

Espacios y subespacios vectoriales

1 Demuestre que en un espacio vectorial V sobre K se verifica:

- a) $\alpha \cdot 0_V = 0_V, \forall \alpha \in K$
- b) $0 \cdot v = 0_V, \forall v \in V$
- c) $\alpha v = 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \vee v = 0)$

2. Considere el conjunto $\mathbb{R}^+$ y las siguientes operaciones

$$x \oplus y = x \cdot y, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^+,$$

$$\alpha \otimes x = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$$

a) Evalúe $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{4}, \frac{3}{5} \oplus 7$ y $-3 \otimes (6 \oplus 2),$

b) Demuestre que $\mathbb{R}^+$ con estas operaciones es un espacio vectorial real.

3. Sea $V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. En V se define la suma y la multiplicación por escalar real así:

$$(x, y) + (x', y') = (xx', yy')$$

$$\alpha(x, y) = (x^\alpha, y^\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

- a) Determine $v + 3w$ y $2v - 3w$ para $v = (1, 2)$ y $w = (2, 1).$
- b) Encuentre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $(1, 3) = \alpha(2, 2) + \beta(3, 1).$

4. Averigüe si los siguientes conjuntos son o no son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$

b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0 \wedge z = 1\}$

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$

d) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a \leq b \leq c\}$

e) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a \in \mathbb{Q}\}$

f) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \wedge x - y - 2z = 0\}$

5. Decida si los siguientes conjuntos son o no son subespacios vectoriales de $M_n(\mathbb{R})$. Justifique sus afirmaciones.
 - a) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A \text{ es diagonal}\}$.
 - b) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A \text{ es invertible}\}$.
 - c) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A \text{ es antisimétrica}\}$.
 - d) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A^2 = I_n\}$
 - e) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \text{tr}(A) = 0\}$.
6. Sea A matriz real de orden $m \times n$. Demuestre que $U = \{X \in \mathbb{R}^n / AX = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
7. Determine si los siguientes conjuntos son o no subespacios vectoriales de $P_2[x]$. En caso de serlo, demuéstrela.
 - a) $W = \{a + bx + cx^2 \in P_2[x] / a = b = c\}$
 - b) $W = \{a + bx + cx^2 \in P_2[x] / a + b + c = 1\}$
 - c) $W = \{a + bx + cx^2 \in P_2[x] / a + 2b + c = 0 \wedge a - b - 2c = 0\}$
 - d) $W = \{p(x) \in P_2[x] / p(0) = 1\}$
8. Determine si los siguientes conjuntos son o no son subespacios vectoriales del espacio $F(A; \mathbb{R})$ de todas las funciones reales definidas en el dominio A . Justifique su respuesta.
 - a) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = f(1)\}$.
 - b) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ es función par}\}$.
 - c) $W = \{f \in F([a, b], \mathbb{R}) / f \text{ es integrable en } [a, b]\}$.
 - d) $W = \left\{f \in F([a, b], \mathbb{R}) / f \text{ es integrable en } [a, b] \wedge \int_a^b f = 1\right\}$.
9. Sea $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / 2x + 3y - w = 0 \wedge z = 0\}$
 - a) Demuestre que U es un subespacio vectorial del $\mathbb{R}^4$
 - b) Encuentre la forma característica que tienen los vectores de U .
 - c) Encuentre $S \subseteq U$ tal que S sea un subespacio de U .

10. Encuentre tres subespacios vectoriales no triviales de $\mathbb{R}^3$ y tales que sus intersecciones de dos en dos sean $\{0\}$.
11. Muestre que la unión de dos subespacios de un espacio vectorial V no necesariamente es un subespacio de V .
12. En cada caso, encuentre el subespacio $U \cap W$ de los subespacios U y W dados.
 - a) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_4 = 0\}$
 $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\}$
 - b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a + 2b - 3d = 0 \right\}$
 $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / b + c = 0 \right\}$
 - c) $U = \{a + ax^2 \in P_2[x] / a \in \mathbb{R}\}$
 $W = \{a + bx + cx^2 \in P_2[x] / a + b + c = 0\}$

