

**Capítulo Noveno****ANTI-KANTIANO Y KANTIANO****LOBATSCHESWSKI Y HAMILTON**

Un matemático inglés de fines del siglo pasado, Clifford, ha llamado a Lobatschewski "el Copérnico de la Geometría". Ningún título cuadra mejor, en efecto, al geómetra ruso, cuya obra es pareja a la del astrónomo polaco, pues lo que éste hizo en la Astronomía del primer tercio del siglo XVI, es análogo a lo que hizo aquél en la Geometría del primer tercio del XIX. En la Astronomía inmediatamente anterior a Copérnico existía el confusionismo reinante en toda la Mecánica pregalileana, que se nutría del jugo aristotélico, como en la Geometría inmediatamente anterior a Lobatschewski existía el confusionismo euclídeo del que no había salido a pesar de los trabajos de los geómetras franceses de la Revolución. La dictadura filosófica del Estagirita impedía la libre investigación astronómica porque sus resultados podían poner en un aprieto algunos dogmas católicos, como la dictadura filosófica de Kant impedía la libre investigación geométrica porque sus resultados podían poner en un aprieto algunos dogmas apriorísticos. La obra de Copérnico representa el triunfo de la razón sobre la imaginación, sobre los prejuicios y sobre los sentidos, pero fue necesario que Giordano Bruno muriese en la pira para que la teoría heliocéntrica se incorporase definitivamente a la Ciencia. La obra de Lobatschewski representa el triunfo de la razón sobre la Crítica de la razón y sobre el apriorismo espacial kantiano; pero, afortunadamente, no necesitó ningún mártir para imponerse, aunque sí tuvo que luchar contra la opinión vulgar durante más de veinticinco años y permaneció en un punto muerto porque la Europa científica de entonces ignoraba el ruso y hubo que esperar a las traducciones francesas y alemanas para que el mundo matemático la conociera. El descubrimiento de Copérnico nos enseñó a considerar el Universo bajo un nuevo aspecto, como el descubrimiento de Lobatschewski nos enseñó a considerar la Geometría bajo un nuevo aspecto también. ¿Qué nuevo aspecto es éste? Muy sencillo. Más de veinte siglos llevaban los geómetras intentando demostrar el postulado de Euclides, pero a ninguno, excepto a Gauss que, como de costumbre, guardó el secreto se le ocurrió la sencilla idea genial que a Lobatschewski: prescindir de la famosa proposición euclídea que afirma que por un punto exterior a una recta hay una paralela única, y construir una Geometría rigurosamente lógica como si no existiera tal postulado. Si éste era una consecuencia de los demás, debía llegarse a una contradicción, que es la prueba matemática de la falsedad. Pues bien, Lobatschewski no sólo no llegó a ninguna contradicción, sino que se encontró con una Geometría nueva, distinta de la de Euclides, pero sin oposición lógica con ella, una Geometría que podía convivir con la griega en un sector más amplio que el que conserva el nombre primitivo aunque haya alterado su significación. El postulado de Euclides no es, pues, verdadero ni falso. Todo depende del punto de vista en que nos coloquemos, y si hasta entonces nadie lo había puesto en duda era, según palabras de Lobatschewski, "porque no se encuentra ninguna contradicción en sus consecuencias y porque la medida directa de los ángulos de un triángulo está de acuerdo con él dentro de los límites de error de las medidas más perfectas", quedando el criterio de la experiencia, que sería decisivo si pudieran calcularse los ángulos de un triángulo cuyos lados fueran inmensamente grandes, como el definido por tres estrellas del mundo extragaláctico. En la Geometría de Lobatschewski una recta puede ser perpendicular a sí misma; la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos; por un punto hay dos paralelas a una recta, y otras propiedades que desconciertan al principio porque chocan con nuestro concepto intuitivo de espacio, pero que están lógicamente encadenadas y han tenido dos consecuencias trascendentales:

derribar el postulado de Euclides del lugar de privilegio que ocupaba en la Geometría y destruir la concepción kantiana de espacio.

