6 NÚMEROS COMPLEJOS

Página 146

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

El paso de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

- **Imaginemos que solo se conocieran los números enteros, $\mathbb{Z}$.**

  Sin utilizar otro tipo de números, intenta resolver las siguientes ecuaciones:

  a) $3x = 15$ **b)** $-2x = 18$

  c) $11x = -341$ **d)** $4x = 34$

- a) $x = 5$ b) $x = -9$

  c) $x = -31$ d) No se puede.

- **Di cuáles de las siguientes ecuaciones se pueden resolver en $\mathbb{Z}$ y para cuáles es necesario el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Q}$.**

  a) $-5x = 60$ **b)** $-7x = 22$

  c) $2x + 1 = 15$ **d)** $6x - 2 = 10$

  e) $-3x - 3 = 1$ **f)** $-x + 7 = 6$

- a) $x = -12$ b) $x = -\frac{22}{7}$

  c) $x = 7$ d) $x = 2$

  e) $x = -\frac{4}{3}$ f) $x = 1$

  Para b) y e) necesitamos $\mathbb{Q}$.

Página 147

El paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

- **Intenta resolver, sin salir de $\mathbb{Q}$, las siguientes ecuaciones:**

  a) $3x^2 - 12 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 8 = 0$

  c) $2x^2 + x - 1 = 0$ **d)** $x^2 - 2 = 0$

- a) $x_1 = -2, \; x_2 = 2$ b) $x_1 = 2, \; x_2 = 4$

  c) $x_1 = -1, \; x_2 = \frac{1}{2}$ d) $x^2 = 2 \rightarrow$ No se puede.

- **Resuelve, ahora, las siguiente ecuaciones:**

a) $x^2 - 9 = 0$ **b)** $5x^2 - 15 = 0$

c) $x^2 - 3x - 4 = 0$ **d)** $2x^2 - 5x + 1 = 0$

e) $7x^2 - 7x = 0$ **f)** $2x^2 + 3x = 0$

¿Qué ecuaciones se pueden resolver en $\mathbb{Q}$?

¿Para qué ecuaciones es necesario el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$?

- a) $x_1 = -3,\ x_2 = 3$ b) $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

c) $x_1 = -1,\ x_2 = 4$ d) $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4},\ x_2 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

e) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ f) $x_1 = -\dfrac{3}{2},\ x_2 = 0$

Para b) y d), necesitamos $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ *aún no es suficiente*

- **Intenta resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 - 2 = 0$ **b)** $2x^2 - 5x + 1 = 0$

c) $5x^2 - x - 2 = 0$ **d)** $x^2 + 1 = 0$

e) $x^2 - 2x + 5 = 0$ **f)** $5x^2 + 10 = 0$

- a) $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$ b) $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4},\ x_2 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

c) $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{41}}{10},\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{41}}{10}$ d) $x^2 = -1 \rightarrow$ No se puede.

e) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \rightarrow$ No se puede. f) $x^2 = -2 \rightarrow$ No se puede.

- **Resuelve las tres últimas ecuaciones d), e) y f) utilizando para las soluciones números reales y la expresión $\sqrt{-1}$.**

- d) $x = \pm\sqrt{-1},\ x_1 = -\sqrt{-1},\ x_2 = \sqrt{-1}$

e) $x_1 = 1 - 2\sqrt{-1},\ x_2 = 1 + 2\sqrt{-1}$

f) $x_1 = -\sqrt{2}\sqrt{-1},\ x_2 = \sqrt{2}\sqrt{-1}$

Página 149

1. **Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:**

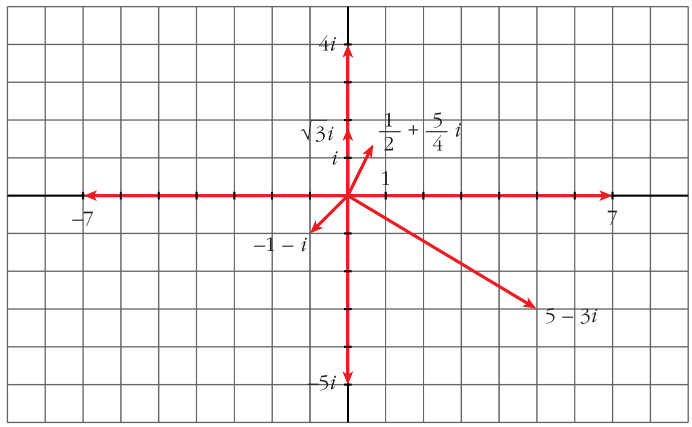
$5 - 3i;\quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}i;\quad -5i;\quad 7;\quad \sqrt{3}\,i;\quad 0;\quad -1 - i;\quad -7;\quad 4i$

• Reales: 7, 0 y -7

Imaginarios: $5 - 3i$, $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}i$, $-5i$, $\sqrt{3}\,i$, $-1 - i$, $4i$

Imaginarios puros: $-5i$, $\sqrt{3}\,i$, $4i$

• Representación:

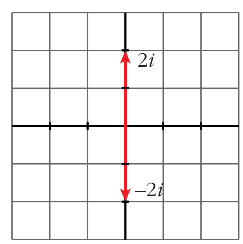


2. **Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas:**

a) $x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^2 + 6x + 10 = 0$ **c)** $3x^2 + 27 = 0$ **d)** $3x^2 - 27 = 0$

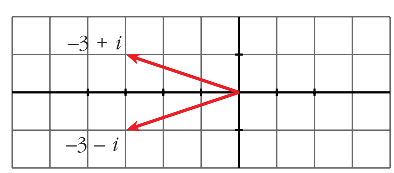
a) $x = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm 4i}{2} = \pm 2i$;

$x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$



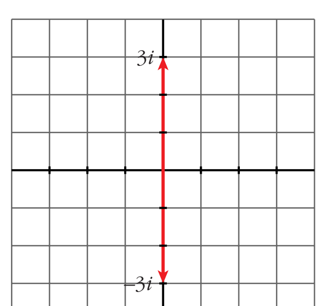
b) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} =$

$= \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$; $x_1 = -3 - i$, $x_2 = -3 + i$



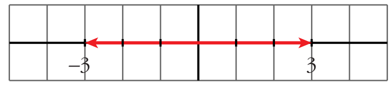
c) $x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$

$x_1 = -3i$, $x_2 = 3i$



d) $x^2 = 9 \;\rightarrow\; x = \pm 3$

$x_1 = -3, \;\; x_2 = 3$



3. **Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:**

a) $\boldsymbol{3 - 5i}$

b) $\boldsymbol{5 + 2i}$

c) $\boldsymbol{-1 - 2i}$

d) $\boldsymbol{-2 + 3i}$

e) $\boldsymbol{5}$

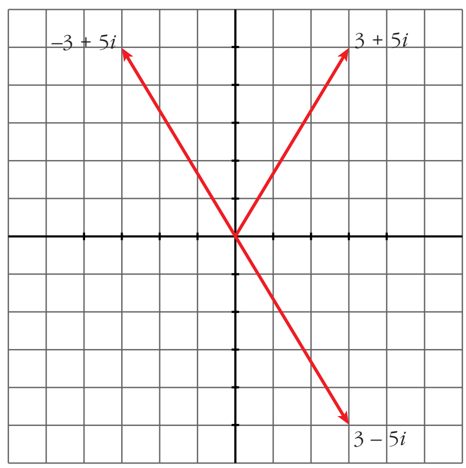
f) $\boldsymbol{0}$

g) $\boldsymbol{2i}$

h) $\boldsymbol{-5i}$

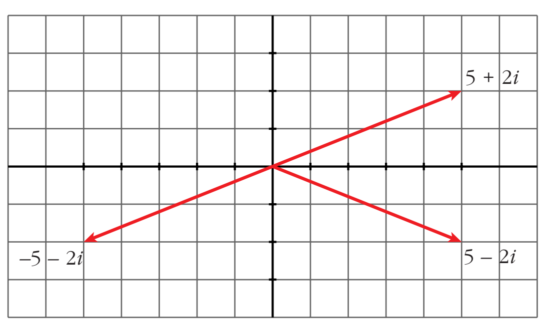
a) Opuesto: $-3 + 5i$

Conjugado: $3 + 5i$



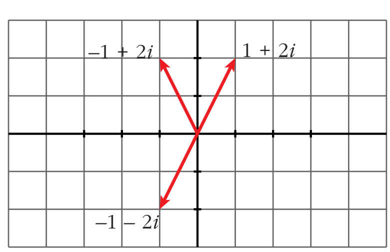
b) Opuesto: $-5 - 2i$

Conjugado: $5 - 2i$



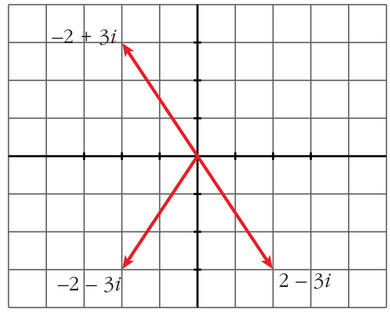
c) Opuesto: $1 + 2i$

Conjugado: $-1 + 2i$



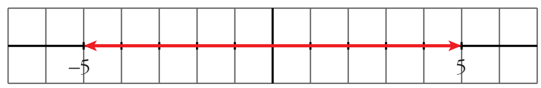
d) Opuesto: $2 - 3i$

Conjugado: $-2 - 3i$



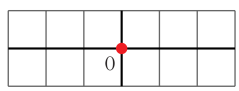
e) Opuesto: -5

Conjugado: 5



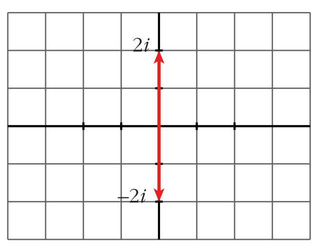
f) Opuesto: 0

Conjugado: 0



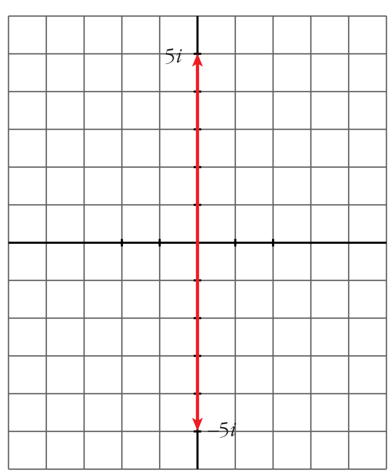
g) Opuesto: $-2i$

Conjugado: $-2i$



h) Opuesto: $5i$

Conjugado: $5i$



4. **Sabemos que $i^2 = -1$. Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Da un criterio para simplificar potencias de i de exponente natural.**

$i^3 = -i$ $\quad$ $i^4 = 1$ $\quad$ $i^5 = i$ $\quad$ $i^6 = -1$

$i^{20} = 1$ $\quad$ $i^{21} = i$ $\quad$ $i^{22} = -1$ $\quad$ $i^{23} = -i$

CRITERIO: Dividimos el exponente entre 4 y lo escribimos como sigue:

$$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

Por tanto, $i^n = i^r$, donde r es el resto de dividir n entre 4.