Combinaciones lineales - Generadores

13. Considere el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ y los conjuntos $S = \{(4, 1)\}$, $T = \{(a, b)\}$ y $R = \{(1, 2), (3, 6)\}$. Describa algebraica y geoméricamente $\langle S \rangle$, $\langle T \rangle$ y $\langle R \rangle$ los subespacios generados por S , T y R respectivamente.
14. Sean $u_1 = (-1, 2, 3, 1)$, $u_2 = (0, 2, 4, -1)$, $u_3 = (5, 1, 1, 3)$, $u_4 = (1, 0, -1, 4)$. ¿Existen escalares reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tales que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = (-2, 3, 6, -8)$.
15. Sean $u = (2, 1, 0, 3)$, $v = (3, -1, 5, 2)$, $w = (-1, 0, 2, 1)$. ¿Cuáles de los siguientes vectores $a = (5, -5, 0, 10)$, $b = (-2, 1, -2, 1)$ está en el espacio generado por u, v y w ?
16. En cada caso, escriba el vector v como combinación lineal de los vectores v_i .
 - a) $v = (8, 4, 2)$, $v_1 = \left(1, \frac{1}{2}, -2\right)$, $v_2 = (2, 1, 5)$
 - b) $v = x^2 - x$; $v_1 = x^2 - x + 2$, $v_2 = 2x^2 - 3x - 1$, $v_3 = x + 3$.
 - c) $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Determine, en cada caso, si el vector v pertenece al espacio generado por el conjunto S .
- a) $v = 3 - 4x - 2x^2 + 8x^3$, $S = \{2 - x + 3x^2 + 2x^3, 1 + x + 6x^2 - 5x^3, -1 + x + x^2 - 8x^3\}$
- b) $v = x^3 + 4x^2 - x - 1$, $S = \{x^2 + x + 2, x^3 + x + 1, 2x^3 + x^2 - 1\}$
- c) $v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$
18. En cada caso, muestre un vector del espacio V que no pertenezca al subespacio generado por el conjunto S , que se denotará $\langle S \rangle$. Determine la condición que deben cumplir los vectores de V para pertenecer al subespacio $\langle S \rangle$.
- a) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}$
- b) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1, 0, 2, -1), (0, 1, -1, 3), (-1, 1, 0, 1)\}$
- c) $V = P_2[x]$, $S = \{2, x - 1, 2x^2 + 4\}$
- d) $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
19. En el espacio $\mathbb{R}^3$ considere $S = \{(2, -1, 6), (-3, 4, 1)\}$ y $T = \{(-1, 3, 7), (8, -9, 4)\}$. Muestre que $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.
20. Muestre que el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ no está generado por los vectores $v = (1, 0, 1)$ y $u = (4, 1, 2)$, pero que $\mathbb{R}^3$ sí está generado por v, u y $w = (2, 1, 1)$.
21. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K . Demuestre que $0_V \in \langle S \rangle$ y que $S \subseteq \langle S \rangle$, para cualquier $S \subseteq V$.
22. Determine un conjunto finito que genere al subespacio W si,
- a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 4z = 0\}$
- b) $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A \text{ es simétrica}\}$
- c) $W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3[x] / a + b + d = 0 \wedge 3b - c - d = 0\}$
23. Encuentre un conjunto de generados del espacio solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Dependencia lineal

