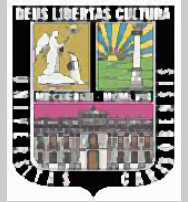


UNIVERSIDAD DE CARABOBO
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y
COMUNICACIONES

Teoría electromagnética I
Apuntes de clase de Electrostática
(borrador)

Alfonso Zozaya



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

1

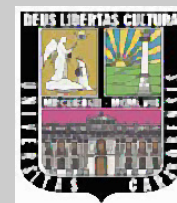


Salir



Índice

1. Campo electrostático	5
1.1. Ley de Coulomb	5
1.2. Campo electrostático	6
1.3. Divergencia del campo electrostático	8
1.4. Rotacional del campo electrostático	9
1.5. Ecuaciones de Maxwell para el campo electrostático	10
1.6. Ley de Gauss	10
1.7. Potencial electrostático	12
1.8. Medios materiales inmersos en un campo electrostático	12
1.8.1. Conductores	12
1.8.2. Condiciones en la frontera entre un conductor y el vacío	12
1.8.3. Dipolo eléctrico	13
1.8.4. Dieléctricos	13
1.8.4.1. Polarización	13
1.8.5. Densidad de flujo y constante dieléctrica	14
1.8.6. Condiciones en la frontera entre dos dieléctricos	14
1.9. Energía electrostática	14
1.10. Capacitancia	16
2. Ejercicios	17



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

2



||

Salir



Índice de figuras

1.	Dos cargas puntuales separadas una distancia R_{21}	5
2.	Representación gráfica de la distribución volumétrica de carga y el punto de observación.	7
3.	Punto de observación en el interior de la distribución.	8
4.	Ley de Gauss	11
5.	Dipolo eléctrico	13
6.	Capacitancia	16



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

3

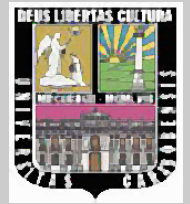


Salir



Índice de cuadros

1. Expresión del campo electrostático para diferentes distribuciones de carga. $\mathbf{R}_n = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n$, $\mathbf{a}_{R_n} = \mathbf{R}_n/R_n$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/R$ 7
2. Energía electrostática acumulada por una distribución de cargas 14



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

4



|| Salir



1. Campo electrostático

1.1. Ley de Coulomb

Coulomb estableció experimentalmente que sobre dos cargas eléctricas puntuales q_1 y q_2 , separadas una distancia R , actúa una fuerza F que es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{R^2} \quad (1)$$

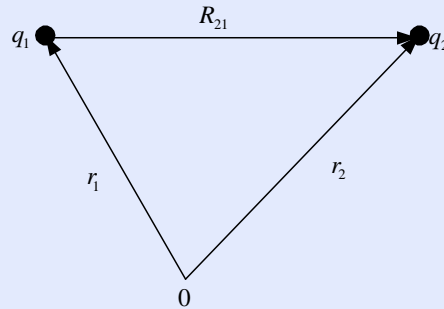
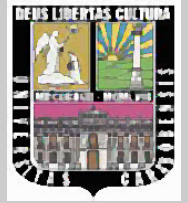


Figura 1: Dos cargas puntuales separadas una distancia R_{21}

Si q_1 y q_2 son de polaridad opuesta, la fuerza es de atracción, y si q_1 y q_2 son de la misma polaridad, la fuerza es de repulsión. Además, la fuerza es colineal con el vector que une las dos cargas. Vectorialmente se escribe (figura



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

5



Salir





UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

1):

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{R_{21}^2} \mathbf{a}_{R_{21}} \quad (2)$$

donde $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{a}_{R_{21}} = \mathbf{R}_{21}/R_{21}$.

En el sistema internacional SI de medidas, la constante de proporcional k vale $k = 1/4\pi\epsilon_0$.