Página 151

1. **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

f) $\dfrac{2 + 4i}{4 - 2i}$

g) $\dfrac{1 - 4i}{3 + i}$

h) $\dfrac{4 + 4i}{-3 + 5i}$

i) $\dfrac{5 + i}{-2 - i}$

j) $\dfrac{1 + 5i}{3 + 4i}$

k) $\dfrac{4 - 2i}{i}$

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$

m) $\dfrac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) = (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) =$

$= (1 - 5i)(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i = 16 - 2i$

f) $\dfrac{2 + 4i}{4 - 2i} = \dfrac{(2 + 4i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \dfrac{8 + 4i + 16i + 8i^2}{16 - 4i^2} = \dfrac{20i}{16 + 4} = \dfrac{20i}{20} = i$

g) $\dfrac{1 - 4i}{3 + i} = \dfrac{(1 - 4i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \dfrac{3 - i - 12i + 4i^2}{9 - i^2} = \dfrac{3 - 13i - 4}{9 + 1} = \dfrac{-1 - 13i}{10} =$

$= \dfrac{-1}{10} - \dfrac{13}{10}i$

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i} = \dfrac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \dfrac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2} = \dfrac{-12-32i+20}{9+25} =$

$= \dfrac{8-32i}{34} = \dfrac{8}{34} - \dfrac{32}{34}i = \dfrac{4}{17} - \dfrac{16}{17}i$

i) $\dfrac{5+i}{-2-i} = \dfrac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{-10+5i-2i+i^2}{4+1} = \dfrac{-10+3i-1}{5} = \dfrac{-11+3i}{5} =$

$= \dfrac{-11}{5} + \dfrac{3}{5}i$

j) $\dfrac{1+5i}{3+4i} = \dfrac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2} = \dfrac{3+11i+20}{9+16} =$

$= \dfrac{23+11i}{25} = \dfrac{23}{25} + \dfrac{11}{25}i$

k) $\dfrac{4-2i}{i} = \dfrac{(4-2i)(-i)}{i(-i)} = \dfrac{-4i+2i^2}{1} = -4i-2 = -2-4i$

l) $6-3\left(5+\dfrac{2}{5}i\right) = 6-15+\dfrac{6}{5}i = -9+\dfrac{6}{5}i$

m) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9+18i}{(2+2i)} =$

$= \dfrac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \dfrac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \dfrac{-18+54i+36}{4+4} =$

$= \dfrac{18+54i}{8} = \dfrac{18}{8} + \dfrac{54}{8}i = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4}i$

2. Obtén polinomios cuyas raíces sean:

a) $\mathbf{2+\sqrt{3}\,i}$ **y** $\mathbf{2-\sqrt{3}\,i}$

b) $\mathbf{-3i}$ **y** $\mathbf{3i}$

c) $\mathbf{1+2i}$ **y** $\mathbf{3-4i}$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).

a) $\left[x-\left(2+\sqrt{3}\,i\right)\right]\left[x-\left(2-\sqrt{3}\,i\right)\right] =$

$= \left[(x-2)-\sqrt{3}\,i\right]\left[(x-2)+\sqrt{3}\,i\right] = (x-2)^2-\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 =$

$= x^2-4x+4-3i^2 = x^2-4x+4+3 = x^2-4x+7$

b) $[x-(-3i)][x-3i] = [x+3i][x-3i] = x^2-9i^2 = x^2+9$

c) $[x-(1+2i)][x-(3-4i)] = [(x-1)-2i][(x-3)+4i] =$

$= (x-1)(x-3)+4(x-1)i-2(x-3)i-8i^2 =$

$= x^2-4x+3+(4x-4-2x+6)i+8 = x^2-4x+11+(2x+2)i =$

$= x^2-4x+11+2ix+2i = x^2+(-4+2i)x+(11+2i)$

3. ¿Cuánto debe valer x, real, para que $(25 - xi)^2$ sea imaginario puro?

$$(25 - xi)^2 = 625 + x^2 i^2 - 50xi = (625 - x^2) - 50xi$$

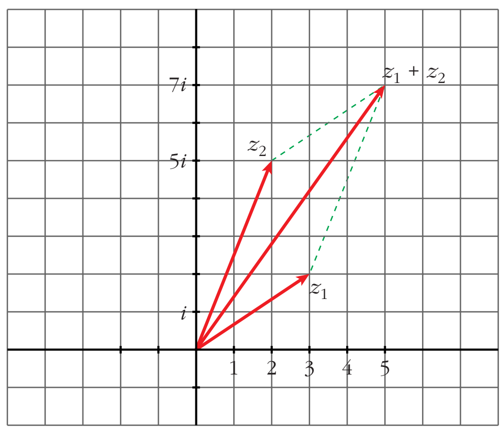
Para que sea imaginario puro:

$$625 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 625 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

4. Representa gráficamente $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_1 + z_2$. Comprueba que $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2.

$z_1 + z_2 = 5 + 7i$



Página 153

1. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

a) $1 + \sqrt{3}i$	**b)** $\sqrt{3} + i$	**c)** $-1 + i$
d) $5 - 12i$	**e)** $3i$	**f)** -5

a) $1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$ b) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$ c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

d) $5 - 12i = 13_{292°\,37'}$ e) $3i = 3_{90°}$ f) $-5 = 5$

2. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $5_{(\pi/6)\ \text{rad}}$	**b)** $2_{135°}$	**c)** $2_{495°}$
d) $3_{240°}$	**e)** $5_{180°}$	**f)** $4_{90°}$

a) $5_{(\pi/6)} = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\,i$

b) $2_{135°} = 2(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

c) $2_{495°} = 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

d) $3_{240°} = 3(cos\ 240° + i\ sen\ 240°) = 3\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180°} = -5$

f) $4_{90°} = 4i$

3. Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado del número complejo $z = r_\alpha$.

Opuesto: $-z = r_{180° + \alpha}$

Conjugado: $\bar{z} = r_{360° - \alpha}$

4. Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:

$$z = 8(cos\ 30° + i\ sen\ 30°)$$

$z = 8_{30°} = 8(cos\ 30° + i\ sen\ 30°) = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} + \dfrac{8}{2}i = 4\sqrt{3} + 4i$

5. Sean los números complejos $z_1 = 4_{60°}$ y $z_2 = 3_{210°}$.

a) Expresa z_1 y z_2 en forma binómica.

b) Halla $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1, y pasa los resultados a forma polar.

c) Compara los módulos y los argumentos de $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 con los de z_1 y z_2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.

a) $z_1 = 4_{60°} = 4(cos\ 60° + i\ sen\ 60°) = 4\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

$z_2 = 3_{210°} = 3(cos\ 210° + i\ sen\ 210°) = 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

b) $z_1 \cdot z_2 = \left(2 + 2\sqrt{3}i\right)\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right) =$

$= -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}i^2 = -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)}{\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)} = \frac{\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)}{\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}i^2}{4 - 12i^2} = \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4 + 12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

c) $z_1 \cdot z_2 = 4_{60°} \cdot 3_{210°} = (4 \cdot 3)_{60° + 210°} = 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210°}}{4_{60°}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210° - 60°} = \left(\frac{3}{4}\right)_1$$

Página 155

1. Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°}$ **b)** $6_{45°} : 3_{15°}$ **c)** $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°}$

d) $5_{(2\pi/3)\text{rad}} : 1_{60°}$ **e)** $(1 - \sqrt{3}\, i)^5$ **f)** $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°} = 5_{180°} = -5$

b) $6_{45°} : 3_{15°} = 2_{30°} = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°} = 6_{120°} = 6(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = 6\left(-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}\, i$

d) $5_{(2\pi/3)\text{rad}} : 1_{60°} = 5_{120°} : 1_{60°} = 5_{60°} = 5(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) =$

$$= 5\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\, i$$

e) $(1 - \sqrt{3}\, i)^5 = (2_{300°})^5 = 32_{1\,500°} = 32_{60°} = 32(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) =$

$$= 32\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\, i$$

f) $4i = 4_{90°}$

2. Compara los resultados en cada caso:

a) $(2_{30°})^3, \ (2_{150°})^3, \ (2_{270°})^3$

b) $(2_{60°})^4, \ (2_{150°})^4, \ (2_{270°})^4, \ (2_{330°})^4$

a) $(2_{30°})^3 = 2^3{}_{3 \cdot 30°} = 8_{90°}$

$(2_{150°})^3 = 2^3{}_{3 \cdot 150°} = 8_{450°} = 8_{90°}$

$(2_{270°})^3 = 8_{3 \cdot 270°} = 8_{810°} = 8_{90°}$

b) $(2_{60°})^4 = 2^4{}_{4 \cdot 60°} = 16_{240°}$

$(2_{150°})^4 = 16_{600°} = 16_{240°}$

$(2_{270°})^4 = 16_{1\,080°} = 16_{0°}$

$(2_{330°})^4 = 16_{1\,320°} = 16_{240°}$

3. Dados los complejos $z = 5_{45°}, \ w = 2_{15°}, \ t = 4i,$ **obtén en forma polar:**

a) $z \cdot t$ **b)** $\dfrac{z}{w^2}$ **c)** $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2}$ **d)** $\dfrac{z \cdot w^3}{t}$

$z = 5_{45°}$ $w = 2_{15°}$ $t = 4i = 4_{90°}$

a) $z \cdot w = 10_{60°}$

b) $\dfrac{z}{w^2} = \dfrac{z}{4_{30°}} = \dfrac{5_{45°}}{4_{30°}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)_{15°}$

c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2} = \dfrac{125_{135°}}{2_{15°} \cdot 16_{180°}} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{-60°} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{300°}$

d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t} = \dfrac{5_{45°} \cdot 8_{45°}}{4_{90°}} = 10_{0°} = 10$

4. Expresa *cos* 3α y *sen* 3α en función de *sen* α y *cos* α utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$$(1_\alpha)^3 = 1\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^3 =$$

$$= \cos^3\alpha + i\,3\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha + 3i^2\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + i^3 \operatorname{sen}^3\alpha =$$

$$= \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha\, i - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha - i \operatorname{sen}^3\alpha =$$

$$= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha)\,i$$

Por otra parte: $(1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha$

Por tanto: $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen} 3\alpha = 3\cos^2\alpha \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha$

Página 157

1. Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

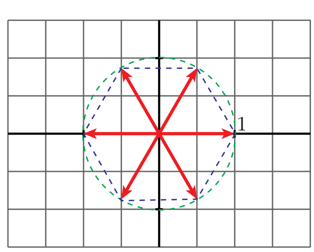
$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0°}} = 1_{(360° \cdot k)/6} = 1_{60° \cdot k}$; $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$1_{0°} = 1 \qquad 1_{60°} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \qquad 1_{120°} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$1_{180°} = -1 \qquad 1_{240°} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \qquad 1_{300°} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Representación:



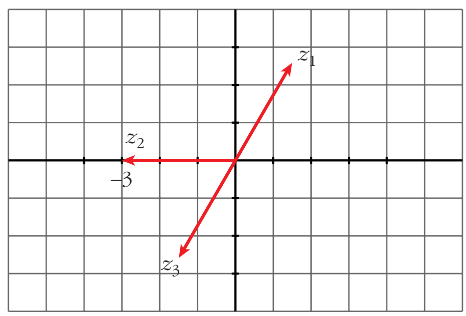
2. **Resuelve la ecuación $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.**

$$z^3 + 27 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° + 360°\, n)/3} = 3_{60° + 120°\, n};\quad n = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 3_{180°} = -3$$

$$z_3 = 3_{240°} = 3(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



3. **Calcula:**

a) $\sqrt[3]{-i}$ **b)** $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}\,i}$ **c)** $\sqrt{-25}$ **d)** $\sqrt[3]{\dfrac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270°}} = 1_{(270° + 360°\, k)/3};\quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$1_{90°} = i \qquad 1_{210°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \qquad 1_{330°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16_{120°}} = 2_{(120° + 360°\, k)/4} = 2_{30° + 90°\, k};\quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$2_{30°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$2_{120°} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}\,i$$

$$2_{210°} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}\,i$$

$$2_{300°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

c) $\sqrt{-25} = \sqrt{25_{180°}} = 5_{(180° + 360° k)/2} = 5_{90° + 180° k}$; $k = 0, 1$

