

Bases de l'Électrocinétique

On désigne sous le nom d'*électrocinétique* l'étude des courants électriques circulant dans des circuits.

Il peut s'agir de circuits de puissance (on parle alors d'*électrotechnique*, par exemple pour le réseau industriel 50 Hz) ou de circuits de transports d'information (on parle dans ce cas d'*électronique*, par exemple dans le cas des circuits de haute fréquence des appareils informatiques ou des radiotéléphones).

Ce chapitre présente les lois de base de l'électrocinétique, *admises* à ce stade de la présentation ; en effet, les fondements théoriques de l'électrocinétique relèvent du cours d'électromagnétisme de seconde année.

4.1 Courant, potentiel et tension électriques

4.1.1 Courant électrique

Depuis les travaux de COULOMB[†] au début du XIX^e siècle, la *charge électrique* d'une particule est une grandeur qualifiée de *scalaire invariant* (il s'agit d'une grandeur indépendante du référentiel d'étude) ; c'est aussi une grandeur *conservée*, c'est-à-dire que la charge électrique q d'un système *isolé* reste constante, quelles que soient les évolutions de ce système.

L'unité de mesure des charges électriques porte le nom usuel de *coulomb* (symbole C). Les charges des particules élémentaires (électrons, protons) sont des multiples¹ de la *charge élémentaire* :

$$e = 1,602189 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (4.1)$$

À l'échelle des matériaux macroscopiques, le très grand nombre de porteurs de charge permet de décrire le mouvement des charges électriques comme celui d'un *fluide continu*. Par exemple, sur le schéma de la figure 4.1, des particules de charge électrique q franchissent, en très grand nombre, la surface ($\mathcal{S}$) dans le sens de son orientation arbitraire $\mathbf{n}$.

[†]La structure interne des nucléons montre qu'on doit en fait les considérer comme des assemblages de *quarks*, particules dont la charge est un multiple entier de $e/3$. Toutefois, les quarks sont confinés à une échelle de dimension très inférieure à la résolution de pratiquement toutes les mesures pratiques et, la plupart du temps, ne nous apparaissent pas isolément mais par assemblages dont la charge est, précisément, un multiple de e .

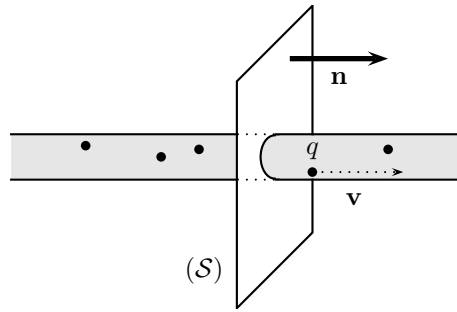


Figure 4.1 – Flux de charge à travers une surface

On définit alors le *débit de charge* ou *courant électrique* à travers une *surface orientée* comme la quantité de charge électrique qui traverse cette surface (dans le sens conventionnel de son orientation) par unité de temps :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (4.2)$$

Notons que la grandeur i est un scalaire *algébrique*, dont le signe dépend de l'orientation de $\mathbf{n}$ ou, plus généralement, de l'orientation *choisie par convention* pour l'étude du circuit électrique.

L'unité de mesure des courants électriques porte le nom d'*ampère* (symbole A) ; c'est en fait l'unité de base électrique du système international. Le nom de cette unité rappelle celui du physicien lyonnais AMPÈRE[‡]. Bien sûr, un ampère n'est autre qu'un coulomb par seconde.

4.1.2 Potentiel électrique

La notion de potentiel électrostatique n'est pas simple, et nous n'en donnerons une définition rigoureuse que progressivement, à travers les cours d'électrostatique de première année et d'électromagnétisme de seconde année. Provisoirement, nous admettrons toutes les propriétés des potentiels au travers d'une analogie basée sur la nature quasi-fluide de l'écoulement des charges, tel qu'il a été présenté sur la figure 4.1.

Dans un écoulement liquide, par exemple le long d'une rivière, à travers un barrage, etc., la force responsable de l'écoulement est en général la force de pesanteur : l'écoulement d'une masse m d'eau se fait spontanément dans le sens de la diminution de son énergie potentielle de pesanteur $E_p = m \times g_0 z$, où z est l'altitude de l'eau.