El descubrimiento de Lobatschewski es una piedra miliar en la historia de la Geometría, sobre la cual hay que grabar una fecha: 12/24 de febrero de 1826, día en que el geómetra ruso, que tenía entonces treinta y tres años, presentó su comunicación a la Sociedad de Física y Matemática de Kazan, de cuya Universidad era profesor.

Acaso los no matemáticos crean que la Geometría lobatschewskiana es solo un producto mental sin ninguna realidad y que la de Euclides es la verdadera dando a las palabras realidad y verdad su sentido corriente, el que les asigna el hombre de la calle. Un sencillo ejemplo le sacará de su posible error. La más corta distancia entre dos puntos es la línea recta... en un plano; pero sobre la superficie de la Tierra, la más corta distancia entre dos puntos es un arco de círculo máximo, lo que obliga a introducir en Geometría la noción de geodésico de una superficie que es eso: la línea de mínima distancia entre dos puntos, de modo que en el plano las geodésicas son los segmentos rectilíneos euclídeos. Excepto en una pequeña extensión, el mar no es una superficie plana, sino esférica, luego la geometría del navegante no es la Geometría de Euclides, y, por tanto, ésta no es la única Geometría real y verdadera útil al hombre.

En un plano, dos geodésicas se cortan en un punto, a no ser que sean paralelas, y no contienen espacio, mientras que en la superficie esférica dos geodésicas se cortan siempre en dos puntos y contienen espacio.

Entendido esto, pasemos a una superficie menos familiar que la esfera: la pseudoesfera, descubierta por un matemático Italiano: Eugenio Beltrami, el año 1868, precisamente para dar un sentido euclídeo a la Geometría de Lobatschewski.

La pseudoesfera está engendrada por la rotación de una curva llamada *tractriz* de un modo análogo a como la esfera está engendrada por la rotación de una circunferencia alrededor de un diámetro. Es la *tractoria* de Huygens y de Leibniz, que encontraron su ecuación; pero no se le ocurrió la idea de hacerla girar. La tractriz tiene la propiedad de que los segmentos de tangente comprendidos entre el punto de contacto y la asíntota son iguales, propiedad que puede servir para construirla mecánicamente. Supongamos dos ejes, uno horizontal y otro vertical, y coloquemos un hilo inextensible a lo largo del eje vertical, poniendo un extremo en el punto de intersección de los dos ejes y corrámoslo sobre el horizontal hacia la derecha. Si el otro extremo del hilo lleva un plomo, éste, en virtud de la propiedad citada, describe una rama de la curva, y corriéndolo hacia la izquierda describe la otra rama, que es simétrica de la anterior. Haciendo girar ahora la curva alrededor del eje horizontal se engendra la pseudoesfera, cuya forma se asemeja a la de dos trompas muy alargadas, como los clarines, soldadas por sus pabellones. Pues bien, la Geometría de la superficie de la pseudoesfera es precisamente la de Lobatschewski.

Dejemos la obra del matemático y asomémonos un poco a la vida del hombre. Nació Nicolás Ivanovich Lobatschewski el día 2 de noviembre de 1793 en el distrito de Makiarev, dependiente del gobierno de Nijni Novgorod, y fue el segundo hijo de un modesto funcionario que murió cuando Nicolás tenía siete años, dejando a su esposa, Praskovia Ivanovna y tres niños, un tercero había nacido quince meses después que el futuro geómetra, en una pobreza rayana con la miseria. Haciendo un esfuerzo apenas concebible en la Rusia zarista de aquellos días, la madre de Nicolás se trasladó a Kazan para dar instrucción a sus hijos, y dos años después, cuando tenía nueve, Nicolás empezó sus estudios secundarios, gracias a una beca ganada por sus propios méritos, y entonces trabó conocimiento con la Matemática que cultivó después con verdadera pasión en la Universidad, fundada hacia poco tiempo, y en la que ingresó en el año 1807. El zar Alejandro I, queriendo hacer del primer establecimiento docente de Kazan una universidad de tipo europeo, llamó a varios profesores alemanes, quienes, viendo en seguida que Lobatschewski era un

matemático en estado potencial, le dedicaron atención preferente. Entre ellos estaba Bartels, antiguo condiscípulo y amigo fiel de Gauss, y a quien debió gran parte de la orientación geométrica que había de conducirle a la inmortalidad.

