

**Llicenciatura de Química. UAB**  
Febrer de 2005  
**Examen d'Àlgebra Lineal i Equacions Diferencials**

1. [2.5 punts]

- (a) Troba les arrels complexes del polinomi  $(1+i)x^2 + 2x + 1$ . Són conjugades?  
(b) Escribeu un polinomi de grau 2 que tingui per arrels els complexos

$$z_1 = \frac{-1 + i(1 + \sqrt{2})}{2} \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{-1 + i(1 - \sqrt{2})}{2}.$$

Existeix algun polinomi de grau 2 amb coeficients reals que tingui per arrels aquests complexos?

2. [3 punts] Considera el següent subespai vectorial de  $\mathbb{R}^4$ :

$$E = \langle (1, 3, 2, 2), (1, 4, 3, 2), (0, 3, 3, 0), (-1, 1, 2, -2) \rangle$$

- (a) Determina la dimensió i una base de  $E$ .  
(b) Justifica la igualtat següent:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0, \quad 2x - t = 0\}$$

- (c) Determina una condició sobre els paràmetres reals  $a, b$  de manera que el vector  $(a, b, a, b)$  pertanyi al subespai  $E$ .  
(d) Comprova que els vectors  $v_1 = (1, 1, 0, 2)$  i  $v_2 = (0, 1, 1, 0)$  pertanyen a  $E$  i són linealment independents. Troba una base  $\mathbf{B}$  de  $\mathbb{R}^4$  que inclogui  $v_1$  i  $v_2$  com a dos dels seus vectors. Quines són les coordenades del vector  $81v_1 - 250v_2$  en la teva base  $\mathbf{B}$ ?

3. [2.5 punts] Considera la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Troba els valors i vectors propis de  $A$ .  
(b) Troba una matriu invertible  $C$  tal que  $C^{-1}AC$  sigui una matriu diagonal. És  $A^4$  invertible?

4. [2 punts] Considera l'equació diferencial següent:

$$(x-2)y' - y = 2(x-2)^3$$

- (a) Determina la solució general d'aquesta equació diferencial.  
(b) Troba la solució particular que verifica  $y(3) = 1$ .  
(c) És possible trobar una solució particular tal que  $y(2) = 0$ ? És possible trobar una solució particular tal que  $y(2) = 1$ ? Contradiu això el teorema d'existència i unicitat de solucions d'una equació diferencial?