Las dos raíces son: $5_{90°} = 5i$; $5_{270°} = -5i$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}\,i}} = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{8}_{135°}}{2_{60°}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{75°}} = \sqrt[6]{2}_{(75° + 360° k)/3} = \sqrt[6]{2}_{25° + 120° k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son: $\sqrt[6]{2}_{25°}$; $\sqrt[6]{2}_{145°}$; $\sqrt[6]{2}_{265°}$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 + 1 = 0$

b) $x^6 + 64 = 0$

a) $x^4 + 1 = 0 \ \rightarrow\ x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180°}} = 1_{(180° + 360° k)/2} = 1_{45° + 90° k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $1_{135°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $1_{225°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $1_{315°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $x^6 + 64 = 0 \ \rightarrow\ x = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = 2_{(180° + 360° k)/6} = 2_{30° + 60° k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$2_{30°} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + 1$

$2_{90°} = 2i$

$2_{150°} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

$2_{210°} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

$2_{270°} = -2i$

$2_{330°} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

5. Comprueba que si z y w son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones:

$$z \cdot w, \quad z/w, \quad z^2, \quad z^3$$

z y w raíces sextas de 1 $\rightarrow z^6 = 1,\ w^6 = 1$

$(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1 \ \rightarrow\ z \cdot w$ es raíz sexta de 1

$\left(\dfrac{z}{w}\right)^6 = \dfrac{z^6}{w^6} = \dfrac{1}{1} = 1 \ \rightarrow\ \dfrac{z}{w}$ es raíz sexta de 1

$z^2 = (z^2)^6 = z^{12} = (z^4)^3 = 1^3 = 1 \ \rightarrow\ z^2$ es raíz sexta de 1

$z^3 = (z^3)^6 = z^{18} = z^{16} \cdot z^2 = (z^4)^4 \cdot z^2 = 1^4 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \ \rightarrow\ z^3$ es raíz sexta de 1

6. **El número $4 + 3i$ es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z. Halla las otras tres raíces cuartas de z.**

$4 + 3i = 5_{36°\ 52'}$

Las otras tres raíces cuartas de z serán:

$5_{36°\ 52' + 90°} = 5_{126°\ 52'} = -3 + 4i$

$5_{36°\ 52' + 180°} = 5_{216°\ 52'} = -4 - 3i$

$5_{36°\ 52' + 270°} = 5_{306°\ 52'} = 3 - 4i$

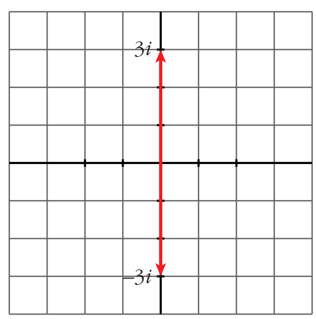
7. **Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:**

a) $\sqrt{-9}$ **b)** $\sqrt[3]{-27}$ **c)** $\sqrt[3]{2-2i}$ **d)** $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$ **e)** $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}}$ **f)** $\sqrt[3]{8i}$

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9_{180°}} = 3_{(180° + 360°\,k)/2} = 3_{90° + 180°\,k}$; $k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$3_{90°} = 3i$; $3_{270°} = -3i$



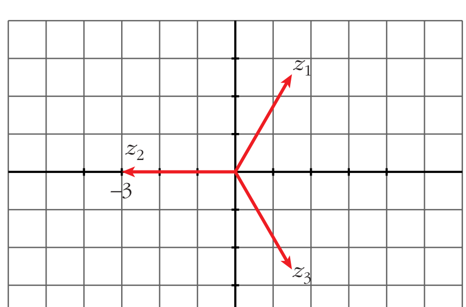
b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° + 360°\,k)/3} = 3_{60° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$z_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 3\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + i\,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,i$

$z_2 = 3_{180°} = -3$

$z_3 = 3_{300°} = 3(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) = 3\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,i$



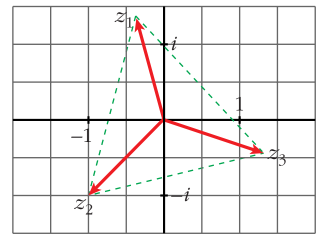
c) $\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{315°}} = \sqrt{2}_{(315° + 360°\,k)/3} = \sqrt{2}_{105° + 120°\,k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$z_1 = \sqrt{2}_{105°} = -0{,}37 + 1{,}37i$

$z_2 = \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

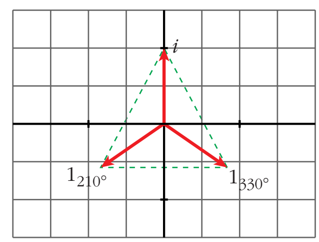
$z_3 = \sqrt{2}_{345°} = 1{,}37 - 0{,}37i$



d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{\sqrt{2}_{45°}}} = \sqrt[3]{1_{270°}} = 1_{(270° + 360°\,k)/3} = 1_{90° + 120°\,k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$1_{90°} = i; \quad 1_{210°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i; \quad 1_{330°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$



e) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\dfrac{32\,(-i)}{i\,(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/5} = 2_{18° + 72°\,k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

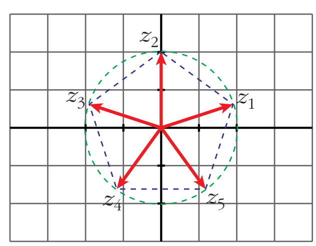
$z_1 = 2_{18°} = 1{,}9 + 0{,}6i$

$z_2 = 2_{90°} = 2i$

$z_3 = 2_{162°} = -1{,}9 + 0{,}6i$

$z_4 = 2_{234°} = -1{,}2 - 1{,}6i$

$z_5 = 2_{306°} = 1{,}2 - 1{,}6i$



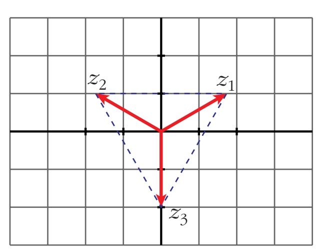
f) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/3} = 2_{30° + 120°\,k}; \quad k = 0, 1, 2$

Las tres son:

$z_1 = 2_{30°}$

$z_2 = 2_{150°}$

$z_3 = 2_{270°}$



Página 162

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números complejos en forma binómica

1 Calcula:

a) $(3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i)$ **b)** $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$

c) $-2i - (4 - i)5i$ **d)** $(4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

a) $(3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i) = 6 - 3i + 4i - 2i^2 - 2 + 3i + 2i - 3i^2 =$

$= 6 - 3i + 4i + 2 - 2 + 3i + 2i + 3 = 9 + 6i$

b) $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i + 2i^2 - 5 + 4i = 3 - 2i - 2 - 5 + 4i = -4 + 2i$

c) $-2i - (4 - i)5i = -2i - 20i + 5i^2 = -22i - 5 = -5 - 22i$

d) $(4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2 = 16 - (3i)^2 - 16 - 9i^2 + 24i =$

$= 16 + 9 - 16 + 9 + 24i = 18 + 24i$

2 Calcula en forma binómica:

a) $\dfrac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i}$ **b)** $\dfrac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)}$

c) $\dfrac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i)$ **d)** $\dfrac{1 + i}{2 - i} + \dfrac{-3 - 2i}{1 + 3i}$

a) $$\frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i} = \frac{12 - 6i + 12i - 6i^2}{2 - 2i} = \frac{18 + 6i}{2 - 2i} = \frac{(18 + 6i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} =$$

$$= \frac{36 + 36i + 12i - 12}{4 + 4} = \frac{24 + 48i}{8} = 3 + 6i$$

b) $$\frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)} = \frac{-2 + 3i}{-4 + 4i - 2i - 2} = \frac{-2 + 3i}{-6 + 2i} = \frac{(-2 + 3i)(-6 - 2i)}{(-6 + 2i)(-6 - 2i)} =$$

$$= \frac{12 + 4i - 18i + 6}{36 + 4} = \frac{18 - 14i}{40} = \frac{9 - 7i}{20} = \frac{9}{20} - \frac{7}{20}i$$

c) $$\frac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i) = \frac{2 - 2i + 5i + 5}{3 - 2i} = \frac{7 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(7 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} =$$

$$= \frac{21 + 14i + 9i - 6}{9 + 4} = \frac{15 + 23i}{13} = \frac{15}{13} + \frac{23}{13}i$$

d) $$\frac{1 + i}{2 - i} + \frac{-3 - 2i}{1 + 3i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} + \frac{(-3 - 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} =$$

$$= \frac{2 + i + 2i - 1}{4 + 1} + \frac{-3 + 9i - 2i - 6}{1 + 9} = \frac{1 + 3i}{5} + \frac{-9 + 7i}{10} =$$

$$= \frac{2 + 6i - 9 + 7i}{10} = \frac{-7 + 13i}{10} = \frac{-7}{10} + \frac{13}{10}i$$

3 **Estos números complejos son los resultados de las operaciones que los siguen. Opera y di cuál corresponde a cuál:**

$$2i, \quad 20, \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{5}i, \quad -2, \quad \frac{1}{5} - \frac{17}{5}i$$

a) $(1 - i)(4 - 2i)(1 + 3i)$

b) $\dfrac{1 + 2i}{2 - i}(2 + i) + \dfrac{1 - 2i}{2 + i}(2 - i)$

c) $\dfrac{2 - i}{3 - i} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1 + 8i}{1 + 3i}\right)$

d) $\dfrac{(2 + i)^2 + (1 - i)^2}{1 - (3/2)i}$

e) $\dfrac{2 - 2i}{i} + \dfrac{3 - 5i}{2 - i}$

a) $(1 - i)(4 - 2i)(1 + 3i) = (4 - 2i - 4i - 2)(1 + 3i) =$

$= (2 - 6i)(1 + 3i) = 2 + 6i - 6i + 18 = 20$

b) $\dfrac{1 + 2i}{2 - i}(2 + i) + \dfrac{1 - 2i}{2 + i}(2 - i) = \dfrac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)} + \dfrac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)} =$

$= \dfrac{(1 + 2i)(2 + i)^2 + (1 - 2i)(2 - i)^2}{(2 - i)(2 + i)} =$

$= \dfrac{(1 + 2i)(4 - 1 + 4i) + (1 - 2i)(4 - 1 - 4i)}{4 + 1} =$

$= \dfrac{(1 + 2i)(3 + 4i) + (1 - 2i)(3 - 4i)}{5} = \dfrac{3 + 4i + 6i - 8 + 3 - 4i - 6i - 8}{5} =$

$= \dfrac{-10}{5} = -2$

c) $\dfrac{2 - i}{3 - i} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1 + 8i}{1 + 3i}\right) = \dfrac{(2 - i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} - \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{(1 + 8i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)}\right] =$

