

- 1.- (a) Calculeu $\int_D e^{x+y}$ on $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.
(b) Calculeu la massa d'un sòlid limitat per dues esferes concèntriques de radis a i b , si la densitat en cada punt és proporcional al quadrat de la seva distància al centre.

2.- Donat el camp

$$X = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

- (a) Calculeu la circulació de X sobre la circumferència C de radi $a > 0$:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$$

orientada positivament.

- (b) Apliqueu la fórmula de Green per calcular la circulació de X sobre la vora de la corona A (amb la orientació de la vora induïda)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

- (c) Calculeu la circulació de X sobre la vora del quadrat Q (amb la orientació de la vora induïda)

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

- 3.- Volem construir una capsa amb forma de prisma rectangular sense la tapa superior i tal que contingui un volum, V , de 32 centímetres cúbics. Trobeu quines han de ser les mides de la capsa, per tal que la seva superfície total, S , sigui mínima, de les dues maneres següents:

- (a) Ailleu l'alçada de la capsa, usant que $V = 32$ i reemplaceu aquesta alçada a la fórmula que ens dona S . D'aquesta manera obtindreu una funció de dues variables, la base i l'alçada de la capsa. A partir d'aquesta expressió continueu estudiant el problema.
(b) Usant el mètode dels multiplicadors de Lagrange.

Quin mètode dona més informació?

- 1.- L'altura d'una muntanya sobre el punt (x, y) ve donada per la funció $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, on $x^2 + y^2 \leq 1$. Dibuxeu la gràfica de la funció f . Un excursionista està al punt $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En quina direcció ha de caminar per trobar el màxim pendent?

- 2.- Calculeu el centre de masses de la regió

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$$

suposant que té densitat constant. Per escurçar els càlculs observeu les simetries del problema.

- 3.- Considerem tres números ms grans o iguals que zero, x, y i z , tals que la seva suma sigui 3.

(a) Calculeu quin s el valor màxim de la funció $f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ quan els tres números compleixen la restricció descrita.

(b) Apliqueu l'apartat anterior per a demostrar que donats tres números positius qualssevol, x_1, x_2, x_3 es compleix $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$. Indicació : canvieu x_j per $\frac{3x_j}{x_1 + x_2 + x_3}$.

- 4.- Integreu el camp vectorial $(xy + e^x, x + \frac{x^2}{2} + \sin y)$ sobre les següents corbes :

(a) La vora del quadrat unitari $[0, 1] \times [0, 1]$ orientada en sentit horari.

(b) El triangle que t per vertexs $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(1, 2)$ amb orientació antihorària, es a dir, seguint la corba que primer passa per $(0, 0)$ després per $(1, 1)$ i finalment per $(1, 2)$.

¹Tots els problemes valen el mateix. La durada de l'exmen s de 4 hores. Entregueu cada problema en fulls diferents. Poseu el nom i els dos cognoms en cada full que entregueu.

1.- L'altura d'una muntanya sobre el punt (x, y) ve donada per la funció $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, on $x^2 + y^2 \leq 1$. Un excursionista est al punt $(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4})$. En quina direcció ha de caminar per baixar el ms ràpidament possible ?

2.- Donat el cilindre $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$, calculeu les integrals

a) $\iiint_C \frac{1}{1+z^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz.$

b) $\iiint_C \frac{z}{1+z^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz.$

3.- Calculeu el màxim i el mínim absoluts de la funció

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2},$$

definida al disc $\{(x, y), : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

4.- Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 5 - x - y\}$ la superfície orientada amb el vector normal $(1, 1, 1)$. Donat el camp vectorial $F = (x, y, z)$ calculeu $\int_S F \cdot dS$.

¹Tots els problemes valen el mateix. La durada de l'exmen s de 4 hores. Entregueu cada problema en fulls diferents. Poseu el nom i els dos cognoms en cada full que entregueu.