1.2. Campo electrostático

El campo electrostático se define mediante el limite:

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (3)$$

de modo que una carga puntual puesta en \mathbf{r}' produce en \mathbf{r} un campo electrostático dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{a}_R \quad (4)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/R$. Se dice que el vector \mathbf{r}' es el vector de posición del **punto fuente** y el vector \mathbf{r} es el vector de posición del **punto de observación**.

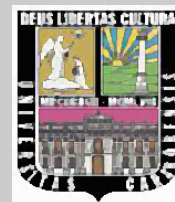
La expresión 4 se puede generalizar para el caso de N cargas discretas o infinitas cargas infinitesimales distribuidas en un volumen (figura 2), una superficie o una línea (cuadro 1).

6



Salir





UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

<i>una carga puntual</i>	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{a}_R$
<i>N cargas discretas puntuales</i>	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n^N q_n \frac{\mathbf{a}_{R_n}}{R_n^2}$
<i>distribución volumétrica de cargas ρ_v</i>	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dV'$
<i>distribución superficial de cargas ρ_s</i>	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \rho_s(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} ds'$
<i>distribución lineal de cargas ρ_ℓ</i>	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \rho_\ell(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\ell'$

Cuadro 1: Expresión del campo electrostático para diferentes distribuciones de carga.

$\mathbf{R}_n = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n$, $\mathbf{a}_{R_n} = \mathbf{R}_n/R_n$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/R$.

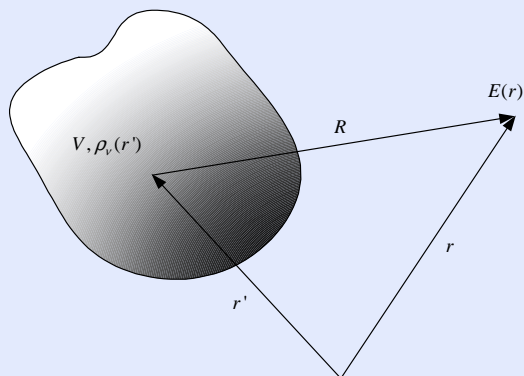


Figura 2: Representación gráfica de la distribución volumétrica de carga y el punto de observación.

7



Salir



1.3. Divergencia del campo electrostático

Calcularemos la divergencia del campo electrostático basándonos en la expresión general del campo.

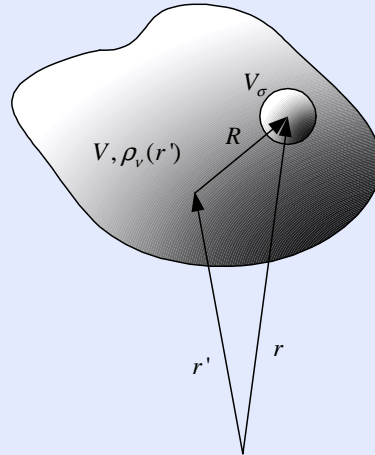
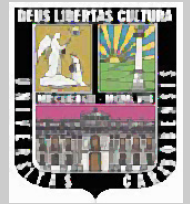


Figura 3: Punto de observación en el interior de la distribución.



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

8



Salir





UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_\nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_\nu(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) d\nu' = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\sigma} \rho_\nu(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) d\nu' & \mathbf{r} = \mathbf{r}'. \end{cases} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\sigma} \rho_\nu(\mathbf{r}) \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) d\nu' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_\nu(\mathbf{r}) \oint_{S_\sigma} \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{s}' = \frac{\rho_\nu}{\epsilon_0} \quad (5)
 \end{aligned}$$

1.4. Rotacional del campo electrostático

De manera análoga calcularemos el rotacional del campo electrostático:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_\nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_\nu(\mathbf{r}') \nabla \times \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) d\nu' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_\nu(\mathbf{r}') \nabla \times \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\nu' = 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

9



Salir



1.5. Ecuaciones de Maxwell para el campo electrostático

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

1.6. Ley de Gauss

Evaluemos el flujo del campo eléctrico:

$$\begin{aligned} \Phi_S^{\mathbf{E}} &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \oint_S \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \rho_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_r}{R^2} d\nu' \right] \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \rho_v(\mathbf{r}') \oint_S \frac{\mathbf{a}_r}{R^2} \cdot d\mathbf{s} d\nu' \quad (9) \end{aligned}$$

la cantidad subintegral $\mathbf{a}_R/R^2 \cdot d\mathbf{s}$ se conoce como **diferencial de ángulo sólido**.