$= \dfrac{6 + 2i - 3i + 1}{9 + 1} - \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1 - 3i + 8i + 24}{1 + 9}\right] = \dfrac{7 - i}{10} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{25 + 5i}{10}\right) = \dfrac{7 - i}{10} - \dfrac{5 + i}{10} =$

$= \dfrac{7 - i - 5 - i}{10} = \dfrac{2 - 2i}{10} = \dfrac{1 - i}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}i$

d) $\dfrac{(2 + i)^2 + (1 - i)^2}{1 - (3/2)i} = \dfrac{4 - 1 + 4i + 1 - 1 - 2i}{(2 - 3i)/2} = \dfrac{3 + 2i}{(2 - 3i)/2} = \dfrac{6 + 4i}{2 - 3i} =$

$= \dfrac{(6 + 4i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \dfrac{12 + 18i + 8i - 12}{4 + 9} = \dfrac{26i}{13} = 2i$

e) $\dfrac{2 - 2i}{i} + \dfrac{3 - 5i}{2 - i} = \dfrac{(2 - 2i)(-i)}{i(-i)} + \dfrac{(3 - 5i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} =$

$= \dfrac{-2i - 2}{1} + \dfrac{6 + 3i - 10i + 5}{4 + 1} = \dfrac{-2 - 2i}{1} + \dfrac{11 - 7i}{5} =$

$= \dfrac{-10 - 10i + 11 - 7i}{5} = \dfrac{1 - 17i}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{17}{5}i$

4 Calcula:

a) $\boldsymbol{i^{37}}$ **b)** $\boldsymbol{i^{126}}$ **c)** $\boldsymbol{i^{87}}$

d) $\boldsymbol{i^{64}}$ **e)** $\boldsymbol{i^{-216}}$

a) $i^{37} = i^1 = i$

b) $i^{126} = i^2 = -1$

c) $i^{87} = i^3 = -i$

d) $i^{64} = i^0 = 1$

e) $i^{-216} = \dfrac{1}{i^{216}} = \dfrac{1}{i^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

5 Dado el número complejo $\boldsymbol{z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$**, prueba que:**

a) $\boldsymbol{1 + z + z^2 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{\dfrac{1}{z} = z^2}$

a) $z^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i =$

$$= -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

b) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i} = \dfrac{1}{\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = \dfrac{2}{-1 + \sqrt{3}i} = \dfrac{2\left(-1 - \sqrt{3}i\right)}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)} =$

$$= \frac{2\left(-1 - \sqrt{3}i\right)}{1 + 3} = \frac{2\left(-1 - \sqrt{3}i\right)}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$z^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (lo habíamos calculado en a)

Por tanto: $\dfrac{1}{z} = z^2$

6 Calcula $\boldsymbol{m}$ **y** $\boldsymbol{n}$ **para que se verifique la igualdad:**

$$\boldsymbol{(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i}$$

$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2 + n) + (m + 5)i = 7 - 2i \;\rightarrow\; \left.\begin{cases} 2 + n = 7 \\ m + 5 = -2 \end{cases}\right\} \quad \begin{array}{l} n = 5 \\ m = -7 \end{array}$

7 **Determina k para que el cociente $\frac{k+i}{1+i}$ sea igual a $2 - i$.**

$$\frac{k+i}{1+i} = \frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{k - ki + i + 1}{1+1} = \frac{(k+1) + (1-k)i}{2} =$$

$$= \left(\frac{k+1}{2}\right) + \left(\frac{1-k}{2}\right)i = 2 - i \rightarrow \begin{cases} \dfrac{k+1}{2} = 2 \rightarrow k = 3 \\[2mm] \dfrac{1-k}{2} = -1 \rightarrow k = 3 \end{cases}$$

Por tanto, $k = 3$.

8 **Calcula a y b de modo que se verifique $(a + bi)^2 = 3 + 4i$.**

☛ ***Desarrolla el cuadrado; iguala la parte real a 3, y la parte imaginaria a 4.***

$(a + bi)^2 = 3 + 4i$

$a^2 + bi^2 + 2abi = 3 + 4i$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

$$a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \rightarrow a^4 - 4 = 3a^2 \rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$a = -2 \rightarrow b = -1$

$a = 2 \rightarrow b = 1$

9 **Dados los complejos $2 - ai$ y $3 - bi$, halla a y b para que su producto sea igual a $8 + 4i$.**

$(2 - ai)(3 - bi) = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai - ab = 8 + 4i$

$(6 - ab) + (-2b - 3a)i = 8 + 4i$

$$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4 + 3a}{-2}$$

$$6 - a\left(\frac{4 + 3a}{-2}\right) = 8 \;\rightarrow\; 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$$

$$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \;\rightarrow\; 4a + 3a^2 = 4 \;\rightarrow\; 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{cases} a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; b = -3 \\ a = \frac{-12}{6} = -2 \;\rightarrow\; b = 1 \end{cases}$$

10 **Calcula el valor de a y b para que se verifique $a - 3i = \dfrac{2 + bi}{5 - 3i}$.**

$$a - 3i = \frac{2 + bi}{5 - 3i}$$

$(a - 3i)(5 - 3i) = 2 + bi$

$5a - 3ai - 15i - 9 = 2 + bi$

$(5a - 9) + (-3a - 15)i = 2 + bi$

$$\left.\begin{array}{l} 5a - 9 = 2 \\ -3a - 15 = b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 11/5 \\ b = -108/5 \end{array}$$

11 **Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea:**

a) Un número imaginario puro.

b) Un número real.

$(3 - 6i)(4 + bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12 + 6b) + (3b - 24)i$

a) $12 + 6b = 0 \;\rightarrow\; b = -2$

b) $3b - 24 = 0 \;\rightarrow\; b = 8$

12 **Determina a para que $(a - 2i)^2$ sea un número imaginario puro.**

$$(a - 2i)^2 = a^2 + 4i^2 - 4ai = (a^2 - 4) - 4ai$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$a^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; a = \pm 2 \;\rightarrow\; a_1 = -2, \;\; a_2 = 2$$

13 **Calcula x para que el resultado del producto $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.**

☛ ***Efectúa el producto. Iguala la parte imaginaria a 0 y resuelve la ecuación.***

$(x + 2 + ix)(x - i) = x^2 - xi + 2x - 2i + x^2 i - xi^2 =$

$$= x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i$$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Números complejos en forma polar

14 **Representa los siguientes números complejos, sus opuestos y sus conjugados, y exprésalos en forma polar:**

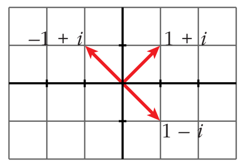
a) $\mathbf{1 - i}$ **b)** $\mathbf{-1 + i}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{3} + i}$ **d)** $\mathbf{-\sqrt{3} - i}$

e) $\mathbf{-4}$ **f)** $\mathbf{2i}$ **g)** $\mathbf{-\frac{3}{4}i}$ **h)** $\mathbf{2 + 2\sqrt{3}\,i}$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

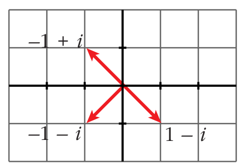
Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45°}$



b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

Opuesto: $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

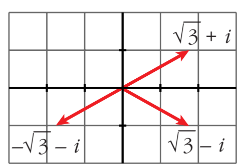
Conjugado: $-1 - i = \sqrt{2}_{225°}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

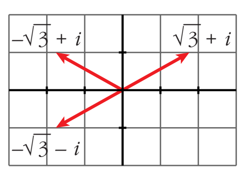
Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330°}$



d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

Opuesto: $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

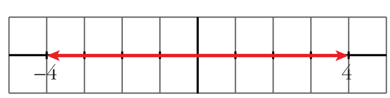
Conjugado: $-\sqrt{3} + i = 2_{150°}$



e) $-4 = 4_{180°}$

Opuesto: $4 = 4_{0°}$

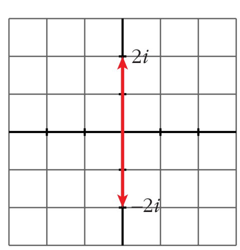
Conjugado: $-4 = 4$



f) $2i = 2_{90°}$

Opuesto: $-2i = 2_{270°}$

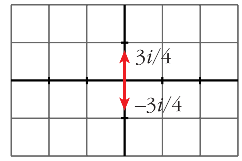
Conjugado: $-2i = 2_2$



g) $-\dfrac{3}{4}i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{270°}$

Opuesto: $\dfrac{3}{4}i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{90°}$

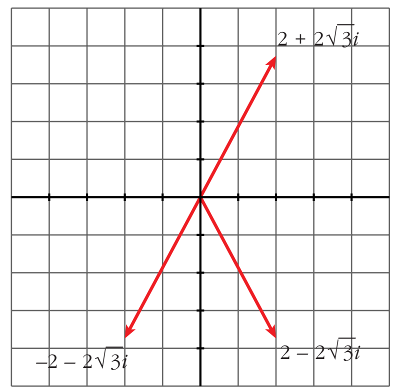
Conjugado: $\dfrac{3}{4}i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{90°}$



h) $2 + 2\sqrt{3}\,i = \sqrt{14}_{\,60°}$

Opuesto: $-2 - 2\sqrt{3}\,i = \sqrt{14}_{\,240°}$

Conjugado: $2 - 2\sqrt{3}\,i = \sqrt{14}_{\,300°}$



15 **Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:**

a) $2_{45°}$	**b)** $3_{(\pi/6)}$	**c)** $\sqrt{2}_{\,180°}$	**d)** $17_{0°}$
e) $1_{(\pi/2)}$	**f)** $5_{270°}$	**g)** $1_{150°}$	**h)** $4_{100°}$

a) $2_{45°} = 2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$

c) $\sqrt{2}_{\,180°} = \sqrt{2}\,(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = \sqrt{2}\,(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0°} = 17$

e) $1_{(\pi/2)} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = i$

f) $5_{270°} = -5i$

g) $1_{150°} = \cos 150° + i \operatorname{sen} 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

h) $4_{100°} = 4(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°) = 4(-0{,}17 + i \cdot 0{,}98) = -0{,}69 + 3{,}94i$

16 **Calcula en forma polar:**

a) $(-1 - i)^5$ **b)** $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}\, i}$ **c)** $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$ **e)** $\left(-2\sqrt{3} + 2i\right)^6$ **f)** $(3 - 4i)^3$

a) $(-1 - i)^5 = \left(\sqrt{2}_{\,225°}\right)^5 = 4\sqrt{2}_{\,1\,125°} = 4\sqrt{2}_{\,45°} = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) = 4 + 4i$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}\, i} = \sqrt[4]{2_{300°}} = \sqrt[4]{2}_{\,(300° + 360°\, n)/4} = \sqrt[4]{2}_{\,75° + 90°\, n}$; $n = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt[4]{2}_{\,75°}$ $\sqrt[4]{2}_{\,165°}$ $\sqrt[4]{2}_{\,255°}$ $\sqrt[4]{2}_{\,345°}$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{2^6}_{\,(360°\, k)/4} = 2\sqrt{2}_{\,90°\, k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2\sqrt{2}_{\,0°} = 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{\,90°} = 2\sqrt{2}\, i$ $2\sqrt{2}_{\,180°} = -2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{\,270°} = -2\sqrt{2}\, i$

d) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360°\, k)/3} = 2_{30° + 120°\, k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{30°} = \sqrt{3} + i$ $2_{150°} = -\sqrt{3} + i$ $2_{270°} = -2i$

e) $\left(-2\sqrt{3} + 2i\right)^6 = (4_{150°})^6 = 4\,096_{900°} = 4\,096_{180°} = -4\,096$

f) $(3 - 4i)^3 = (5_{306°\, 52'})^3 = 125_{920°\, 36'} = 125_{200°\, 36'}$

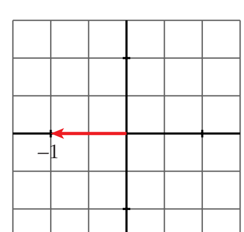
Página 163

17 **Calcula y representa gráficamente el resultado:**

a) $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ **b)** $\left(\dfrac{1 - i}{\sqrt{3} + i}\right)^3$ **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{1 + i}{2 - i}}$

a) $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \dfrac{i^7 - 1/i^7}{2i} = \dfrac{i^{14} - i}{2i^8} = \dfrac{i^2 - 1}{2} =$