En 1811 obtuvo el título de maestro; dos años después fue nombrado profesor adjunto y tres años más tarde, apenas cumplidos los veintidós, catedrático titular de Matemática.

La labor desarrollada por Lobatschewski fue formidable. Por aquellos días empezó a preocuparle el problema del paralelismo y, según se deduce de un cuaderno de notas, que se conserva hoy como una reliquia, parece que sus primeros resultados los envió a Fuss, matemático suizo que estaba entonces en San Petersburgo y trabajaba con el gran Euler, compatriota suyo, desde que Catalina II nombró a éste presidente de la Academia imperial rusa. Fuss encontró demasiado revolucionarias las ideas de Lobatschewski y perdió el original, que apareció casi un siglo después y hoy forma parte de la edición de sus obras completas ordenada por el Gobierno soviético, que ha llenado la laguna que dejó la Universidad de Kazan al publicar, al cumplirse los veinticinco años de la muerte de Lobatschewski, sólo sus obras geométricas.

Además de su labor de cátedra, éste explicaba cursos complementarios con objeto de elevar la cota matemática, bastante baja, de la Rusia de su tiempo, y ordenó la biblioteca universitaria, que era un caos.

A la muerte de Alejandro, 1825, sustituyó al administrador de la Universidad, cargo que desempeñó con tanto acierto como honorabilidad, en contraste con su antecesor, que había sido expulsado por malversador de fondos.

En 1827 lo nombraron rector. Cerca de veinte años estuvo al frente del rectorado y cambió radical y totalmente el ambiente universitario. La Universidad era su casa y su vida. Una mañana muy temprano apareció en el vestíbulo un extranjero, quien, dirigiéndose al criado que, en mangas de camisa, barría el suelo, manifestó su deseo de visitar el edificio. El criado no sólo accedió a ello sino que, dejando en un rincón los chismes de la limpieza, se brindó a servirle de guía, dejando asombrado al visitante por la precisión con que respondía a sus preguntas, lo que hizo creer a aquél que eso del atraso del pueblo ruso era una fantasía inventada por los periodistas occidentales. Fácil es imaginar la estupefacción del extranjero, que era un representante diplomático acreditado cerca de la corte de San Petersburgo, de paso por Kazan, cuando aquella noche, en un banquete oficial dado en su honor, reconoció, al serle presentado el rector de la Universidad, al mozo de limpieza que por la mañana le había servido de cicerone.

De cómo entendía sus obligaciones es ejemplo lo ocurrido en 1830, durante una epidemia de cólera que causó millares de víctimas en Kazan, cosa natural, dada la espantosa miseria reinante en las clases populares rusas de aquella época que, en vez de acudir al médico, acudían al pope, y el hacinamiento en los templos no hizo sino aumentar la mortandad. Lobatschewski alojó en la Universidad a todos los profesores y sus familias, los sometió a un severísimo régimen higiénico, y de las seiscientas personas refugiadas en las aulas sólo murieron dieciséis, es decir: el dos y medio por ciento, cifra asombrosamente pequeña.

Gracias a su actividad y celo, se salvó también la biblioteca universitaria del incendio de 1842, que destruyó media ciudad y entre ella gran parte de la Universidad.

Este hombre de tan excepcionales cualidades fue desposeído de su cargo no sólo como rector, sino también como profesor el año 1846 porque sí, por esas absurdas cosas incomprensibles que ocurrían en la Rusia zarista, y fue en balde, y hasta contraproducente, que el claustro de profesores protestara contra aquel atropello; pero el buen sentido se impuso, en 1855, con motivo de las fiestas del cincuentenario de la Universidad, en que Lobatschewski presentó el original de su *Pangeometría*, manuscrito en ruso y en francés por otra persona porque él estaba casi ciego, y al año siguiente, el día 12/24 de febrero, exactamente el día del trigésimo aniversario de su

primera comunicación sobre la Geometría no-euclídea, murió el hombre que tuvo la audacia de desafiar el dogma griego del paralelismo que durante cerca de veintidós siglos había reinado como monarca absoluto en el campo de la Geometría.