24. Sean (a, b) y (c, d) vectores del espacio $\mathbb{R}^2$. Demuestre que si $ad - bc = 0$, entonces estos vectores son l.i.
25. Determine si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial V dado son l.i. o l.d.
 - a) $\{(1, -1), (1, 2), (3, -2)\}$, $V = \mathbb{R}^2$
 - b) $\{(1, -3, 0), (3, 0, 4), (11, -6, 12)\}$, $V = \mathbb{R}^3$
 - c) $\{x - 1, (x - 1)^2, 2x - 3\}$, $V = P_2[x]$
 - d) $\{f(x) = x, g(x) = x^2\}$, $V = F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$
 - e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$
 - f) $\{(1, -1, 0, 6), (-1, 0, 3, 1), (1, 1, -1, 2), (0, 1, 1, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$
 - g) $\{2x, x^3 - 3, 1 + x - 4x^3, x^3 + 18x - 9\}$, $V = P_3[x]$
26. Encuentre 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ que sean l.d. y tales que dos cualesquiera de ellos sean l.i.
27. Suponga que $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tienen sus puntos iniciales en el origen. En cada caso determine si ellos pertenecen a un mismo plano:
 - a) $v_1 = (1, 0, -2), v_2 = (3, 1, 2), v_3 = (1, -1, 0)$
 - b) $v_1 = (2, -1, 4), v_2 = (4, 2, 3), v_3 = (2, 7, -6)$
 - c) $v_1 = (3, -6, 9), v_2 = (2, -4, 6), v_3 = (1, 1, 1)$
 - d) $v_1 = (4, 6, 8), v_2 = (2, 3, 4), v_3 = (-2, -3, -4)$
28. Encuentre todos los valores $k \in \mathbb{R}$ de modo que el conjunto S sea l.i. si:
 - a) $S = \{(1 + k, 1 - k), (1 - k, 1 + k)\} \subset \mathbb{R}^2$
 - b) $S = \{(1, k, 0), (-1, 2, 1), (2, -1, k)\} \subset \mathbb{R}^3$
29. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K . Demuestre que:
 - a) $\{v\}$ es l.i. $\Leftrightarrow v \neq 0$
 - b) $\{v, u\}$ es l.d. $\Leftrightarrow v$ es un múltiplo escalar de u
 - c) $0 \in S \Rightarrow S$ es l.d.
30. Demuestre que si $\{v_1, v_2\}$ es l.i. y $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i.

31. Sea $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ conjunto l.i. Demuestre que:
- $\{v_1 + v_2 - v_3, v_2 + v_3, 2v_1\}$ es l.i.
 - $\{v_1 + v_2, v_1 - 2v_2 + v_3, v_1 - v_3\}$ es l.i.
32. Si $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ y $k > n$, demuestre que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es l.d.

Base – Dimensión - Coordenadas

33. Explique por qué los siguientes conjuntos de vectores no forman una base para el espacio vectorial que se indica (resuelva a simple vista)
- $\{(1, 2), (0, 3), (2, 7)\}$ para $\mathbb{R}^2$
 - $\{(-1, 3, 2), (6, 1, 1)\}$ para $\mathbb{R}^3$
34. Determine si los conjuntos B dados forman o no una base del espacio vectorial real V.
- $B = \{(3, 2), (-1, 4)\}$, $V = \mathbb{R}^2$
 - $B = \{(3, 9), (-4, -12)\}$, $V = \mathbb{R}^2$
 - $B = \{(1, 1, 2), (0, 1, -1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$
 - $B = \{(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$
 - $B = \{(2, -1, 0, 1), (3, 0, 1, -2), (1, -1, 1, -1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$
 - $B = \{1, 1 + x^2, 1 + x - 2x^2\}$, $V = P_2[x]$.
 - $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$
35. Sea W subespacio de $\mathbb{R}^2$, $W \neq \mathbb{R}^2$. Demuestre que $W = \{0_W\}$ ó W es una línea recta que pasa por el origen.
36. Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$
- El plano $x - y = 0$.
 - El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que están en el plano de ecuación $2x - y - z = 0$
 - El plano definido por $x + y - 3z = 0$
 - La recta dada por las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = -2t$, $z = 3t$, con $t \in \mathbb{R}$
37. En cada caso, encuentre una base y la dimensión del espacio solución del sistema de ecuaciones lineales dado

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + y + z + w = 0 \\ 5x - y + z - w = 0 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

38. Sean W_1, W_2 los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_4 = 0\}$$

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_4 = 0 \wedge x_1 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

Muestre una base y determine la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

39. Encuentre una base y determine la dimensión de los subespacios de $P_2[x]$: $U \cap W$ y $U + W$ si $U = \langle 1 - x, 1 + 2x^2 \rangle$ y $W = \langle x, x + 2x^2 \rangle$

40. Determine todos los valores reales de k tales que S es una base de $\mathbb{R}^3$:

a) $S = \{(2, 1, 1), (1, 2k, k), (1, k, -k)\}$

b) $S = \{(k - 1, k, k), (1 - 2k, k + 2, 2k), (k, k, 2k)\}$

41. Si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de un espacio vectorial V , demuestre que $\{v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2, v_1\}$ también es una base de V .

