

UNIVERSIDAD DE VALPARAISO
INGENIERIA CIVIL OCEANICA

Ecuaciones Diferenciales
Ecuaciones Lineales de orden superior
Segundo Semestre 2008

VIVIANA BARILE M

1. Decida si las funciones respectivas son linealmente independientes o dependientes en el Espacio Vectorial $C(\mathbb{R})$. Justifique su afirmación en cada caso.

(a) $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = 4x - 3x^2$, (b) $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$.
(c) $f_1(x) = 5, f_2(x) = \cos^2(x), f_3(x) = \sin^2(x)$, (d) $f_1(x) = 2 + x, f_2(x) = 2 + |x|$.

2. Mediante el cálculo del Wronskiano, decidir si los siguientes conjuntos de funciones son Linealmente Independientes en $C(I)$ para el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que se indica.

(a) $\{1, e^{-x}, e^{-2x}\}$ en cualquier intervalo I . (b) $\{\ln x, x \ln x\}$ en $I =]0, \infty[$.
(c) $\{\sqrt{1-x^2}, x\}$ en $I =]-1, 1[$ (d) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ en cualquier intervalo I .

3. Muestre analítica y gráficamente que las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x|x|$ son linealmente independientes en $] - \infty, \infty[$ y que su Wronskiano $W(f_1, f_2) = 0$ para todo número real.
4. Verifique que $y_1 = 1$ e $y_2 = \ln x$ son soluciones de la ecuación no lineal $y'' + (y')^2 = 0$ en el intervalo $]0, \infty[$.
¿ Es $y_1 + y_2$ solución de la ecuación ? ¿ Es cy_2 solución para $c \neq 0, -1$?
5. Se dice que una transformación lineal $L : C^n(I) \rightarrow C(I)$ es un operador diferencial de orden n sobre un intervalo I si puede expresarse en la forma

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)I,$$

donde los coeficientes $a_0(x), \dots, a_n(x)$ son continuos en todos los puntos de I y el coeficiente principal $a_n(x)$ no es idénticamente cero en I . La transformación lineal nula $C^n(I) \rightarrow C(I)$ que aplica a toda función de $C^n(I)$ la función cero se considera un operador diferencial pero no se le asigna orden. Aquí $Dy = y'$, $D^2y = y''$ y en general $D^k y = y^{(k)}$ la k -ésima derivada de la función y .

- (a) Determine el operador diferencial asociado a la ecuación diferencial $y''' - 3y'' + y' - y = 0$
(b) Evaluar $(D^2 + D)e^x + (xD - x)(2 \ln x)$
(c) Evaluar $(3D^2 + 2D + 2) \sin x - (D + 1)(D - x)(2e^x - \cos x)$
(d) Escribir los siguientes operadores en la forma usual

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x),$$

(1) $(D^2 + 1)(D - 1)$ (2) $(xD^2 + D)^2$ (3) $D(De^x - 1) + e^x$ (4) $D^2(xD - 1)D$

- (e) Factorizar los siguientes operadores lineales en un producto de factores irreducibles de orden menor

(1) $D^2 - 3D + 2$ (2) $2D^2 + 5D + 2$ (3) $4D^4 + 4D^3 - 7D^2 + D - 2$

- (f) Usar inducción matemática para probar la regla de Leibniz

$$D^n[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^{n-k}f(x))(D^k g(x))$$

- (g) Mostrar que $D(xD) \neq (xD)D$

6. Pruebe que $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$, son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' - y = 0,$$

en el intervalo $] -\infty, \infty[$. Deduzca de esto que la solución general de la ecuación anterior es $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Determine un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7. Determine una solución de la ecuación diferencial del problema anterior, que satisfaga las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
8. Pruebe que las soluciones de la ecuación diferencial $y''' + y = 0$, en el intervalo $] -\infty, \infty[$, están dadas por la familia de tres parámetros

$$y(x) = c_1 + c_2 \cos(x) + c_3 \sin(x).$$

Encuentre un representante de la familia que cumpla las condiciones iniciales $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$, $y''(\pi) = -1$.

9. Demuestre que para la ecuación diferencial

$$xy'' - y' = 0,$$

en el intervalo $] -\infty, \infty[$, $y(x) = c_1 + c_2 x^2$ es una familia solución de dos parámetros. Demuestre que no existe ningún elemento de la familia que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. ¿Cuál de las hipótesis del teorema de existencia y unicidad no se cumple?