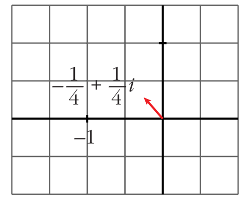
$= \dfrac{-1 - 1}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$



b) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{2_{30°}}\right)^3 = \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285°}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855°} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135°} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(cos\ 135° + i\ sen\ 135°) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{-1}{4} + \dfrac{1}{4}i$



c) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i} =$

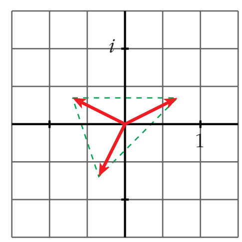
$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71°\,34'}} = \left(\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71°\,34' + 360°\,k)/3} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{\,23°\,51' + 120\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{\,23°\,51'} = 0{,}785 + 0{,}347i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{\,143°\,51'} = -0{,}693 + 0{,}56i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{\,263°\,51'} = -0{,}092 - 0{,}853i$



18 **Calcula y representa las soluciones:**

a) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}\,i}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $\sqrt[3]{8i}$

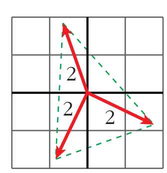
a) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}\,i} = \sqrt[3]{8_{300°}} = 2_{(300° + 360°\,k)/3} = 2_{100° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{100°} = -0{,}35 + 1{,}97i$

$2_{220°} = -1{,}53 - 1{,}26i$

$2_{340°} = 1{,}88 - 0{,}68i$

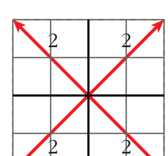


b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} = 2_{45° + 90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ $2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

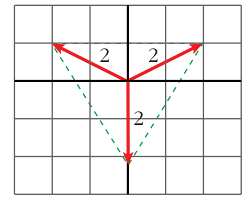
$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ $2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$



c) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360° k)/3} = 2_{30° + 120° k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{30°} = \sqrt{3} + i$ $\qquad 2_{150°} = -\sqrt{3} + i$ $\qquad 2_{270°} = -2i$



19 **Calcula pasando a forma polar:**

a) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^5$

b) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt{3} - i\right)$

c) $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}\, i}$

d) $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

e) $\sqrt[6]{-64}$

f) $\sqrt{-1-i}$

g) $\sqrt[3]{-i}$

h) $\dfrac{2-2i}{-3+3i}$

a) $(1 + i\sqrt{3})^5 = (2_{60°})^5 = 32_{300°} = 32\,(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) =$

$$= 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) = 16 - 16\sqrt{3}\, i$$

b) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt{3} - i\right) = (2_{240°})^6\,(2_{330°}) = (64_{1\,440°})\,(2_{330°}) =$

$= (64_{0°})\,(2_{330°}) = 128_{330°} = 128\,(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) =$

$= 128\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{-1}{2}\right) = 64\sqrt{3} - 64i$

c) $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}\, i} = \sqrt[4]{4_{120°}} = \sqrt[4]{4}_{(120° + 360° k)/4} = \sqrt[4]{2^2}_{30° + 90° k} =$

$= \sqrt{2}_{30° + 90° k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt{2}_{30°} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i$ $\qquad \sqrt{2}_{120°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\, i$

$\sqrt{2}_{210°} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i$ $\qquad \sqrt{2}_{300°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\, i$

d) $\dfrac{8}{(1-i)^5} = \dfrac{8_{0°}}{(\sqrt{2}_{315°})^5} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{1\,575°}} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{135°}} = \left(\dfrac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225°} =$

$= \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}\,(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) = -1 - i$

e) $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = \sqrt[6]{2^6}_{(180° + 360° k)/6} = 2_{30° + 60° k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$2_{30°} = \sqrt{3} + i$ $\quad 2_{90°} = 2i$ $\quad 2_{150°} = -\sqrt{3} + i$

$2_{210°} = -\sqrt{3} - i$ $\quad 2_{270°} = -2$ $\quad 2_{330°} = \sqrt{3} - i$

f) $\sqrt{-1-i} = \sqrt{\sqrt{2}_{225°}} = \sqrt[4]{2}_{(225° + 360° k)/2} = \sqrt[4]{2}_{112°\,30' + 180° k}$; $k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$\sqrt[4]{2}_{112°\,30'} = -0{,}46 + 1{,}1i$ $\quad \sqrt[4]{2}_{292°\,30'} = 0{,}46 - 1{,}1i$

g) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270°}} = 1_{(270° + 360° k)/3} = 1_{90° + 120° k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$1_{90°} = i$ $\quad 1_{210°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ $\quad 1_{330°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

h) $$\sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}_{315°}}{3\sqrt{2}_{135°}}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)_{180°}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{(180° + 360° k)/2} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90° + 180° k}; \quad k = 0, 1$$

Las dos raíces son:

$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90°} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ $\quad \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{270°} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$

20 **Calcula m para que el número complejo $3 - mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i$.**

$$\left.\begin{array}{l} |3 - mi| = \sqrt{9 + m^2} \\ |2\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i| = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \sqrt{9 + m^2} = 5 \to 9 + m^2 = 25 \to m^2 = 16 \\ m = \pm 4 \end{array}$$

Hay dos posibilidades: $m = -4$ y $m = 4$

21 **Expresa en forma polar z, su opuesto $-z$, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:**

a) $z = 1 - \sqrt{3}\,i$ $\quad$ **b) $z = -2 - 2i$** $\quad$ **c) $z = -2\sqrt{3} + 2i$**

a) $z = 1 - \sqrt{3}\,i = 2_{300°}$; $-z = -1 + \sqrt{3}\,i = 2_{210°}$; $\bar{z} = 1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$

b) $z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225°}$; $-z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45°}$; $\bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135°}$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150°}$; $-z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330°}$; $\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210°}$

22 **Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:**

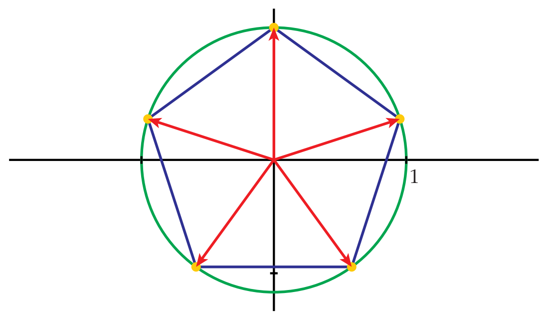
a) $\sqrt[5]{i}$ **b)** $\sqrt[6]{-1}$ **c)** $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90°}} = 1_{(90° + 360°\,k)/5} = 1_{18° + 72°\,k};\quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$1_{18°} \quad 1_{90°} \quad 1_{162°} \quad 1_{234°} \quad 1_{306°}$

Representación del polígono (pentágono):

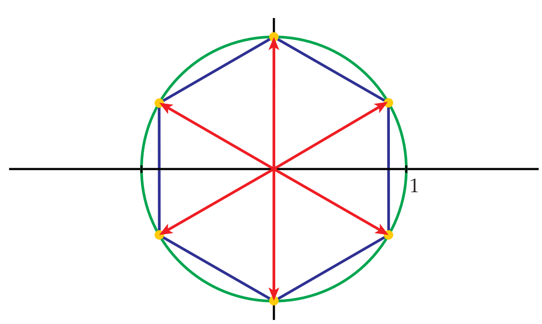


b) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180°}} = 1_{(180° + 360°\,k)/6} = 1_{30° + 60°\,k};\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$1_{30°} \quad 1_{90°} \quad 1_{150°} \quad 1_{210°} \quad 1_{270°} \quad 1_{330°}$

Representación del polígono (hexágono):

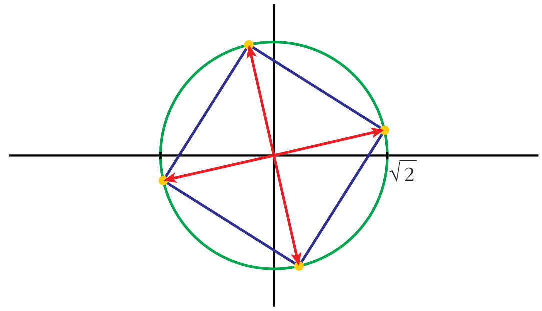


c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[4]{4_{30°}} = \sqrt[4]{2^2}_{(30° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{7°\,30' + 90°\,k};\quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt{2}_{7°\,30'} \quad \sqrt{2}_{97°\,30'} \quad \sqrt{2}_{187°\,30'} \quad \sqrt{2}_{277°\,30'}$

Representación del polígono (cuadrado):



PARA RESOLVER

23 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\frac{\pi}{3}$, y la suma de sus módulos 8.**

☛ ***Llámalos r_α y s_β y escribe las ecuaciones que los relacionan:***

$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 3_{0°}$ ***(0° es el argumento del cociente,*** $\alpha - \beta = 0°$***);*** $r + s = 8$ ***y*** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

$\frac{r}{s} = 3$

$r + s = 8$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$

$\alpha - \beta = 0°$

Hallamos sus módulos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8;\ \ 4s = 8;\ \ s = 2;\ \ r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \alpha = \beta;\ \ 2\beta = \frac{\pi}{3};\ \ \beta = \frac{\pi}{6};\ \ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y 2_π

24 **El producto de dos números complejos es $2i$ y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/2. Hállalos.**

$$\left.\begin{array}{l} z \cdot w = 2i \\ \frac{z^3}{w} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} 2z^3 = w;\ \ z \cdot 2z^3 = 2i;\ \ 2z^4 = 2i;\ \ z^4 = i$$

$z = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{90°}} = 1_{(90° + 360°\, k)/4} = 1_{22°\, 30' + 90°\, k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Hay cuatro soluciones:

$z_1 = 1_{22°\, 30'} \rightarrow w_1 = 2z_1^3 = 2 \cdot 1_{67°\, 30'} = 2_{67°\, 30'}$

$z_2 = 1_{112°\, 30'} \rightarrow w_2 = 2_{337°\, 30'}$

$z_3 = 1_{202°\, 30'} \rightarrow w_3 = 2_{607°\, 30'} = 2_{247°\, 30'}$

$z_4 = 1_{292°\, 30'} \rightarrow w_4 = 2_{877°\, 30'} = 2_{157°\, 30'}$

25 **El producto de dos números complejos es -8 y uno de ellos es el cuadrado del otro. Calcúlalos.**

$$\left.\begin{array}{l} z \cdot w = -8 \\ z = w^2 \end{array}\right\} w^3 = -8$$

$w = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180°}} = 2_{(180° + 360°\, k)/3} = 2_{60° + 120°\, k}$; $k = 0, 1, 2$

Hay tres soluciones:

$w_1 = 2_{60°} \rightarrow z_1 = 4_{120°}$

$w_2 = 2_{180°} \rightarrow z_2 = 4_{0°} = 4$

$w_3 = 2_{300°} \rightarrow z_3 = 4_{600°} = 4_{240°}$

26 **De dos números complejos sabemos que:**

- **Tienen el mismo módulo.**
- **Sus argumentos suman $17\pi/6$.**
- **El primero es conjugado del cuadrado del segundo.**

¿Cuáles son esos números?