Nous admettrons de même qu'en tout point P d'un circuit existe une fonction potentiel électrique $V(P)$, tel que l'énergie potentielle d'une charge q placée au point P s'exprime selon :

$$E_p = qV(M) \quad (4.3)$$

Un potentiel électrique peut donc être mesuré en joule par coulomb ; cette unité a reçu le nom usuel de volt (symbole V), en rappel du nom du physicien italien VOLTA[‡].

De même que l'origine des altitudes est arbitraire, l'origine des potentiels peut aussi être choisie arbitrairement. Si le potentiel est choisi de sorte que $V(M) = 0$, alors le point M porte le nom de *masse* du circuit. Ce point est représenté par le symbole conventionnel ci-contre.



Dans un exercice, l'étudiant peut fixer la masse au point de son choix, si elle n'est pas définie par l'énoncé : il diminue ainsi le nombre de grandeurs inconnues en fixant un potentiel à zéro.

4.1.3 Tension électrique

L'origine arbitraire de l'origine des altitudes n'empêche pas les *dénivelés* (ou différences d'altitude) d'être définis de manière unique. Il en va de même dans le domaine électrique ; les *tensions* (ou différences de potentiels) dans un circuit, définies par :

$$u_{AB} = V(B) - V(A) \quad (4.4)$$

sont, dans un circuit donné, uniques et indépendantes du choix arbitraire de l'origine des potentiels.

Du fait de leur définition par différence, on utilise généralement une notation vectorielle pour représenter les tensions sur des schémas électriques. Sur celui de la figure 4.2, la flèche sous le symbole i rappelle l'orientation locale de la branche à travers laquelle on mesure le courant algébrique i , tandis que la flèche sur le symbole u rappelle qu'il s'agit de la tension $u = V(M) - V(N)$.

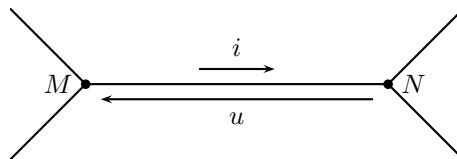


Figure 4.2 – Notations algébriques des courants et tensions

4.2 Lois de Kirchhoff

4.2.1 L'A.R.Q.P.

□ **Propagation** : toutes les grandeurs physiques peuvent faire l'objet de phénomènes de *propagation*. On parle de propagation (sans atténuation ni déformation) lorsqu'une certaine grandeur physique $g(M, t)$, observée au point M et à l'instant t , se retrouve inchangée un peu plus tard (à l'instant $t' > t$) et un peu plus loin (au point M' , avec $d = MM'$) : $g(M', t') = g(M, t)$.

On parle alors de *vitesse* ou *célérité de propagation* pour la grandeur c telle que $c = \frac{MM'}{t' - t}$; dans le cas des grandeurs électriques le long d'un circuit, nous montrerons dans le cadre du cours de seconde année que la célérité c est toujours du même ordre de grandeur que celle c_0 de la lumière (en général $c < c_0$), dont la valeur $c_0 \simeq 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ressort du choix des unités du système international, (voir aussi 1.1, page 4).

L'étude de l'électrocinétique est fortement simplifiée si on peut *négliger* les phénomènes de propagation ; une telle situation porte le nom d'*approximation des régimes*

quasi-permanents ou A.R.Q.P. La totalité des cours d'Électrocinétique et d'Électromagnétisme de première année sont traités dans le cadre de l'A.R.Q.P.

Concrètement, on peut discuter de la limite de validité de l'A.R.Q.P. si on dispose d'une mesure de la plus grande dimension D d'un circuit électrique, et d'un ordre de grandeur de la durée T des phénomènes les plus brefs qui se produisent dans ce circuit.

□ *Limites de l'A.R.Q.P.* : si la définition de D va de soi, celle de T est plus délicate ; nous apprendrons progressivement comment n'importe quelle grandeur fonction du temps, par exemple une tension électrique $u(t)$, peut faire l'objet d'une *décomposition de Fourier*, en tant que combinaison linéaire de composantes sinusoïdales, chacune d'elles étant de la forme $u_\omega(t) = U_\omega \cos(\omega t + \varphi)$, avec pour pulsation $\omega = 2\pi/T$ si la période de $u_\omega(t)$ est T .

Notons que la description d'une composante sinusoïdale se fait aussi souvent en termes de *fréquence*, celle-ci étant définie par $f = 1/T = \omega/2\pi$. L'unité de fréquence est le hertz (symbole Hz), tandis que celle des pulsations est le radian par seconde.