10. Determine dos elementos de la familia de soluciones del problema anterior que satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
11. Puesto que $y(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x)$, es una familia de dos parámetros de soluciones de la ecuación

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

en el intervalo $] -\infty, \infty[$, determine si es posible un representante de la familia que pueda satisfacer, en cada caso, las siguientes condiciones de frontera:

$$(1) y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (2) y(0) = 1, y(\pi/2) = 1 \quad (3) y(0) = 1, y(\pi) = -1 \quad (4) y(0) = 0, y(\pi) = 0$$

12. Compruebe que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo indicado. Forme la solución general

- (a) $y'' - y' - 12y = 0$; $e^{-3x}, e^{4x},] -\infty, \infty[$.
- (b) $x^2 y'' + xy' + y = 0$; $\cos(\ln x), \sin(\ln x),]0, \infty[$.
- (c) $y^{(4)} + y'' = 0$; $1, x, \cos(x), \sin(x),] -\infty, \infty[$.

13. Suponga que $y_1 = e^x$, e $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de una ecuación diferencial lineal y homogénea. Explique por qué $y_3 = \sinh x$, e $y_4 = \cosh x$, también son soluciones de la ecuación.
14. (a) Determine por inspección una solución particular de $y'' + 2y = 10$
- (b) Halle por inspección una solución particular de $y'' + 2y = -4x$
- (c) Determine por inspección una solución particular de $y'' + 2y = 10 - 4x$
- (d) Determine el valor de a de modo que $\sin ax$ y $\cos ax$, sean soluciones de la ecuación homogénea asociada a los problemas anteriores.
- (e) Utilizando el resultado de (d) halle la solución general para cada uno de los problemas (a)(b) y (c).

15. Suponga que conoce una solución y_1 de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Una segunda solución puede calcularse como

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{(y_1(s))^2} e^{-\int_{x_0}^s P(t) dt} ds$$

donde x_0 es un punto del dominio de la ecuación.

- (a) Demostrar que y_2 verifica la ecuación diferencial
- (b) Probar que y_1 e y_2 son linealmente independientes calculando su Wronskiano.

16. Considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son funciones continuas en un intervalo I y $a_2(x) \neq 0$ para todo x en I . Sean y_1 e y_2 dos soluciones de la ecuación.

- (a) Si $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de y_1 e y_2 muestre que

$$a_2(x) \frac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$$

- (b) Derive de lo anterior la fórmula de Abel

$$W = ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

- (c) Repita el proceso anterior pero ahora integrando entre x_0 y x para $x_0 \in I$ para probar que

$$W(y_1, y_2) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}$$

- (d) Deduzca de lo anterior que si $W(x_0) = 0$ entonces $W = 0$ para todo x en I , mientras que si $W(x_0) \neq 0$ entonces $W \neq 0$ para todo x en el intervalo.

17. Sean y_1 e y_2 soluciones de

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

en el intervalo $] -1, 1[$, muestre que

$$W(y_1, y_2) = \frac{c}{1 - x^2}$$

donde c es una constante.

18. Dado que la ecuación $x^2y'' - 6y = 0$ tiene una solución $y = x^3$. Proceda de la siguiente forma para encontrar una segunda solución.

- (a) Suponga que la segunda solución es de la forma $y_2 = u(x)x^3$. Reemplace y resuelva la ecuación que debe verificar $u(x)$ para que y_2 sea solución. Ajustando las constantes pruebe que obtiene $y_2 = \frac{1}{x^2}$.
- (b) Use la fórmula de Abel con x^3 e y . Resuelva la ecuación diferencial de primer orden resultante para y con el objeto de obtener la segunda solución y_2 .
- (c) Calcule y_2 con la fórmula directa.

19. La función y_1 es una solución de la ecuación diferencial respectiva, utilizar reducción de orden para encontrar una segunda solución y_2 .

- (a) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$.
- (b) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, $y_1 = x \sin(\ln x)$.

(c) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$, $y_1 = x + 1$.

20. La función y_1 es una solución de la ecuación homogénea asociada a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Determine la solución general de cada ecuación.

(a) $y'' - 4y = 2$, $y_1 = e^{-2x}$.

(b) $x^2y'' - xy' + 2y = 16$, $y_1 = x \sin(\ln x)$.

(c) $y'' - 4y' + 3y = x$, $y_1 = e^x$.

21. La ecuación $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ es el caso especial de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0,$$

con $p = 1$. Puesto que tiene a $y_1 = x$ como solución evidente. Hallar la solución general.

22. La ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ es un caso especial de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

que corresponde a $p = 1/2$. Verificar que $y_1 = x^{-1/2}$ es solución sobre todo intervalo que contenga solo valores positivos de x y hallar la solución general.

23. Hallar la solución general de

$$y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$$

24. Si n es un entero positivo hallar dos soluciones linealmente independientes de

$$xy'' - (x - n)y' + ny = 0.$$

Hallar la solución general de la ecuación anterior para $n = 1, 2, 3$.

25. Hallar la solución general de

$$y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0.$$

26. Probar que la solución general de la ecuación diferencial de coeficientes constantes $y'' + py' + qy = 0$ tiende a cero cuando x tiende a infinito si y sólo si p y q son ambos positivos.