Llamamos a los números: $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} r = s \\ \alpha + \beta = \dfrac{17\pi}{6} \\ r_\alpha = \overline{(s_\beta)^2} \\ r = 1 \end{array}\right\} r_\alpha = \overline{s^2_{2\beta}} = s^2_{2\pi - 2\beta} = r^2_{2\pi - 2\beta} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 2\pi - 2\beta \\ r = r^2 \quad \rightarrow \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} r = 0 \quad \text{(no vale)} \\ r = 1 \end{array}\right.$$

$$2\pi - 2\beta + \beta = \frac{17\pi}{6};\ \beta = -\frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}\,\text{rad} \rightarrow \alpha = \frac{11\pi}{3}\,\text{rad}$$

Por tanto, los números son:

$$1_{11\pi/3} \quad \text{y} \quad 1_{-5\pi/6} = 1_{7\pi/6}$$

27 **Calcula *cos* 75º y *sen* 75º mediante el producto $1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ}$.**

$1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 1_{75^\circ} = \cos 75^\circ + i \,\text{sen}\, 75^\circ$

$$1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = (\cos 30^\circ + i \,\text{sen}\, 30^\circ)(\cos 45^\circ + i \,\text{sen}\, 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} i + \frac{\sqrt{2}}{4} i - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} i$$

Por tanto:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \qquad \text{sen}\, 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

28 **Halla las razones trigonométricas de 15º conociendo las de 45º y las de 30º mediante el cociente $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ}$.**

$1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ} = \cos 15^\circ + i \,\text{sen}\, 15^\circ$

$$\frac{1_{45^\circ}}{1_{30^\circ}} = \frac{\cos 45^\circ + i \,\text{sen}\, 45^\circ}{\cos 30^\circ + i \,\text{sen}\, 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2 + i(\sqrt{2}/2)}{\sqrt{3}/2 + i(1/2)} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - i\right)}{\left(\sqrt{3} + i\right)\left(\sqrt{3} - i\right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{2}}{3 + 1} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} i$$

Por tanto:

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{sen}\, 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

29 **¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\frac{x + 2 + xi}{x + i}$?**

$$\frac{x + 2 + xi}{x + i} = \frac{(x + 2 + xi)(x - i)}{(x + i)(x - i)} = \frac{x^2 - ix + 2x - 2i + x^2 i + x}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{(x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 1} i$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 3x = 0 \;\rightarrow\; x(x + 3) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

30 **Halla, en función de x, el módulo de $z = \frac{1 + xi}{1 - xi}$.**

Demuestra que $|z| = 1$ para cualquier valor de x.

$$|z| = \left|\frac{1 + xi}{1 - xi}\right| = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = 1$$

O bien:

$$z = \frac{1 + xi}{1 - xi} = \frac{(1 + xi)\,(1 + xi)}{(1 - xi)\,(1 + xi)} = \frac{1 - x^2 + 2xi}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2}\,i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + x^4 - 2x^2 + 4x^2}{(1 + x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1 + x^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + x^2)^2}{(1 + x^2)^2}} = \sqrt{1} = 1$$

31 **Calcula x para que el número complejo que obtenemos al dividir $\frac{x + 2i}{4 - 3i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.**

☛ ***El número complejo $a + bi$ se representa como el punto (a, b), su afijo. Para que esté en la bisectriz del primer cuadrante, debe ser $a = b$.***

$$\frac{x + 2i}{4 - 3i} = \frac{(x + 2i)\,(4 + 3i)}{(4 - 3i)\,(4 + 3i)} = \frac{4x + 3xi + 8i - 6}{16 + 9} = \frac{4x - 6}{25} + \frac{3x + 8}{25}\,i$$

Ha de ser:

$$\frac{4x - 6}{25} = \frac{3x + 8}{25} \rightarrow 4x - 6 = 3x + 8 \Rightarrow x = 14$$

32 **La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?**

$$\left.\begin{array}{l} z + \bar{z} = 8 \\ |z| + |\bar{z}| = 10 \end{array}\right\} \text{ Como } |z| = |\bar{z}| \Rightarrow |z| = 5$$

Si llamamos:

$z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$

$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \rightarrow a = 4$

$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2} = 5 \rightarrow 16 + b^2 = 25 \rightarrow$

$\rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Hay dos soluciones:

$z_1 = 4 + 3i \rightarrow \bar{z}_1 = 4 - 3i$

$z_2 = 4 - 3i \rightarrow \bar{z}_2 = 4 + 3i$

33 **La suma de dos números complejos es $3 + i$. La parte real del primero es 2, y el cociente de este entre el segundo es un número real. Hállalos.**

Llamamos $z = a + bi$ y $w = c + di$

Tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{l} z + w = 3 + i \\ a = 2 \rightarrow c = 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a + c = 3 \\ b + d = 1 \rightarrow b = 1 - d \end{array}\right.$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2+bi}{1+di} = \frac{(2+bi)(1-di)}{(1+di)(1-di)} = \frac{2-2di+bi+bd}{1+d^2} = \frac{2+bd}{1+d^2} + \frac{-2d+b}{1+d^2}i$$

Para que $\frac{z}{w}$ sea un número real, ha de ser:

$\frac{-2d+b}{1+d^2} = 0 \rightarrow -2d+b=0 \rightarrow b=2d$

$2d = 1-d \rightarrow 3d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3}$

Por tanto, los números son:

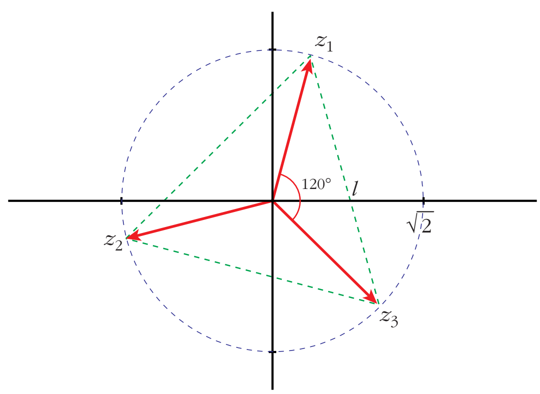
$$z = 2 + \frac{2}{3}i \quad \text{y} \quad w = 1 + \frac{1}{3}i$$

34 **Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo formado al unir esos tres puntos.**

$\sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{225°}} = \sqrt{2}_{(225° + 360°\ k)/3} = \sqrt{2}_{75° + 120°\ k}$

Las tres raíces son:

$z_1 = \sqrt{2}_{75°} \qquad z_2 = \sqrt{2}_{195°} \qquad z_3 = \sqrt{2}_{315°}$



Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno:

$l^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 120° = 2 + 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$

$l = \sqrt{6}$

35 **Los afijos de las raíces cúbicas de $8i$ son los vértices de un triángulo equilátero. Compruébalo.**

¿Determinan el mismo triángulo los afijos de $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt[3]{8}$ o $\sqrt[3]{-8}$?

Representa gráficamente esos cuatro triángulos que has obtenido.

- $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360°\ k)/3} = 2_{30° + 120°\ k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{30°} \qquad z_2 = 2_{150°} \qquad z_3 = 2_{270°}$$

Al tener el mismo módulo y formar entre ellos un ángulo de 120°, el triángulo que determinan es equilátero.

- $\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270°}} = 2_{(270° + 360°\,k)/3} = 2_{90° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

  Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{90°} \qquad z_2 = 2_{210°} \qquad z_3 = 2_{330°}$$

- $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0°}} = 2_{360°\,k/3} = 2_{120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

  Las tres raíces son:

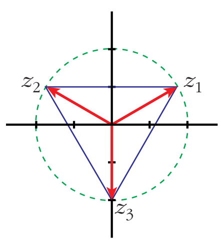
$$z_1 = 2_{0°} \qquad z_2 = 2_{120°} \qquad z_3 = 2_{240°}$$

- $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/3} = 2_{60° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

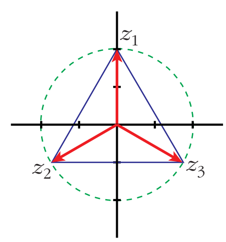
  Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{60°} \qquad z_2 = 2_{180°} \qquad z_3 = 2_{300°}$$

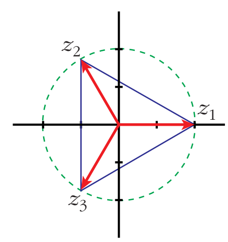
- Representación:



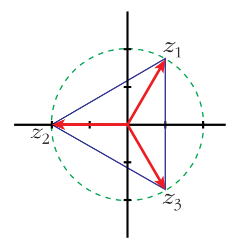
$\sqrt[3]{8i}$



$\sqrt[3]{-8i}$



$\sqrt[3]{8}$

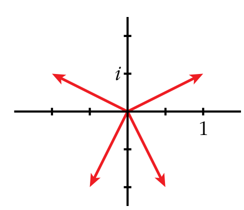


$\sqrt[3]{-8}$

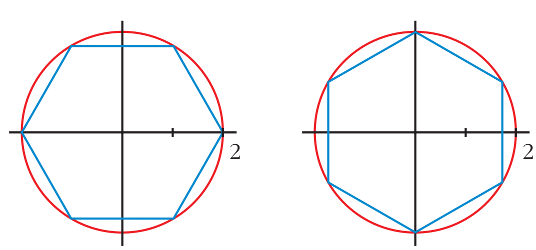
Página 164

36 **¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.**

No. Si fueran las cuatro raíces cuartas de un número complejo, formarían entre ellas un ángulo de 90°; y ni siquiera forman el mismo ángulo, como vemos en la representación gráfica:



37 **Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos hexágonos:**



1er hexágono:

$z_1 = 2_{0°} = 2$ $\quad$ $z_2 = 2_{60°} = 1 + \sqrt{3}\,i$ $\quad$ $z_3 = 2_{120°} = -1 + \sqrt{3}\,i$

$z_4 = 2_{180°} = -2$ $\quad$ $z_5 = 2_{240°} = -1 - \sqrt{3}\,i$ $\quad$ $z_6 = 2_{300°} = 1 - \sqrt{3}\,i$

2º hexágono:

$z_1 = 2_{30°} = \sqrt{3} + i$ $\quad$ $z_2 = 2_{90°} = 2i$ $\quad$ $z_3 = 2_{150°} = -\sqrt{3} + i$

$z_4 = 2_{210°} = -\sqrt{3} - i$ $\quad$ $z_5 = 2_{270°} = -2i$ $\quad$ $z_6 = 2_{330°} = \sqrt{3} - i$

38 ¿Pueden ser las raíces de un número complejo z, los números $2_{28°}$, $2_{100°}$, $2_{172°}$, $2_{244°}$ y $2_{316°}$?