En efecto, el ángulo sólido subtendido en el punto localizado en \mathbf{r}' por la superficie ds con centro en el punto localizado en \mathbf{r} vale:

$$d\Omega = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{s} \quad (10)$$



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

10



Salir



De modo que los puntos de la distribución que se encuentran en el volumen común V_c encerrado por las superficies S' y S , subtienden un diferencial de ángulo sólido que se mantiene de un solo signo (ej.: ds_2 en la figura 4), mientras que los puntos que se encuentran fuera del volumen encerrado por S subtienden dos veces el mismo ángulo sólido cada uno con signo contrario (ej.: ds_1 y $-ds_1$ en la figura 4). De aquí sigue:

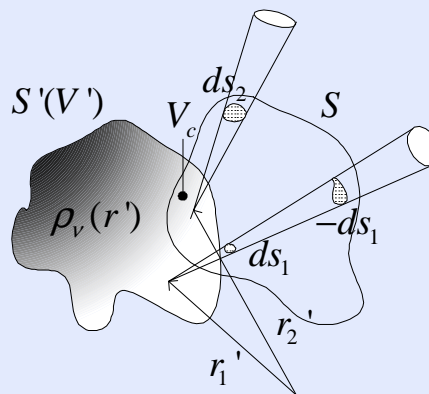


Figura 4: Ley de Gauss

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \rho_v(\mathbf{r}') \oint_S d\Omega \, d\nu' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'-V_c} \rho_v(\mathbf{r}') \oint_S d\Omega \, d\nu' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V_c} \rho_v(\mathbf{r}') \oint_S d\Omega \, d\nu' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V_c} \rho_v(\mathbf{r}') \oint_S d\Omega \, d\nu' = \frac{Q}{\epsilon} \quad (11) \end{aligned}$$

donde Q es la carga encerrada por S .

1.7. Potencial electrostático

1.8. Medios materiales inmersos en un campo electrostático

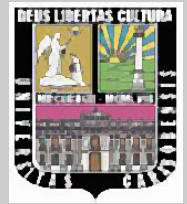
1.8.1. Conductores

- El campo electrostático en el interior de un conductor es nulo ($\mathbf{E} = 0$).
- En el interior de un conductor no se acumulan cargas eléctricas libres:
 $\rho_v = 0$
- Un medio conductor presenta el mismo potencial en todos sus puntos en condiciones estáticas.

1.8.2. Condiciones en la frontera entre un conductor y el vacío

- Del lado del conductor $\mathbf{E} = 0$.
- Del lado del vacío:

$$\begin{aligned} E_t &= 0 \\ E_n &= \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (12)$$



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

12



Salir



1.8.3. Dipolo eléctrico

Un **dipolo eléctrico** está constituido por dos cargas puntuales de igual valor pero de signo contrario separadas una distancia d (figura 5). El potencial en \mathbf{r} producido por un dipolo cuyo centro se encuentra en \mathbf{r}' , para el cual se cumple la condición $r \gg d$, vale:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} \quad (13)$$

donde \mathbf{p} se conoce como el **momento dipolar eléctrico** y vale:

$$\mathbf{p} = qd\mathbf{a}_p$$

donde \mathbf{a}_p es un vector unitario que yace sobre la línea que une las dos cargas y apunta de menos a más.