En la dirección ideológicamente opuesta de Lobatschewski está Hamilton, que nació doce años después que el geómetra ruso y le sobrevivió nueve, de modo que tienen común un período de cuarenta y un años, a pesar de lo cual se ignoraron mutuamente: ignorancia lamentable por parte de Hamilton, porque si éste hubiera conocido la obra de aquél, no habría fundado el Álgebra sobre el concepto kantiano de tiempo y hubiera dedicado buena parte del suyo a otras tareas, toda vez que la Geometría no-euclídea, al demostrar la inconsistencia del apriorismo espacial, habría advertido a Hamilton que el apriorismo temporal llevaba el mismo camino. Esto no quiere decir que la producción hamiltoniana sea de escaso valor. A Hamilton le debe la ciencia grandes y fecundas aportaciones que han hecho que su nombre figure entre los iniciadores de la Matemática moderna, pero su kantianismo le impidió tener una visión más precisa del estado del Álgebra de su época, del que hablaremos brevemente luego de dibujar a grandes rasgos el perfil personal del polo opuesto de Lobatschewski desde el punto de vista de la filosofía matemática,

Hamilton era irlandés. Nació en Dublín el 3 de agosto de 1805 y su nombre de pila era William Rowan, lo que ha hecho que muchos lo confundan con su coetáneo y homónimo William Hamilton, filósofo y profesor de Lógica de la Universidad de Edimburgo. También los confundieron algunos contemporáneos, lo cuál molestaba grandemente al matemático. En su tumba figura como fecha de nacimiento el 4 de agosto, error que obedece a que nació a media noche en punto. Hamilton, enamorado de los pequeños detalles, decía haber nacido el 3, pero al final de su vida rectificó "por razones sentimentales" y aceptó el 4.

Cuando tenía tres años, su padre, que era abogado, lo envió con su hermano James, pastor del pueblecito de Trim, a treinta kilómetros de la capital de Irlanda, para que aprendiera lenguas orientales.

Al llegar Hamilton a Trim, sabía inglés, lo que, naturalmente, no tiene nada de particular, pero sí tiene ya algo y aun *algos* de particular que a los cinco años tradujera latín, griego y hebreo; que a los ocho supiera francés e italiano y cantase en hexámetros latinos las bellezas del paisaje de Irlanda cuando la prosa inglesa le parecía pobre para tal menester. A los diez años conocía el árabe y el persa, y exactamente tres meses después, James Hamilton escribía a su hermano el abogado: "Tu hijo no puede saciar su sed de aprender lenguas orientales. Las sabe casi todas, aparte de algunos dialectos poco importantes. El conocimiento del hebreo, persa y árabe lo va a completar con el del sánscrito. Ha aprendido ya los elementos del caldeo y del siríaco, del indostánico y de los idiomas que hablan los países malayos y otros, y va a comenzar el chino; pero aquí es difícil procurarse libros apropiados y cuesta caro traerlos de Londres. Sin embargo, hará un sacrificio porque tengo la seguridad de que es la mejor colocación que puedo dar al dinero."

No había cumplido los catorce años cuando Hamilton, caso único de monstruosidad lingüística, escribió un poema en persa dando la bienvenida al embajador del shah, que visitaba Dublín. El encopetado personaje hizo llevar a su presencia al autor de los versos y quedó maravillado al encontrarse con que era un niño. A Hamilton se le puede aplicar, invertida su significación, la conocida décima:

*Asombróse un portugués  
de ver que en su tierna infancia  
todos los niños en Francia  
supieran hablar francés.  
Arte diabólica es,  
dijo torciendo el mostacho,  
que para hablar en gabacho  
un fidalgo en Portugal  
llega a viejo y lo habla mal  
y allí lo parla un muchacho.*