☛ ***Como todos tienen el mismo módulo, sólo tienes que comprobar que los ángulos entre cada dos de ellas son $\frac{360º}{5} = 72º$. Para hallar z, eleva una de ellas a la quinta potencia.***

$$28° + 72° = 100° \qquad 100° + 72° = 172°$$
$$172° + 72° = 244° \qquad 244° + 72° = 316°$$

Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28°})^5 = 32_{140°}$$

39 El complejo $3_{40°}$ es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

☛ ***Para obtener los otros vértices puedes multiplicar cada uno por $1_{72°}$.***

Los otros vértices serán:

$$3_{112°} \qquad 3_{184°} \qquad 3_{256°} \qquad 3_{328°}$$

El número será:

$$z = (3_{40°})^5 = 243$$

40 Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.

☛ ***Ten en cuenta que si $\sqrt[3]{z} = 1 + i \rightarrow z = (1 + i)^3$.***

$1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

Las otras raíces cúbicas son:

$\sqrt{2}_{45° + 120°} = \sqrt{2}_{165°}$ $\qquad$ $\sqrt{2}_{165° + 120°} = \sqrt{2}_{285°}$

Hallamos z:

$$z = (1 + i)^3 = \left(\sqrt{2}_{45°}\right)^3 = \sqrt{8}_{135°} = \sqrt{8}\,(cos\ 135° + i\ sen\ 135°) =$$

$$= \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

Ecuaciones en $\mathbb{C}$

41 **Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:**

a) $x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^2 + x + 4 = 0$

c) $x^2 + 3x + 7 = 0$ **d)** $x^2 - x + 1 = 0$

a) $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$x_1 = -2i, \ \ x_2 = 2i$

b) $x^2 + x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{15}\,i}{2}$

$x_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i, \ \ x_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i$

c) $x^2 + 3x + 7 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{19}\,i}{2}$

$x_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i, \ \ x_2 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i$

d) $x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \ \ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

42 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $x^5 + 32 = 0$ **b)** $ix^3 - 27 = 0$

a) $x^5 + 32 = 0 \rightarrow x^5 = -32$

$x = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/5} = 2_{36° + 72°\,k}; \ \ k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$2_{36°} \quad 2_{108°} \quad 2_{180°} \quad 2_{252°} \quad 2_{324°}$

b) $ix^3 - 27 = 0 \rightarrow x^3 + 27i = 0 \rightarrow x^3 = -27i$

$x = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360°\,k)/3} = 3_{90° + 120°\,k}; \ \ k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90°} \quad 3_{210°} \quad 3_{330°}$

43 **Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:**

a) $z^2 + 4 = 0$ **b)** $z^2 - 2z + 5 = 0$ **c)** $2z^2 + 10 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$z_1 = -2i, \ \ z_2 = 2i$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

$z_1 = 1 - 2i,\;\; z_2 = 1 + 2i$

c) $2z^2 + 10 = 0 \;\rightarrow\; 2z^2 = -10 \;\rightarrow\; z^2 = -5 \;\rightarrow\; z = \pm\sqrt{5}\,i$

$z_1 = -\sqrt{5}\,i,\;\; z_2 = \sqrt{5}\,i$

44 **Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:**

a) $z^4 - 1 = 0$ **b)** $z^4 + 16 = 0$ **c)** $z^4 - 8z = 0$

☛ ***En a) y b) despeja z y halla las cuatro raíces. En c) haz $z(z^3 - 8) = 0$ e iguala a 0 cada factor.***

a) $z^4 - 1 = 0 \;\rightarrow\; z^4 = 1 \;\rightarrow\; z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0°}} = 1_{360°\,k/4} = 1_{90°\,k};\;\; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{0°} = 1 \qquad 1_{90°} = i \qquad 1_{180°} = -1 \qquad 1_{270°} = -i$

b) $z^4 + 16 = 0 \;\rightarrow\; z^4 = -16 \;\rightarrow\; z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} =$

$= 2_{45° + 90°\,k};\;\; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \qquad 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i \qquad 2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

c) $z^4 - 8z = 0 \;\rightarrow\; z(z^3 - 8) = 0 \;\begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{cases}$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0°}} = 2_{(360°\,k)/3} = 2_{120°\,k};\;\; k = 0, 1, 2$

Las soluciones de la ecuación son:

$0 \qquad 2_{0°} = 2 \qquad 2_{120°} = -1 + \sqrt{3}\,i \qquad 2_{240°} = -1 - \sqrt{3}\,i$

45 **Resuelve estas ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:**

a) $z^3 + 8i = 0$ **b)** $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^3 + 8i = 0 \;\rightarrow\; z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270°}} = 2_{(270° + 360°\,k)/3} = 2_{90° + 120°\,k};\;\; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{90°} = 2i \qquad 2_{210°} = -\sqrt{3} - i \qquad 2_{330°} = \sqrt{3} - i$

b) $iz^4 + 4 = 0 \;\rightarrow\; z^4 - 4i = 0 \;\rightarrow\; z^4 = 4i$

$z = \sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4_{90°}} = \sqrt{2}_{(90° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{22°\,30' + 90°\,k};\;\; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt{2}_{22°\,30'} = 1{,}3 + 0{,}5i \qquad \sqrt{2}_{112°\,30'} = -0{,}5 + 1{,}3i$

$\sqrt{2}_{202°\,30'} = -1{,}3 - 0{,}5i \qquad \sqrt{2}_{292°\,30'} = 0{,}5 - 1{,}3i$

46 **Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones:**

$$\mathbf{1 + i \quad y \quad 2 - 3i}$$

☛ ***Ten en cuenta que si z_1 y z_2 son soluciones de una ecuación de segundo grado, esta será de la forma $(z - z_1)(z - z_2) = 0$.***

La ecuación pedida será $[z - (1 + i)][z - (2 - 3i)] = 0$. Multiplica y exprésala en forma polinómica.

$$[z - (1 + i)]\,[z - (2 - 3i)] = z^2 - (2 - 3i)z - (1 + i)z + (1 + i)\,(2 - 3i) =$$
$$= z^2 - (2 - 3i + 1 + i)z + (2 - 3i + 2i - 3i^2) =$$
$$= z^2 - (3 - 2i)z + (5 - i) = 0$$

47 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $2 - 3i$ y $2 + 3i$.**

$$[z - (2 - 3i)]\,[z - (2 + 3i)] = [(z - 2) + 3i]\,[(z - 2) - 3i] =$$
$$= (z - 2)^2 - (3i^2) = z^2 - 4z + 4 - 9i^2 =$$
$$= z^2 - 4z + 13 = 0$$

Interpolación gráfica de igualdades entre complejos

48 **Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.**

☛ ***Escribe z en forma binómica, súmale su conjugado y representa la condición que obtienes.***

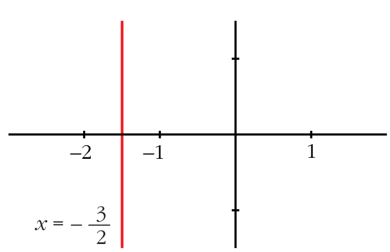
Llamamos $z = x + iy$

Entonces: $\bar{z} = x - iy$

Así:

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \;\rightarrow\; x = -\frac{3}{2}$$

Representación:



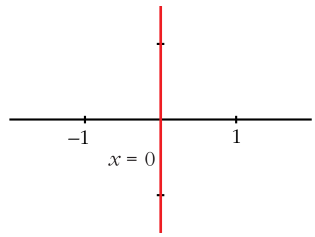
49 **Representa los números complejos que verifican:**

a) $\bar{z} = -z$ **b)** $|z + \bar{z}| = 3$ **c)** $|z - \bar{z}| = 4$

a) $z = x + iy \;\rightarrow\; \bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = -z \;\rightarrow\; x - iy = -x - iy \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (es el eje imaginario)

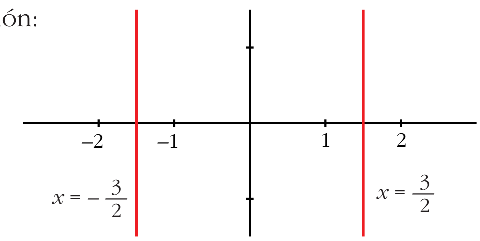
Representación:



b) $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$|z + \overline{z}| = |2x| = 3 \begin{cases} 2x = 3 \ \rightarrow \ x = 3/2 \\ 2x = -3 \ \rightarrow \ x = -3/2 \end{cases}$

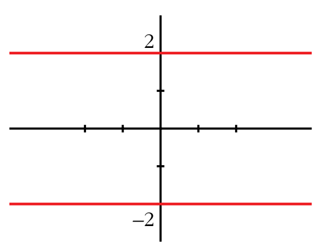
Representación:



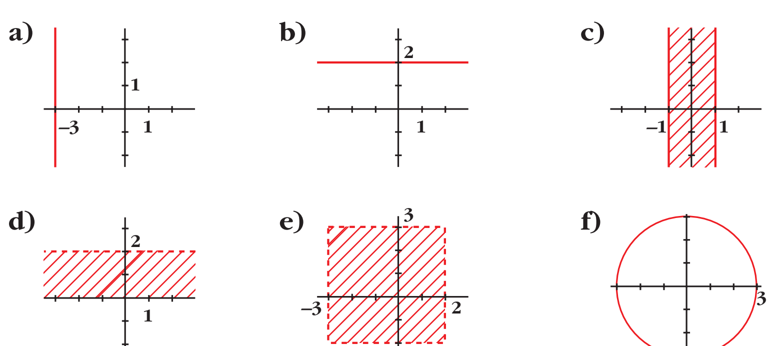
c) $z - \overline{z} = x + iy - z + iy = 2yi$

$|z - \overline{z}| = |2yi| = |2y| = 4 \qquad \begin{matrix} 2y = 4 \ \rightarrow \ y = 2 \\ 2y = -4 \ \rightarrow \ y = -2 \end{matrix}$

Representación:



50 **Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:**



☛ ***En a), b) y f) es una igualdad.***

En c) y d), una desigualdad.

En e), dos desigualdades.

a) $Re\ z = -3$ b) $Im\ z = 2$

c) $-1 \leq Re\ z \leq 1$ d) $0 \leq Im\ z < 2$

e) $\begin{cases} -3 < Re\ z < 2 \\ -2 < Im\ z < 3 \end{cases}$ f) $|z| = 3$

Página 165

CUESTIONES TEÓRICAS

51 **¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0?**

No, también son reales los números con argumento 180° (los negativos).

52 **Prueba que $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$**

Si $z = x + iy$, entonces $\overline{z} = x - iy$.