Le circuit pourra être décrit dans le cadre de l'A.R.Q.P. si les phénomènes de propagation y sont négligeables, donc si le temps de retard $\Delta t = D/c \simeq D/c_0$ dans la propagation du signal d'un bout à l'autre du circuit reste négligeable devant la plus courte durée T des phénomènes électriques :

Condition d'A.R.Q.P.



Un circuit de dimension D , dont les phénomènes électriques ont pour durée la plus courte T , ou pour pulsation la plus élevée ω , sera traité dans le cadre de l'A.R.Q.P. si :

$$D \ll c_0 T \quad \text{ou bien} \quad \omega \ll \frac{c_0}{D}$$

□ *Ordres de grandeur* : concrètement, si on considère un circuit électrique industriel de puissance (fréquence $f = 50$ Hz donc $T = 1/f = 20$ ms), la dimension maximale compatible avec la condition d'A.R.Q.P. vérifie $D \ll 6\,000$ km. Les phénomènes de retard d'établissement du courant du fait de la propagation ne seront donc pris en compte que pour les réseaux continentaux d'alimentation de puissance ; tout circuit de dimension plus « ordinaire » sera traité dans le cadre de l'A.R.Q.P.

De même, si on étudie un circuit électronique disposé sur une table de travaux pratiques, de dimension $D \simeq 1$ m, la condition d'A.R.Q.P. imposera $\omega \ll 3 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ou $f \ll 50$ MHz ; c'est le domaine de l'*électronique basse fréquence*, que nous étudierons au laboratoire.

4.2.2 La loi des mailles

Considérons un parcours *fermé* $ABCDE \dots A$ réalisé dans un circuit électrique (cf. figure 4.3). On définit alors les tensions $u_1 = V(B) - V(A)$, $u_2 = V(C) - V(B)$, etc. Cette simple définition mène immédiatement à $u_1 + u_2 = V(C) - V(A)$, puis de même à $u_1 + u_2 + u_3 = V(D) - V(A)$ et finalement à $\sum_k u_k = V(A) - V(A) = 0$ si la somme

porte sur un parcours complet, fermé. Ainsi, la simple supposition de l'*existence* d'une fonction potentiel définie en chaque point mène de manière automatique à la loi des nœuds : la somme des tensions le long d'un parcours fermé est nulle.

Il s'agit toutefois d'une approximation ; en effet, l'application de la loi des nœuds à *tout instant* implique que la modification du potentiel en un point A du circuit a un effet *immédiat* sur le potentiel en certains autres points $B, C, D, E, \dots$, sans

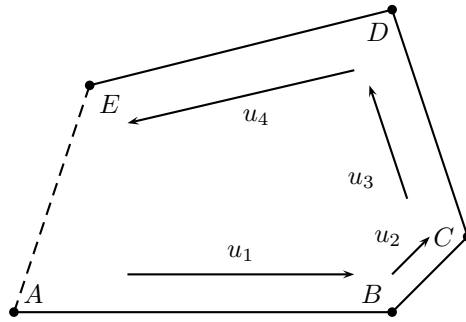


Figure 4.3 – Loi des mailles

qu'aucun phénomène de propagation n'ait le temps d'intervenir : il ne peut donc s'agir que d'une relation limitée au domaine de l'A.R.Q.P.

Loi des mailles



Dans le domaine de l'A.R.Q.P., la somme des tensions le long de n'importe quel parcours fermé est nulle :

$$\sum_k u_k = 0$$

Nous verrons plus loin (cf. § 4.3.4) comment certains éléments peuvent provoquer des écarts apparents à la loi des mailles, et comment cette dernière doit être modifiée pour tenir compte des propriétés des *bobines d'induction*.

4.2.3 La loi des nœuds

Considérons un *nœud* M d'un réseau électrique, c'est-à-dire un point où parviennent plusieurs branches parcourues de divers courants électriques i_k ; ces courants seront tous algébrisés de manière à compter positivement les charges *arrivant* au nœud M (cf. figure 4.4).