27. Probar que la derivada de toda solución de $y'' + py' + qy = 0$ también es solución de la ecuación.

28. La ecuación

$$x^2y'' + pxy + qy = 0,$$

donde p y q son constantes se llama ecuación de Euler. Probar que el cambio $x = e^z$ la transforma en una ecuación de coeficientes constantes. Usar la técnica anterior para resolver

(a) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$.

(b) $4x^2y'' - 3y = 0$

29. En el problema anterior se han transformado ciertas ecuaciones homogéneas con coeficientes variables en ecuaciones con coeficientes constantes cambiando la variable independiente. Consideremos la ecuación homogénea general

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

y consideremos el cambio de variable independiente $z = z(x)$, donde z es una función no especificada de x . Probar que la ecuación anterior puede ser transformada en una de coeficientes constantes si y sólo si

$$\frac{Q' + 2PQ}{Q^{3/2}}$$

es constante, en cuyo caso $z = \int \sqrt{Q(x)} dx$ logrará el efecto buscado. Aplicar lo anterior para resolver si es posible a través de cambio de variable las ecuaciones

(a) $xy'' + (x^2 - 1)y' + x^3y = 0$

(b) $y'' + 3xy' + x^2y = 0$

30. Determine la solución general de cada ecuación diferencial.

(a) $y'' - 36y = 0$

(b) $y'' + 9y = 0$

(c) $y'' - y' - 6y = 0$

(d) $y'' + 8y' + 16y = 0$

(e) $y'' - 4y' + 5y = 0$

(f) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

(g) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

(h) $\frac{d^5y}{dx^5} + 5\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} - 10\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 5y = 0$

(i) $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

31. Resuelva la ecuación diferencial sujeta a las condiciones indicadas.

(a) $y'' + 16y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2$

(b) $y'' + 6y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$

(c) $y'' + y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$

(d) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

(e) $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 1$

(f) $y'' - 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y(1) = 0.$

32. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por coeficientes indeterminados.

(a) $y'' + 3y' - 2y = 6$

(b) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

(c) $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

(d) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

(e) $y'' + 4y = (x^2 - 3)\sin(2x)$

(f) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3\sin x)$

(g) $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$

(h) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$

33. Resuelva la ecuación diferencial sujeta a las condiciones indicadas.

(a) $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11, y(0) = 0, y'(0) = 0$

(b) $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}, y(0) = 2, y'(0) = 5$

(c) $y'' - y = \cosh x, y(0) = 2, y'(0) = 12$

(d) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = F_0 \sin \omega t, x(0) = 0, x'(0) = 0.$

(e) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = F_0 \cos \gamma t, x(0) = 0, x'(0) = 0.$

(f) $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{5}{2}, y''(0) = \frac{-9}{2}$

(g) $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2, y(0) = 0, y(\pi) = \pi.$

34. Resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' + 4y = g(x), y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$\text{en donde } g(x) = \begin{cases} \sin(x) & , 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & , x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sugerencia: Resuelva el problema en los dos intervalos y después determine una solución tal que y e y' sean continuas en $\frac{\pi}{2}$.

35. Hallar una solución particular de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = 2x,$$

primero por simple inspección y luego por variación de parámetros.

36. Hallar una solución particular de

$$y'' - y' - 6y = e^{-x}$$

Primero por coeficientes indeterminados y luego por variación de parámetros.

37. (a) Probar que el método de variación de parámetros aplicado a la ecuación $y'' + y = f(x)$ conduce a la solución particular

$$y_p(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

(b) Hallar una fórmula similar para una solución particular de la ecuación $y'' + ky = f(x)$, donde k es una constante positiva.

38. Hallar una solución particular de las siguientes ecuaciones

(a) $y'' + y = \sec x$

(b) $y'' + 4y = \tan 2x$

(c) $y'' - 2y' + y = e^{-x} \ln(x)$

(d) $y'' - 3y' + 2y = (1 + e^{-x})^{-1}$

(e) $y'' + y = x \cos x$

(f) $y'' + y = \sec x \tan x$

39. Hallar la solución general de cada una de las ecuaciones

(a) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$

(b) $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1)^2$

(c) $(1 - x)y'' + xy' - y = (1 - x)^2$

(d) $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2 e^{2x}$

(e) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x e^{-x}$

40. Resuelva la ecuación diferencial de tercer orden mediante variación de parámetros

(a) $y''' + y' = \tan x$

(b) $y''' + 4y' = \sec 2x$

41. Combinar los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial

(a) $3y'' - 6y' + 30y = 15 \sin x + e^x \tan 3x$

(b) $y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^x$

42. Resuelva la ecuación

$$(x+2)^2 y'' + (x+2)y' + y = 0$$

Describe el intervalo en el que está definida la solución.

43. Resuelva $4x^2 y'' + y = 0$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 2$ en $] -\infty, 0[$