

Matemàtiques

Llicenciatura de Química, 7-9-2006

1. Considerem la funció $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.
 - (a) Dibuixeu-ne la gràfica.
 - (b) Calculeu la derivada direccional de $f(x, y)$ en el punt $(1, -1)$ i en la direcció donada pel vector $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
 - (c) Expliqueu el significat geomètric (raonant sobre la gràfica) del signe de la derivada direccional de l'apartat b).
2. Sigui $T(x, y) = x^2 + y^2$ la funció que dona la temperatura dels punts d'una planxa metàl·lica. Demostreu que la temperatura en tot punt del disc

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$$

és inferior a la temperatura en qualsevol punt de la regió limitada per les rectes $x - y = 5$, $x = 5$ i $y = -5$. Per això demostreu que el màxim absolut de T sobre la primera regió és menor que el mínim de T sobre la segona regió.

3. Sigui S la regió del semiplà superior fitada per les circumferències $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$. La densitat en qualsevol punt de S és proporcional a la distància al centre del cercle. Determineu el centre de masses de S .

- 4. Considereu la superfície $S = \{z = 1 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 1\}$ orientada pel vector normal $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x, 2y, 1)$. Calculeu un dels dos següents apartats:

- (a) l'àrea de S ;
- (b) el flux $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ del camp $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ a través de S .