Así:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

Por tanto:

$$\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

53 **Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha + 180°}$ y $r_{360° - \alpha}$?**

$r_{\alpha + 180°} = -z$ (opuesto de z)

$r_{360° - \alpha} = \overline{z}$ (conjugado de z)

54 **Comprueba que:**

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ **b)** $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ **c)** $\overline{kz} = k\,\overline{z}$**, con** $k \in \mathbb{R}$

$z = a + bi = r_\alpha \rightarrow \overline{z} = a - bi = r_{360° - \alpha}$

$w = c + di = r'_\beta \rightarrow \overline{w} = c - di = r'_{360° - \beta}$

a) $z + w = (a + c) + (b + d)i \rightarrow \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i$

$\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$

b) $x \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \rightarrow \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)}$

$\overline{z} \cdot \overline{w} = (r \cdot r')_{360° - \alpha + 360° - \beta} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)} = \overline{z \cdot w}$

c) $kz = ka + kbi \rightarrow \overline{kz} = ka - kbi$

$k\,\overline{z} = ka - kbi = \overline{kz}$

55 **Demuestra que** $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_{\alpha}} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360° - \alpha} \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

56 **El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.**

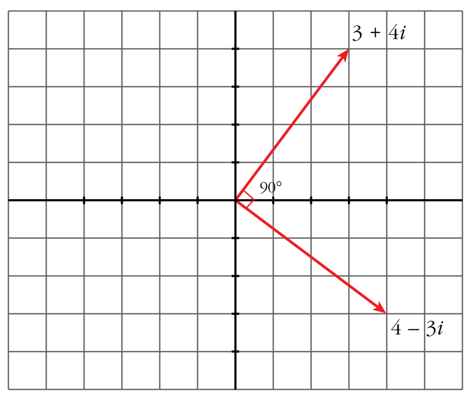
Sí. Por ejemplo:

$z = i, \quad w = i$

$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$

57 **Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90°.**

$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$



58 **Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.**

$2 + 3i = \sqrt{13}_{56°\ 18'}$

$z = \sqrt{13}_{56°\ 18'} \cdot 1_{30°} = \sqrt{13}_{86°\ 18'} = 0{,}23 + 3{,}60i$

59 **¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?**

Se diferencian en 180°. Si el argumento del número es α, el de su opuesto es:

$$180° + \alpha$$

60 **¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$?**

☛ ***Halla $\dfrac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.***

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = a - bi$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{a^2+b^2}=a\\[2ex]\dfrac{-b}{a^2+b^2}=-b\end{array}\right\}\begin{array}{l}\dfrac{a}{a}=a^2+b^2\ \to\ a^2+b^2=1\ \ (\text{módulo } 1)\\[2ex]\text{Ha de tener módulo } 1\end{array}$$

PARA PROFUNDIZAR

61 **La suma de dos números complejos, $z = a + bi$, $w = c + di$, dividida por su diferencia, es un número imaginario puro.**

Prueba que los dos números z y w han de tener el mismo módulo.

☛ ***Haz $\dfrac{(a+c)+(b+d)i}{(a-c)+(b-d)i}$, calcula la parte real de ese cociente e iguala a 0.***

$$\left.\begin{array}{l}z = a + bi\\ w = c + di\end{array}\right\}\begin{array}{l}z + w = (a + c) + (b + d)i\\ z - w = (a - c) + (b - d)i\end{array}$$

$$\frac{z+w}{z-w}=\frac{(a+c)+(b+d)i}{(a-c)+(b-d)i}=\frac{[(a+c)+(b+d)i]\,[(a-c)-(b-d)i]}{[(a-c)+(b-d)i]\,[(a-c)-(b-d)i]}=$$

$$=\frac{(a^2-c^2)+(a+c)+(b-d)i+(b+d)+(a-c)i-(b^2-d^2)i^2}{(a-c)^2+(b-d)^2}=$$

$$=\frac{(a^2-c^2+b^2-d^2)+[(a+c)(b-d)+(b+d)(a-c)]i}{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

Para que sea imaginario puro, su parte real ha de ser 0:

$$\frac{a^2-c^2+b^2-d^2}{(a-c)^2+(b-d)^2}=0\ \to\ a^2-c^2+b^2-d^2=0$$

$$a^2+b^2=c^2+d^2\ \to\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2+d^2}\ \to\ |z|=|w|$$

62 **Sea $z \neq 0$ un complejo y $w = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Prueba que los afijos de z, zw y zw^2 son los vértices de un triángulo equilátero.**

☛ ***Expresa w en forma polar y recuerda el significado de la multiplicación por 1_α***

$z = r_\alpha$, $w = 1_{120°}$

$z \cdot w = r_\alpha \cdot 1_{120°} = r_{\alpha + 120°}$

$z \cdot w^2 = r_\alpha \cdot (1_{120°})^2 = r_\alpha \cdot 1_{240°} = r_{\alpha + 240°}$

Como los tres tienen el mismo módulo y forman entre sí 120°, sus afijos son los vértices de un triángulo equilátero.

63 **Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.**

Halla los otros vértices y la longitud de su lado.

El punto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ corresponde al afijo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = 2_{45°}$.

Para hallar los otros vértices, multiplicamos z por $1_{72°}$:

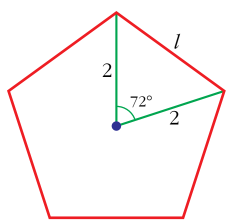
$z_2 = 2_{117°} = -0{,}91 + 1{,}78i$ $\qquad$ $z_3 = 2_{189°} = -1{,}97 - 0{,}31i$

$z_4 = 2_{261°}\ -0{,}31 - 1{,}97i$ $\qquad$ $z_5 = 2_{333°} = 1{,}78 - 0{,}91i$

Los otros tres vértices serán:

(–0,91; 1,78) $\qquad$ (–1,97; –0,31) $\qquad$ (–0,31; –1,97) $\qquad$ (1,78; –0,91)

Hallamos la longitud del lado aplicando el teorema del coseno:



$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos 72°$

$l^2 = 4 + 4 - 4 \cdot 0{,}31$

$l^2 = 8 - 1{,}24$

$l^2 = 6{,}76$

$l = 2{,}6$ unidades

64 **Si el producto de dos números complejos es –8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?**

$$\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180°} \\ 2 = 2_{0°} \end{array}\right\}\ r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta} = 8_{180°} \ \to \ \left\{\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180° \end{array}\right.$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3{}_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha-\beta} = 2_{0°} \ \to \ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{array}\right.$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r' = \dfrac{8}{r} \\ r' = \dfrac{r^3}{2} \end{array}\right\} \ \frac{8}{r} = \frac{r^3}{2} \ \to \ 16 = r^4 \ \to \ \left\{\begin{array}{l} r = 2 \\ r' = 4 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \\ 3\alpha = \beta \end{array}\right\}\ \alpha + 3\alpha = 180° \ \to \ 4\alpha = 180° \ \to \ \left\{\begin{array}{l} \alpha = 45° \\ \beta = 135° \end{array}\right.$$

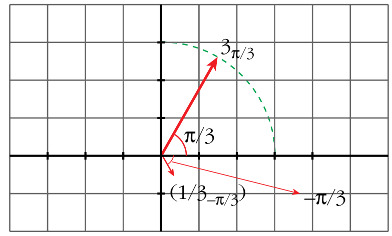
Por tanto: $z = 2_{45°}$, $w = 4_{135°}$

65 **Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado:**

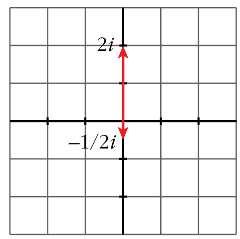
a) $3_{\pi/3}$ $\qquad$ **b)** $2i$ $\qquad$ **c)** $-1 + i$

¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

a) $\dfrac{1}{3_{\pi/3}} = \dfrac{1_{0°}}{3_{\pi/3}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-\pi/3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)$



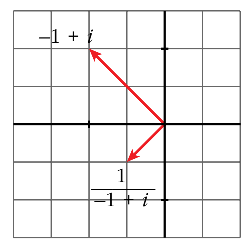
b) $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2} = \dfrac{-1}{2}\, i$



c) $-1 + i = \sqrt{2}_{\;135°}$

$$\frac{1}{-1+i} = \frac{1_{0°}}{\sqrt{2}_{135°}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{225°} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i$$

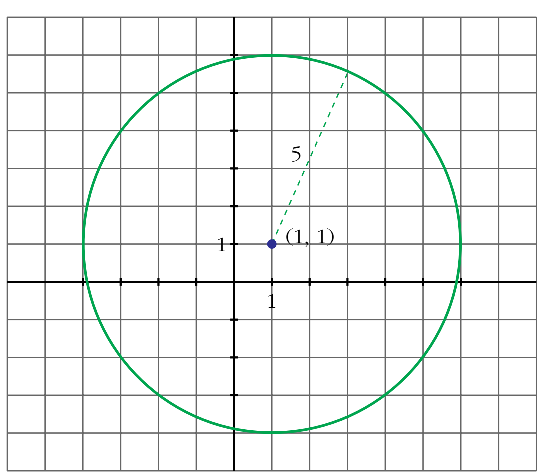
Si $z = r_\alpha$, entonces $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{r}\right)_{360° - \alpha}$



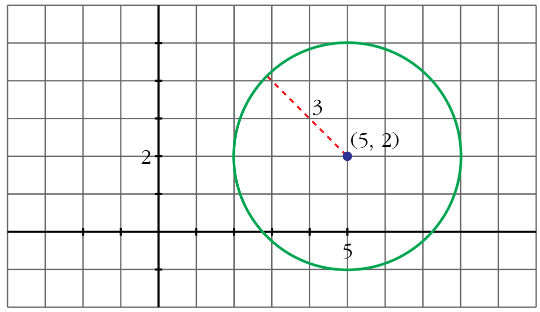
66 **Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?**

a) $|z - (1 + i)| = 5$ **b)** $|z - (5 + 2i)| = 3$

a) Circunferencia con centro en (1, 1) y radio 5.



b) Circunferencia de centro en (5, 2) y radio 3.

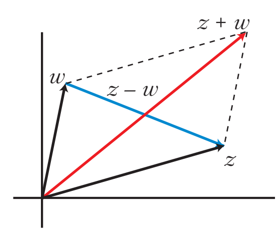


67 **Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.**

$|z - (1 + i)| = 3$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

68 **Demuestra, utilizando números complejos, que en un paralelogramo cualquiera la suma de los cuadrados de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados.**



☛ ***Al formar un paralelogramo cuyos lados contiguos sean dos números complejos, z y w, observa qué relación tienen con estos las diagonales.***

Y recuerda (ejercicio 52) que el cuadrado del módulo de un complejo, $|z|^2$***, es igual al producto de*** z ***por su conjugado*** $\bar{z}$***. Es decir*** $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ***(*)***

Para demostrar la igualdad propuesta, exprésala utilizando los cuadrados de los módulos de los complejos correspondientes, desarróllala utilizando la propiedad (*), opera y simplifica.

Suma de los cuadrados de los lados: $|z|^2 + |w|^2$

Suma de los cuadrados de las diagonales: $|z + w|^2 + |z - w|^2$

Operamos:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) =$$

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + zw + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - zw + w\bar{w} =$$

$$= z\bar{z} + z\bar{z} + w\bar{w} + w\bar{w} = 2z \cdot \bar{z} + 2w \cdot \bar{w} = 2(z\bar{z} + w\bar{w}) =$$

$$= 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Página 168

RESUELVE TÚ

Aparte de la Luna y el Sol, los objetos celestes que se nos presentan con más brillo son planetas: Venus, Marte y Júpiter. Después de ellos, el astro más brillante es la estrella Sirio. Observándola con seis meses de diferencia, presenta una paralaje de 0,72". ¿A qué distancia se encuentra?

Como hemos visto:

$$d = \frac{150\,000\,000}{sen\,(\alpha/2)}$$

Si $\alpha = 0{,}72''$, quedaría:

$$d = \frac{150\,000\,000}{sen\,(0{,}72''/2)} = 8{,}6 \cdot 10^{13} \text{ km} \approx 9 \text{ años-luz}$$