

GUIA 1
ECUACIONES DIFERENCIALES

31) Cierta ciudad tenía una población de 25.000 habitantes en 1970 y una población de 30.000 habitantes en 1980. Suponiendo que la población continua creciendo exponencialmente con una tasa constante ¿Qué población pueden esperar los urbanistas que tenga la ciudad en el año 2001?

Resp. Aproximadamente 51.840 habitantes

32) La fisión nuclear produce neutrones en una pila atómica a un ritmo constante al número de neutrones presente en cada momento. Si hay n_0 neutrones inicialmente y

hay n_1 y n_2 , respectivamente, en los instantes t_1 y t_2 demuestre que $(\frac{n_1}{n_0})^{t_2} = (\frac{n_2}{n_0})^{t_1}$

33) Exprese mediante una ecuación diferencial el hecho de que en cada punto (x, y) de una curva de ecuación $y = f(x)$, la recta tangente corta a los ejes coordenados de modo que la suma de tales intersecciones es una constante C

34) El moho crece aun ritmo proporcional ala cantidad presente. Inicialmente había 2 gramos, en dos días ha pasado a haber 3 gramos.

a) Si $x = x(t)$ es la masa de moho en el instante t , pruebe que $x(t) = 2(\frac{3}{2})^{\frac{t}{2}}$

b) Calcule la cantidad al cabo de 10 días. Resp. 15,2 gramos

35) El uranio 238 se desintegra a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Si hay x_1 y x_2 gramos en los instantes t_1 y t_2 respectivamente, pruebe que la semivida es $\frac{(t_2 - t_1) \ln 2}{\ln(x_1/x_2)}$

$$\frac{(t_2 - t_1) \ln 2}{\ln(x_1/x_2)}$$

36) Un magnate posee una fortuna que crece a un ritmo proporcional al cuadrado de su valor en cada momento. Si tenía 10 millones de dólares hace un año y hoy tiene 20 millones ¿Cuál será su fortuna dentro de 6 meses?

Resp. 40 millones

37) Si la mitad de cierta cantidad de radio se desintegra en 1600 años ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial quedará al cabo de 2.400 años?

Resp. El 35,35%

38) Un cuerpo de temperatura desconocida se coloca en un refrigerador que se mantiene a una temperatura constante de 0 °C. Tras 15 minutos el cuerpo está a 30 °C y después de 30 minutos ya está a 15 °C. ¿Cuál era su temperatura inicial?

Resp. 60 °C

39) Una bola de naftalina pierde volumen por evaporación con una rapidez proporcional a su área instantánea. Si el diámetro de la bola disminuye de 2 cm. a 1cm. En 3 meses ¿Cuánto tiempo se requiere para que su diámetro sea de 1mm.?

Resp. 5,7 meses

40) Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto, es una parábola.

41) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas con ecuación $\cos y = ae^{-x}$

Resp. $\sin y = Ce^{-x}$

42) Halle la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas de ecuación

$$y = \frac{Cx}{1+x}$$

Resp. $3y^2 + 3x^2 + x^3 = C$

43) Determine la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas de ecuación $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$

Resp. $y = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{C}{x^4}$

44) Encuentre el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $x + y = Ce^y$ que pasa por el punto (0,5)

Resp. $y = 2 - x + 3e^{-x}$

45) Inicialmente había 100 miligramos presentes de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuye en 3%. Si la rapidez de desintegración es, en un instante cualquiera, proporcional a la cantidad presente de sustancia en dicho instante, encuentre la cantidad que queda después de 24 horas. ¿Cuál es la vida media de la sustancia?

Resp. 136,5 horas

46) Cuando un rayo vertical de luz pasa a través de una sustancia transparente, la rapidez con que la intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor del medio expresado en pies. En agua de mar límpida la intensidad a 3 pies bajo la superficie es un 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

Resp. 0,1% de I_0

47) Un tanque contiene 200 litros de fluido en los cuales se disuelven 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene 1 gramo de sal por litro se bombea dentro del tanque con una rapidez de 4 litros por minuto, la solución, adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con la misma rapidez. Encuentre el número $N(t)$ de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera

Resp. $N(t) = 200 - 170e^{-\frac{1}{50}t}$

48) La ecuación diferencial que rige la velocidad v de un peso w que cae sometido a una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$.

Resuelva la ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$ y determine la velocidad límite del peso.

Si la distancia s se relaciona a la velocidad instantánea mediante $\frac{ds}{dt} = v$, encuentre una expresión explícita para s si además se sabe que $s(0) = s_0$

Resp. $v(t) = \frac{mg}{k} + (v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{kt}{m}}$, $s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k}) + s_0$