42. En el subespacio $\mathbb{R}^3$ considere los conjuntos W_1 y W_2 :

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) / 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0\} \quad \text{y} \quad W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 = 0\}.$$

a) ¿Son W_1 y W_2 subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$? Pruébalo.

b) Demuestre que W_1 y W_2 son distintos de $\mathbb{R}^3$.

c) Determine una base para $W_1 \cap W_2$.

d) Encuentre una base para W_1 y W_2 extendiendo la base que obtuvo en c).

e) Determine el espacio $W_1 + W_2$ y una base para él. ¿Es $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$?

f) ¿Cuáles son las dimensiones de $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$?

g) Construya una base para $\mathbb{R}^3$ extendiendo la que obtuvo para W_2

43. Sean U_1, U_2 los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_4 = 0 \wedge x_1 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

$$U_2 = \langle \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (2, -2, -2, 2)\} \rangle$$

- a) Determine la dimensión de $U_1 \cap U_2$
 - b) Encuentre una base S para U_2
 - c) Encuentre una base B de $\mathbb{R}^4$ que contenga a la base S de U_2
 - d) ¿Es $\mathbb{R}^4 = U_1 + U_2$?
44. Considere los subespacios de $P_3[x]$: $W = \langle \{x^3 + x^2 - x + 1, x^2 + 2, 2x^3 + 3x^2 - 2x\} \rangle$ y $U = \{p(x) / p(1) = p(-1)\}$. Determine los subespacios $W \cap U$, $W + U$ y sus respectivas dimensiones.
 45. Sea B la base ordenada de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 0, -1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Determine las coordenadas con respecto a la base B de cada uno de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
 46. Considere B y C las bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$ y $C = \{(1, 0, 1), (1, 2, -2), (0, -1, 1)\}$. Si las coordenadas del vector $v \in \mathbb{R}^3$ con respecto a la base B son $[v]_B = (1, -2, 3)$, determine las coordenadas de v con respecto a la base C.
 47. Sean A y B las bases de $P_2[x]$: $A = \{-1 + x + 2x^2, 2 - x - x^2, -3 + 2x + 2x^2\}$ y $B = \{5 + 2x - x^2, -1 + x - x^2, -3x + 2x^2\}$. Si las coordenadas del vector $p(x)$ con respecto a la base A son $[p(x)]_A = (1, 4, -2)$ encuentre las coordenadas de $p(x)$ con respecto a,
 - a) la base canónica E de $P_2[x]$
 - b) la base B de $P_2[x]$
 48. Considere las bases $E = \{1, x, x^2\}$, $B = \{1, x - 1, x^2 - 1\}$ de $P_2[x]$. Determine las coordenadas de $v = a + bx + cx^2 \in P_2[x]$ con respecto a la base E y con respecto a la base B.
 49. Suponga que las coordenadas (o vectores coordenados) de los vectores de $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1, 0, -5)$, $u_2 = (2, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 4, -4)$ según la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ son: $(-2, 2, -1)$, $(-1, 1, 0)$, $(2, -1, -2)$ respectivamente. Determine la base B.
 50. Demuestre que el conjunto $S = \{1, x - 1, (x - 1)^2, \dots, (x - 1)^n\}$ es una base de $P_n[x]$ y exprese en esta base el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

51. Sean $W = \langle \{(1,0,0)\} \rangle$ y $U = \langle \{(1,1,0), (0,1,1)\} \rangle$ subespacios de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.
52. Sean $W = \langle \{(1,0,-2), (1,-1,-1)\} \rangle$ y $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z=0\}$ subespacio $\mathbb{R}^3$. ¿Es $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$? Justifique su respuesta.

