
44. Halle la ecuación del plano que pasa por $(3, 2, -1)$ y $(1, -1, 2)$ y que es paralelo a la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}.$
45. Determine todos los puntos de intersección de los tres planos dados. Si los tres planos pasan por una recta, obtenga las ecuaciones paramétricas para ella.
- a) $2x + y - 2z - 1 = 0, 3x + 2y + z - 10 = 0, x + 2y - 3z + 2 = 0.$
b) $x + 2y + 3z - 4 = 0, 2x - 3y + z - 2 = 0, 3x + 2y - 2z - 5 = 0.$
c) $3x - y + 2z - 4 = 0, x + 2y - z - 3 = 0, 3x - 8y + 7z + 1 = 0.$
46. Construya las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto dado P_1 y que intersecta y es perpendicular a la recta dada L.
- a) $P_1(3, -1, 2); L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}.$
b) $P_1(-1, 2, 3); L: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{-3}.$
47. Si $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ son dos planos que se intersectan, ¿cuál es la gráfica de todos los puntos que satisfacen la ecuación $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, donde k es una constante real?
48. Obtenga la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 1, -3)$ y por la intersección de los planos $3x + y - z - 2 = 0; 2x + y + 4z - 1 = 0.$
 $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 14y - 8z + 1 = 0.$

Resultados – Geometría Vectorial

- 1.- a) $|AB| = \sqrt{30}$, $|BC| = \sqrt{17}$
 $|AC| = \sqrt{21}$, triángulo escaleno
- 2.- b) $(-4, \frac{3}{2}, \frac{9}{2})$
- 3.- b) $(\frac{9}{4}, \frac{-3}{2}, \frac{7}{4})$, $(\frac{7}{2}, 3, \frac{7}{2})$, $(\frac{19}{4}, \frac{15}{2}, \frac{21}{4})$
- 7.- b) Bloque que se extiende al infinito en las direcciones X y Z limitada por los planos $y = -2$ y $y = 5$.
- 9.- $2x + 4y - 8z + 3 = 0$
- 12.- a) números directores: 1,4,-6
cosenos directores: $\frac{1}{\sqrt{53}}$, $\frac{4}{\sqrt{53}}$, $\frac{-6}{\sqrt{53}}$
- 13.- b) (0,4,2)
- 15.- b) perpendicular
- 19.- a) centro: (6,-7,4) ; radio: 10
- 23.- $(0, \frac{-5}{2}, \frac{-5}{2})$, $(\frac{-5}{3}, 0, \frac{10}{3})$, $(\frac{-5}{7}, \frac{-10}{7}, 0)$
- 29.- a) $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$
c) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{2}$
- 32.- d) $2x - 3y - 5z = 7$
- 37.- a) $x = 11 - 5t$, $y = -19 + 8t$, $z = t$
- 40.- $10x - 17y + z + 25 = 0$
- 44.- $y + x = 1$
- 46.- a) $x = 3 + 4t$, $y = -1 + 5t$, $z = 2 - t$
- c) $|AB| = \sqrt{17}$, $|BC| = \sqrt{35}$
 $|AC| = \sqrt{18}$, triángulo rectángulo
- 5.- $P_2(4,5,-6)$, $Q(1,3,0)$
- 6.- b) No son colineales
- d) Interior de una esfera de radio 1.
- b) números directores: 2,-6,-3
cosenos directores: $\frac{2}{7}$, $\frac{-6}{7}$, $\frac{-3}{7}$
- 14.- a) paralela
c) no es paralela
- 16.- a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
c) $\frac{41}{3\sqrt{190}}$
- 21.- a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-3}$
c) $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$
- 27.- a) $2x - z = 1$
c) $9x + y - 5z = 16$
- 31.- a) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{4}$
c) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1}$
- 36.- a) $\frac{8}{21}$
c) $\sqrt{\frac{14}{17}}$
- 39.- a) 1 c) $x = -1 - 2t$, $y = t$, $z = 3$
- 42.- $14x + 8y - 13z + 15 = 0$
- 45.- b) $(\frac{91}{57}, \frac{31}{57}, \frac{25}{57})$