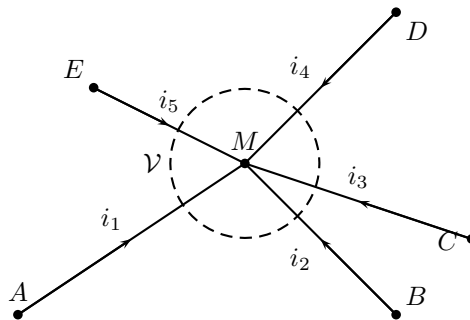


Figure 4.4 – Loi des nœuds

Considérons alors un volume $\mathcal{V}$, de faite extension autour du point M . La charge électrique $q(t)$ emmagasinée dans ce volume $\mathcal{V}$ augmente algébriquement du fait des divers courants qui parviennent en M ; l'augmentation $dq_k = i_k dt$ correspond aux charges parvenant pendant la durée dt le long du circuit numéro k , soit aussi une variation totale de la charge donnée par $\frac{dq}{dt} = \sum_k i_k$.

Dans le cadre des régimes *permanents*, aucune grandeur électrique ne peut dépendre du temps t , et il en va de même de $q(t)$: $\frac{dq}{dt} = 0$ donc $\sum_k i_k = 0$.

Dans le cadre de l'A.R.Q.P., nous montrerons qu'il en va *en général* de même : aucun point situé au fil d'un circuit ne peut stocker de charge électrique, tout conducteur électrique restant *électriquement neutre en volume* ; on affirme alors la *loi des nœuds* :

Loi des nœuds



Dans le domaine de l'A.R.Q.P., la somme des courants algébriquement arrivant en n'importe quel nœud du circuit est nulle :

$$\sum_k i_k = 0$$

Nous verrons plus loin (cf. § 4.3.3) comment certains éléments peuvent accumuler des charges en *surface*, formant ce qu'on appelle des *condensateurs* ; ces éléments ne vérifient pas forcément la loi des nœuds sous la forme élémentaire sous laquelle elle est exprimée ici.

4.3 Dipôles simples

4.3.1 Dipôles électrocinétiques

Un réseau est souvent constitué de dipôles électrocinétiques, c'est-à-dire d'éléments reliés au reste du réseau par deux bornes A et B . Un tel dipôle est *a priori* orienté, c'est-à-dire qu'une des bornes est qualifiée de borne d'entrée (c'est A sur le schéma de la figure 4.5) et l'autre de borne de sortie (c'est B sur le même schéma).

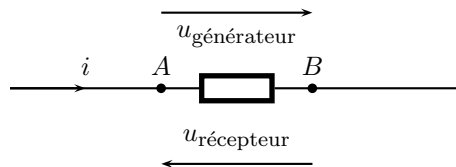


Figure 4.5 – Dipôle électrocinétique

L'orientation du dipôle impose automatiquement l'algébrisation du courant électrique qui le traverse ; nous noterons celui-ci i .

Une fois le dipôle orienté, il reste deux possibilités conventionnelles pour la mesure de la tension à ses bornes. Si on choisit de considérer le dipôle comme un *récepteur* d'énergie, qu'il dissipera sous une forme non électrique, on constate en général une *chute de tension* le long du dipôle dans le sens de passage du courant ; pour cette raison, on utilisera la *convention des récepteurs* en caractérisant le dipôle par cette chute $u_{\text{réc}} = V(A) - V(B)$.

Si, au contraire, le dipôle se comporte plutôt comme un générateur, il peut permettre une remontée de la tension lors du passage du courant et on le caractérisera dans le cadre de la *convention des générateurs* par la donnée de $u_{\text{gén}} = V(B) - V(A)$.

Dans certains cas, une fois une orientation (et donc le signe de i) choisie, une fois la convention (et donc le signe de u) choisie, il existe une relation simple liant ces deux grandeurs ; si c'est le cas, on peut la représenter en traçant la courbe $i = i(u)$; elle porte le nom de *caractéristique courant-tension* du dipôle.

4.3.2 Résistances

On appelle *résistances* ou *conducteurs ohmiques* les dipôles, en général constitués d'un cylindre de matériau conducteur ou semi-conducteur, pour lesquels la caractéristique courant-tension existe et prend, en *convention des récepteurs*, la forme d'une *droite passant par l'origine* (cf. figure 4.6) ; on écrit alors la *loi d'Ohm* :

$$u = Ri \quad i = Gu \quad \text{avec} \quad G = 1/R \quad (4.5)$$

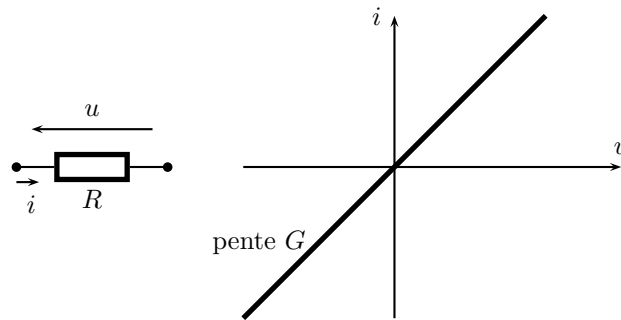


Figure 4.6 – Conducteurs ohmiques (résistances)