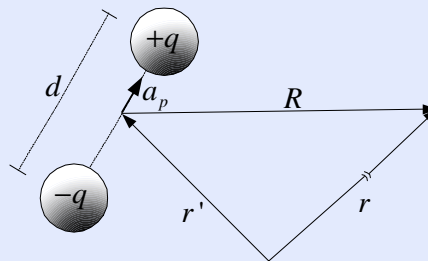
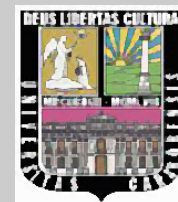


Figura 5: Dipolo eléctrico

1.8.4. Dieléctricos

1.8.4.1. Polarización ➤ La **permitividad relativa** o **constante dieléctrica** ϵ_r es una cantidad adimensional.

➤ La **permitividad absoluta** o simplemente **permitividad** $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ se mide en [F/m].



1.8.5. Densidad de flujo y constante dieléctrica

1.8.6. Condiciones en la frontera entre dos dieléctricos

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ \mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

1.9. Energía electrostática

Al *conformar* una distribución de cargas se debe «gastar» cierta energía que luego, mientras perdura la distribución, queda almacenada en la distribución en forma de **energía electrostática**. La energía electrostática se puede calcular sumando el trabajo requerido para poner todas las cargas en su lugar dentro de la distribución, trayéndolas desde el infinito una por una. Este cálculo da como resultado la primera ecuación que se muestra en el cuadro 2. En el cuadro 2, el potencial V_n debe leerse como el potencial en el punto

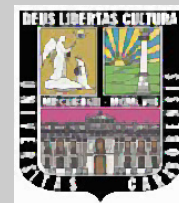
<i>N</i> cargas puntuales	$W_e = \frac{1}{2} \sum_n^N q_n V_n$ [J]
distribución volumétrica de cargas	$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_v(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\nu$ [J]
	$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\nu$ [J]

Cuadro 2: Energía electrostática acumulada por una distribución de cargas

ocupado por la carga q_n debido a las $N - 1$ cargas restantes de la distribución. De forma análoga debe interpretarse la cantidad subintegral $\rho_v(\mathbf{r}) d\nu V(\mathbf{r})$. En cuanto a la última expresión de W_e dentro de la tabla, la misma se obtiene

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \int_V \rho_\nu V \, d\nu = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) V \, d\nu \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (V \mathbf{D}) \, d\nu - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \nabla V \, d\nu \\
 &= \frac{1}{2} \int_S V \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n \, ds + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\nu \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\nu \quad (15)
 \end{aligned}$$



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

15



||

Salir



1.10. Capacitancia

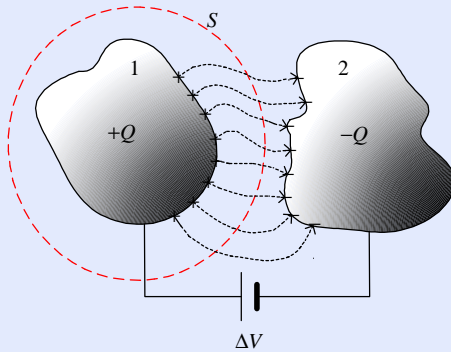
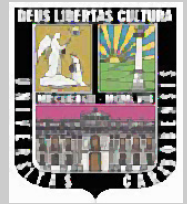


Figura 6: Capacitancia

de la diferencia de potencial aumenta proporcionalmente la cantidad de cargas en la superficie de los conductores. Un sistema como este se caracteriza por poseer una **capacitancia**. La capacitancia es precisamente este factor de proporcionalidad y se define mediante la relación:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{-\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (16)$$

Cuando se establece una diferencia de potencial entre dos cuerpos conductores originalmente neutros se produce (induce) una redistribución de sus cargas eléctricas. Las cargas se redistribuyen sobre la superficie de los conductores almacenando energía electrostática. La energía electrostática que puede ser almacenada es en general una función de la geometría del sistema constituido por los dos conductores y el medio dieléctrico que les separa, y de las propiedades intrínsecas de este último. Se observa que al aumentar el valor