Además de saber tan enorme cantidad de idiomas, sabía con igual maestría esgrima y natación y era de carácter tan irascible que a un condiscípulo que le llamó mentiroso lo desafió a muerte, pero los padrinos arreglaron la cosa y no pasó nada. Hamilton tenía entonces quince años escasos. Por aquellos días fue a Trim un famoso calculador norteamericano; un tal Zerath Colburn, que influyó en la futura orientación de Hamilton. Tuvo con él una conversación de la que sacó el convencimiento de que la lingüística no servía para nada. Colburn le descubrió trucos, diciéndole que todo era cuestión de memoria: de memoria monstruosa, porque en una ocasión un espectador preguntó a Colburn si el número 4294967297 era primo, y el calculador contestó instantáneamente y sin vacilar, que no, porque era divisible por 641, lo cual es cierto.

Precisamente tal número es el quinto de Fermat y costó no poco trabajo encontrarle el divisor 641 tan rápidamente dado por Colburn, quien no supo responder cómo había averiguado lo que Euler descubrió un siglo antes.

Hay una carta de Hamilton a su primo Arturo en la que reconoce que Colburn le convenció de la inutilidad lingüística y entonces pensó dedicarse a la Matemática. lo que hizo con la misma intensidad con que se había entregado al estudio de los idiomas, pues a los diecisiete años sabía Cálculo Integral y a los dieciocho ingresaba en el Trinity College de Cambridge con el número 1 en una promoción de cien candidatos. Y no estará de más advertir que se preparó solo.

A los diecinueve años tuvo la primera novia, cuya belleza se dedicó a cantar en versos griegos y, ¡claro! ella se casó con otro. Hamilton sufrió un ataque de nervios cuando la que pudo ser su suegra le dio la noticia, e intentó suicidarse arrojándose al río, pero como era buen nadador, no consiguió, a pesar suyo, hundirse, y se consoló componiendo un poema "a la ingrata". Hamilton fue, en esto, un goethiano puro.

El año 1827, es decir, cuando apenas tenía veintidós de edad, fue nombrado profesor de Astronomía de la Universidad de Dublín y director del Observatorio anexo a la cátedra, y aquel mismo año, durante unas vacaciones, conoció en el pintoresco distrito de los lagos al poeta Wordsworth. Al día siguiente de serle presentado Hamilton le envió un poema de noventa versos, muy malos por cierto.

No fue así su *Theory of system of Rays*, publicada en igual fecha en las *Transactions of the Royal Irish Academy*, que es un profundo estudio de los sistemas doblemente infinitos de las rectas en el espacio en relación con el problema de la refracción, de la luz, que llamó poderosamente la atención de los físicos y cuyas conclusiones se comprobaron después experimentalmente.

Poco después tuvo la segunda novia. Hamilton debió de haberse olvidado ya de lo que pasó con la primera porque también componía versos esta vez en latín, a los lindos ojos de la segunda, la cual hizo lo mismo que aquélla: casarse con otro.

La vena poética de Hamilton era inagotable. A Coleridge también le dedicó interminables poemas como a Wordsworth; pero, a diferencia de éste, que los soportaba pacientemente,

Coleridge se vengaba devolviéndole indigestas meditaciones sobre la Trinidad y otros misterios teológicos, lo cual sacaba de sus casillas a Hamilton, quien, pluma en ristre, le rebatía sus argumentos en hexámetros de hemistiquios mal partidos.

Veinticinco años tenía cuando se enamoró por tercera vez y, como se dice en Castilla, "a la tercera va la vencida". Se casó. Ella se llamaba Elena Bayley y, seguramente, no fue víctima del lirismo hamiltoniano porque si lo hubiera sido habría hecho lo que sus dos antecesoras. Además, parece que quedó curado de esta manía, porque no se conocen versos suyos posteriores a su matrimonio.

En cambio, y afortunadamente para la Ciencia, aumentó su producción matemática, publicando al poco tiempo de casado una memoria titulada *Theory of conjugate functions, or algebric couples, and Essay on Algebra as science of pure time*, Irish Trans., 1837.