Dans cette expression, R est la *résistance électrique* du conducteur ; elle se mesure en ohm (symbole Ω), unité qui rappelle le nom du physicien allemand OHM[‡]. Son inverse $G = 1/R$ est la *conductance électrique* du même conducteur ; elle se mesure en siemens (symbole S), unité inverse de l'ohm qui rappelle le nom de l'ingénieur allemand SIEMENS[‡].

On peut rencontrer en pratique toutes sortes de valeurs numériques pour R et G , depuis des résistances de fils électriques inférieures à 1Ω jusqu'à des résistances d'entrée d'appareils de mesure supérieures à $10 \text{ M}\Omega$; toutefois, les montages électroniques utilisent plutôt la gamme de $1 \text{ k}\Omega$ à $100 \text{ k}\Omega$.

4.3.3 Condensateurs

Les conducteurs électriques (par exemple les métaux) ne peuvent pas accumuler de charges en volume, comme il a été affirmé plus haut. Par contre, il leur est en général possible d'en accumuler à leur surface. Cette potentialité n'est en pratique réalisée que si la surface en regard est importante, mise en face d'une autre surface équivalente, à courte distance ; la variation de potentiel d'une surface à l'autre doit être très importante.

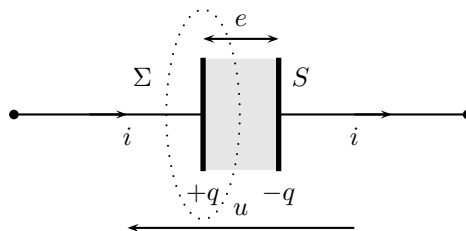


Figure 4.7 – Géométrie d'un condensateur

Une telle disposition porte le nom de *condensateur* ; on notera (cf. figure 4.7) S la surface commune des *armatures* métalliques disposées face à face, et e l'épaisseur (ici supposée constante) du matériau *isolant* (vide, air, papier, polyéthylène, etc.) qui sépare ces armatures.

On peut alors montrer, dans le cadre de l'A.R.Q.P., que les deux armatures en regard portent des charges opposées $+q$ et $-q$; la charge totale du système reste toujours nulle.

L'étude de la surface Σ entourant l'une des armatures montre alors que le courant i parvenant sur l'armature de charge q vérifie $i = \frac{dq}{dt}$; de même, l'étude du bilan des charges pour l'autre armature montre que le courant partant de l'autre armature est aussi i (cf. figure 4.7).

Ainsi, la loi des nœuds s'applique bien à l'ensemble du condensateur, tandis qu'on ne peut l'appliquer à une armature unique, puisque le courant qui l'atteint est en général $i = \frac{dq}{dt} \neq 0$.

Enfin, nous montrerons (en seconde année) que la tension u aux bornes du condensateur, évaluée dans la convention des récepteurs, est proportionnelle à la charge accumulée, sous la forme $q = Cu$; la constante C porte le nom de *capacité* du condensateur. L'unité de mesure de C porte, dans le système international, le nom de farad (symbole F) ; en référence au physicien anglais FARADAY[‡].

Finalement, on retiendra les relations (4.6), qui montrent qu'il n'existe pas de *caractéristique* pour un condensateur : i ne dépend pas seulement de u mais de ses variations au cours du temps.

$$q = Cu \quad i = \frac{dq}{dt} \quad \text{donc aussi} \quad i = C \frac{du}{dt} \quad (4.6)$$

On n'oubliera pas de toujours préciser pour chaque condensateur les signes de trois grandeurs électriques : le courant i , la charge q (portée par l'armature sur laquelle arrive le courant ; l'autre porte $-q$), et la tension u , avec $q = Cu$ en convention des récepteurs.