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

16

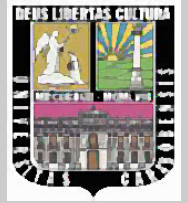


Salir



2. Ejercicios

1. Una línea de carga de longitud L finita tiene una densidad de carga lineal ρ_L [C/m] uniforme. Suponiendo la línea yacente sobre el eje x , calcule:
 - a) El potencial V en el plano que divide en dos partes iguales la línea de carga (2 ptos.).
 - b) El campo electrostático \mathbf{E} directamente a partir de ρ_L (integrando) (2 ptos.).
 - c) El campo electrostático a partir de $-\nabla V$ (2 ptos.).
2. Dos semiplanos conductores de dimensiones infinitas forman un ángulo $\Delta\varphi$. Entre estos semiplanos hay un medio de propiedades intrínsecas ε y σ .
 - a) Calcular, utilizando ambos métodos ($C = Q/\Delta V(Q)$ y $C = Q(\Delta V)/\Delta V$) la capacitancia asociada a la porción del sistema definida por $\Delta z = h$ y $\Delta\rho = \rho_e - \rho_i$ (3 pto.).
 - b) Calcular la resistencia R asociada a la misma porción del sistema mediante la fórmula $R = \Delta V/I$ (2 ptos.).
 - c) Comprobar que $RC = \varepsilon/\sigma$ (2 ptos.).
3. Dada una distribución volumétrica de cargas libres $\rho_v = \rho^2$ [C/m³], determine:



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

17



Salir





UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

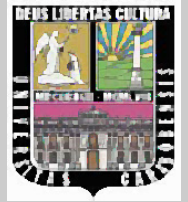
- a) El campo electrostático en todos los puntos del espacio (2 pts.).
 - b) La energía electrostática por unidad de volumen en el espacio (2 pts.).
 - c) Si el espacio se supone ocupado por un medio de permitividad ε , calcule ρ_{vp} (3 pts.).
4. Una distribución de carga lineal ρ_L [C/m] uniforme tiene forma circular con radio a [m]. Calcule:
- a) El potencial V en los puntos sobre la línea central y perpendicular a la distribución (2 pts.).
 - b) El campo electrostático \mathbf{E} directamente a partir de ρ_L (integrando) (2 pts.).
 - c) El campo electrostático a partir de $-\nabla V$ (2 pts.).
5. Dos conductores de dimensiones infinitas forman un ángulo $\Delta\theta$. Entre los dos conductores hay un medio de propiedades intrínsecas ε y σ .
- a) Calcular, utilizando ambos métodos ($C = Q/\Delta V(Q)$ y $C = Q(\Delta V)/\Delta V$) la capacitancia asociada a la porción del sistema definida por $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ y $\Delta r = r_e - r_i$ (3 pts.).
 - b) Calcular la resistencia R asociada a la misma porción del sistema mediante la fórmula $R = \Delta V/I$ (2 pts.).
 - c) Comprobar que $RC = \varepsilon/\sigma$ (2 pts.).

18



Salir





UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

19



Salir



6. Dada una distribución volumétrica de cargas libres $\rho_v = \rho_0 r$ [C/m³], determine:
- a) El campo electrostático en todos los puntos del espacio (2 ptos.).
 - b) La energía electrostática por unidad de volumen en el espacio (2 ptos.).
 - c) Si el espacio se supone ocupado por un medio de permitividad ϵ , calcule ρ_{vp} (3 ptos.).

Índice alfabético

capacitancia, 16

conductores, 12

dieléctricos, 13

diferencial de ángulo solido, 10

dipolo eléctrico, 13

divergencia del campo electrostático,
co, 8

energía electrostática, 14

ley de Coulomb, 5

ley de Gauss, 10

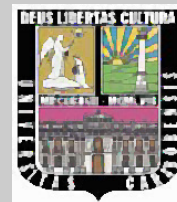
momento dipolar eléctrico, 13

potencial electrostático, 12

punto de observación, 6

punto fuente, 6

rotacional del campo electrostático,
9



UNIVERSIDAD DE
CARABOBO

Alfonso Zozaya

20



||

Salir

