

# Examen d'Àlgebra Lineal i Equacions Diferencials

Llicenciatura de Química

12 de Febrer de 2004

1.

- (a) Troba les arrels de  $x^2 - 2(1+i)x + 2i$ . (1 pt)
- (b) Troba totes les arrels complexes del polinomi  $x^5 + 32$ , i descompon  $x^5 + 32$  com a producte de factors lineals a  $\mathbb{C}[x]$ . (1 pt)
- (c) Descompon  $x^5 + 32$  com a producte de polinomis a  $\mathbb{R}[x]$ . (0.5 pt)

2. Considera el conjunt  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + y + z + 2t = 0, 11y + 3z + 11t = 0, x + 4y + z + 3t = 0\}$ .

- (a) Prova que aquest subconjunt de  $\mathbb{R}^4$  és un subespai vectorial. (0.5 pt)
- (b) Calcula la dimensió i troba una base de  $E$ . (1 pt)
- (c) Calcula tots els punts de  $\mathbb{R}^4$  que verifiquen  $3x + y + z + 2t = a, 11y + 3z + 11t = b, x + 4y + z + 3t = c$ , en funció dels valors de  $a, b$  i  $c$ . (1 pt)

3. Considera l'aplicació lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  donada per  $f(x, y, z) = (x, y - z, -x + 2y - 2z)$ .

- (a) Defineix nucli i imatge d'una aplicació lineal i calcula el nucli i la imatge de  $f$ . (1 pt)
- (b) Justifica si aquesta aplicació és injectiva i/o exhaustiva. (0.5 pt)
- (c) Estudia si  $f$  diagonalitza. (1 pt)  
*L3, triar vectors propis; si son 3  $\rightarrow$  diagonalitza*

4. Un dipòsit conté inicialment 200 g. d'una substància tòxica dissolta en  $1000 \text{ m}^3$  d'aigua. Es perden per filtració  $0.5 \text{ m}^3$  de dissolució al dia i, d'altra banda, s'evaporen  $0.1 \text{ m}^3$  d'aigua també al dia.

- (a) Justifiqueu l'equació diferencial següent per a la quantitat en grams  $x(t)$  de substància que queda al dipòsit al temps  $t < 1666.6$  dies. (1 pt)

$$x'(t) = -\frac{0.5x(t)}{1000 - 0.1t}, x(0) = 200$$

- (b) Useu l'equació anterior per calcular la quantitat de verí que s'haurà filtrat al cap de 3 anys i la concentració al dipòsit (en  $\text{g/m}^3$ ) en el mateix moment. (1.5 pt)