Esta memoria tiene un vicio de origen: su ortodoxia kantiana. El Álgebra, como ciencia del tiempo puro, no tiene ningún sentido matemático, y, precisamente por esto, apasiona y seguirá apasionando a los aficionados, como apasionan y seguirán apasionando los problemas de la cuadratura del círculo y de la trisección del ángulo, la demostración del postulado de Euclides y otras cuestiones de Matemática patológica de cuyos cultivadores conviene huir como medida de profilaxis.

Pero, al lado del vicio apuntado, la memoria de Hamilton tiene una virtud: la de considerar los números complejos como una pareja de números reales en un cierto orden, lo que le permitió construir una teoría aritmética que ha despojado a los mal llamados números imaginarios de su misterio, verdaderamente imaginario, que los hacía aparecer, ¡a ellos, tan inofensivos! como monstruos.

La teoría aritmética del número complejo, cuya representación gráfica es un vector en un plano, inspiró a Hamilton la idea de generalizar al espacio la interpretación de las rotaciones en el plano, y se encontró con la sorpresa de que había creado unos entes, a los que dio el nombre de cuaternios, que no satisfacían la ley conmutativa del producto, es decir: que el orden de factores altera el producto.

Este descubrimiento tiene una fecha exacta: 16 de octubre de 1863, en que Hamilton, paseando con su esposa, fue asaltado por la fórmula fundamental de la nueva Álgebra y la escribió en el parapeto del puente que cruzaba en aquel momento.

El cálculo de cuaternios es un poco complicado. Aparte de su dificultad intrínseca, tiene el inconveniente la notación, que es verdaderamente anárquica, pues da autor tiene la suya propia.

El Congreso de Cassel de 1903 intentó poner orden en este caos y, en efecto, todos los matemáticos estaban de acuerdo en que era preciso uniformar la notación, en vista de lo cual acordaron... tres notaciones nuevas.

A los efectos de estos ensayos de divulgación baste decir que el principal mérito de la obra hamiltoniana es haber podido establecer un Álgebra consecuente consigo misma en la que no se verifica la propiedad de la inalterabilidad del producto cualquiera que sea el orden en que se multipliquen los factores.

En vista de esto, era lógico que los matemáticos se preguntaran si había otros sistemas de números de más de dos componentes reales que verificaran todas las leyes formales de la Aritmética. Weierstrass resolvió negativamente la cuestión, demostrando el llamado teorema final de la Aritmética, es decir: el teorema con que termina el desarrollo natural de esta ciencia. El descubrimiento de Hamilton enseña el camino que hay que seguir para establecer otros sistemas de Álgebra, y hoy se construyen Álgebras a voluntad, es decir: sistemas que comprenden un conjunto de elementos y dos operaciones, llamadas adición y multiplicación que

se pueden efectuar con dos elementos del conjunto de tal manera que satisfagan los postulados que previamente se hayan establecido.

La teoría de cuaternios gozó del favor de los físicos de las dos últimas generaciones; pero hoy está sustituida por el Análisis sensorial, más sencillo, que ha tomado gran impulso a partir de 1905 gracias a la relatividad generalizada. No obstante, sigue teniendo apasionados defensores, los cuales cuentan con una Liga mundial para el progreso de la teoría de cuaternio, fundada en 1895 por el matemático japonés Kimura, que hizo sus estudios en los Estados Unidos.

Hamilton murió creyendo que había realizado una obra análoga a los *Principia* de Newton. "Mi descubrimiento, dijo, me parece tan interesante a mediados del siglo XIX como lo fue el de las fluxiones [Cálculo Diferencial] a fines del XVII." Se equivocó, y la culpa de su equivocación la tuvo Kant.

Los últimos años de Hamilton contrastan con los primeros. Quizá un poco borrachín, pero humilde y devoto. El día final de su vida fue el 2 de septiembre de 1865, y murió de gota. En su mesa de trabajo se encontraron verdaderas montañas de papel, y entre ellas, restos de comida y hasta platos intactos.