Respuestas a algunos ejercicios

4. $1(x,y) \neq (x,y)$
5. a) $\frac{1}{2}, \frac{21}{5}, \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728}$
6. a) $(8,2)$ y $(\frac{1}{8}, 4)$ c) $\alpha = \log_2 3, \beta = -1$
7. La suma no tiene elemento neutro (cero).
8. No cumple con $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall v \in \mathbb{R}^2$
9. a) No; $(x,y) \in V$ pero $(-x, -y) \notin V$
 b) No; $1(x,y,z) \neq (x,y,z)$
 c) No; existen $A, B \in V$ pero $A+B \notin V$
 d) Sí; V es un subespacio de $P_2[x]$
 e) Sí; V es un subespacio del espacio de las funciones reales definidas en $]a, b[$.
11. a) Sí b) No c) Sí
 d) No e) No f) Sí
12. a) Sí b) No c) Sí
 d) No e) Sí
14. a) Sí b) No c) Sí d) No
15. a) Sí b) Sí c) Sí d) No
16. a) W es el subespacio generado por $\{(1,0,0,2), (0,1,0,3)\}$
 b) La forma es $(x,y,0,2x+3y)$, con $x,y \in \mathbb{R}$
 c) Por ejemplo, $U = \{0\}$; también $U = \langle \{(0,1,0,3)\} \rangle$
17. $U = \{(x,y,z) / x=0, y=0\}, V = \{(x,y,z) / y=0, z=0\},$
 $W = \{(x,y,z) / x=0, z=0\}.$
19. a) $U \cap W = \langle \{(1,-4,0,1), (0,2,1,0)\} \rangle$
 b) $U \cap W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$
 c) $U \cap W = \{0\}$
20. $\langle S \rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{4}x\}$ recta por el origen con pendiente $\frac{1}{4}$.
 $\langle T \rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{b}{a}x\}$ recta por el origen con pendiente $\frac{b}{a}$.
 $\langle S \rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$ recta por el origen con pendiente 2.

21. Sí, existen y son $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -4$
22. El vector a pertenece a $\langle \{u, v, w\} \rangle$; $a = -3u + 2v - 5w$. El vector b no pertenece.
23. a) $v = 4v_1 + 2v_2$ b) $v = -v_1 + v_2 + v_3$
 c) v no se puede escribir como combinación lineal de los vectores dados.
25. a) $(1, 0, 0, 1) \notin \langle S \rangle$; (a, b, c, d) tal que $b + c = 0$ y $a + d = 0$.
 b) $(1, 1, 1, 1) \notin \langle S \rangle$; (a, b, c, d) tal que $-a - 2b + c + d = 0$
 c) $\langle S \rangle = V$
 d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \langle S \rangle$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $b + c = 0$.
27. $v = (1, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$ y $v \notin \langle \{v, u\} \rangle$
29. a) $\{(3, 2, 0)\}$ c) $\{-1 + x + 3x^2, -1 - x^2 + x^3\}$
32. a) l.d. c) l.i. e) l.i. g) l.d.
33. Por ejemplo, $(1, -1, 1), (2, 1, -1), (-1, -2, 2)$
35. a) $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ b) $k \in \mathbb{R} - \{-1 \pm \sqrt{3}\}$
40. a) vectores l.d. b) los vectores no generan a $\mathbb{R}^3$
41. a) Sí b) No c) No d) Sí
 e) No f) Sí g) Sí
43. a) $B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ b) $B = \{(0, 1, -1), (1, 0, 2)\}$
 c) $B = \{(-1, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ d) $B = \{(1, -2, 3)\}$
45. $B = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ base de W_1 , $\dim W_1 = 3$
 $B = \{(1, -1, 1, 0), (0, 1, 2, 1)\}$ base de W_2 , $\dim W_2 = 2$
 $B = \{(1, 0, 3, 1)\}$ base de $W_1 \cap W_2$, $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$
 $B = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, -1, 1, 0)\}$ base de $W_1 + W_2$,
 $\dim W_1 + W_2 = 3$.
47. a) $k \in \mathbb{R} - \{0, -\frac{1}{6}\}$ b) $k \in \mathbb{R} - \{0, 1, -\frac{4}{3}\}$
49. c) $B = \{(1, 1, -1)\}$ base de $W_1 \cap W_2$
 d) $B' = \{(1, 1, -1), (0, 5, -3)\}$ base de W_1 , $B = \{(1, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ base de W_2 .
 e) $B = \{(1, 1, -1), (0, 5, -3), (0, 0, 1)\}$ base de $W_1 + W_2$. Sí, es suma directa.
 f) Las dimensiones son 2, 2, 1, 3 respectivamente.
 g) $B = \{(1, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.
51. $W_1 \cap W_2 = W = U = W + U$. $\dim W = 3 = \dim U$.
52. $[e_1]_B = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $[e_2]_B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $[e_3]_B = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
53. $[v]_B = (-2, 0, 3)$
55. $[v]_E = (a, b, c)$ $[v]_B = (a + b + c, b, c)$
57. $a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2)(x - 1) + a_2(x - 1)^2$
59. No, puesto que $W \cap U = \langle \{(-2, 3, 1)\} \rangle \neq \langle \{(0, 0, 0)\} \rangle$