En particulier, en régime *permanent*, le courant i est nul et un condensateur se comporte donc comme un *circuit ouvert*. Au contraire, en régime *variable*, il n'est possible d'augmenter la tension u qu'en alimentant le condensateur en courant, $i = C \frac{du}{dt} \neq 0$. Nous aurons l'occasion de revenir ultérieurement sur ce comportement mais nous noterons dès à présent :

Propriété des condensateurs



Un condensateur s'oppose aux variations de la tension u à ses bornes.

Alors qu'on trouve au laboratoire des résistances électriques présentant une très large gamme de valeurs (de quelques Ω à quelques $10^7 \Omega$), les condensateurs courants présentent en général des valeurs nominales faibles, de quelques nF (10^{-9} F) à quelques mF (10^{-3} F) au maximum. Il importe de tenir compte de ces limitations dans les applications numériques.

4.3.4 Bobines d'induction

Il existe d'autres circuits dont le comportement en régime variable diffère sensiblement du comportement en régime permanent. En particulier, un simple fil métallique, lors-

qu'il est bobine de manière adéquate, forme ce qu'on appelle une *bobine d'induction* (cf. figure 4.8).

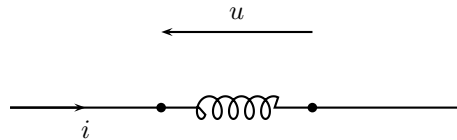


Figure 4.8 – Bobine d'induction

En régime permanent, ce système, décrit dans la convention des générateurs, est simplement résistif, et vérifie la relation $u = ri$, où r est la résistance électrique du fil qui compose la bobine. Par contre, en régime variable, la loi des mailles semble ne plus être vérifiée dans un circuit fermé comprenant une bobine ; il faut ajouter à la tension ri un terme proportionnel à la dérivée temporelle du courant :

$$u = ri + L \frac{di}{dt} \quad (4.7)$$

où L porte le nom d'*inductance propre* de la bobine. L'unité de mesure des inductances propres porte le nom de henry (symbole H).

On peut aussi interpréter ce résultat en notant qu'une variation du courant i n'est possible que si la bobine est alimentée sous une tension u suffisante, ou encore :



Propriété des bobines

Une bobine d'induction s'oppose aux variations du courant i qui la traverse.

Il arrive encore fréquemment que, par analogie aux condensateurs, on définisse une *bobine idéale* par la relation :

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (4.8)$$

Il ne s'agit toutefois que d'une extrapolation théorique des objets réels ; dans la plupart des cas, on ne peut pas négliger la résistance r des bobines et la relation (4.8) devrait en principe toujours être remplacée par (4.7).

Les bobines d'induction sont en général des appareils encombrants et coûteux ; de plus, il est difficile de réaliser des valeurs importantes de L ; ainsi, une bobine de 1 H est un appareil exceptionnel, l'ordre de grandeur le plus courant étant la dizaine de mH (pour une bobine de cuivre pesant près d'un kilogramme) voire quelques μH (pour des bobines réalisés directement sur des circuits imprimés). On n'oubliera pas cet ordre de grandeur pour les applications numériques.

4.4 Appareils des mesures électriques

4.4.1 Voltmètres

Un appareil de mesure des tensions est un voltmètre ; il se branche aux points A et B dont on veut connaître la différence de potentiel, en *dérivation* du circuit étudié (cf.

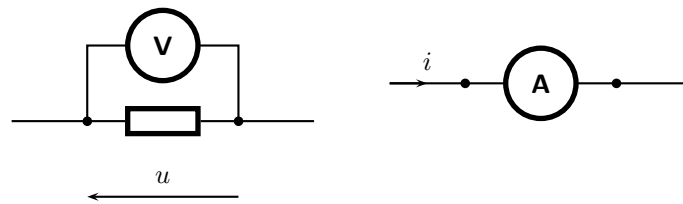


Figure 4.9 – Voltmètres et ampèremètres

figure 4.9 à gauche), qui n'a donc pas besoin d'être débranché. Un voltmètre *idéal* ne perturbant pas le circuit mesuré, il doit donc appeler un courant i_v aussi faible que possible.

Les voltmètres sont donc souvent caractérisés par les limitations de leurs performances (consommation d'un courant i_v non nul lorsqu'ils mesurent une tension u). On définit en général une *impédance d'entrée* (ou *résistance d'entrée*) du voltmètre $R_v = u/i_v$; avec les appareils courants, celle-ci est en général de l'ordre de grandeur de $10^6 \Omega$ à $10^7 \Omega$. Comme tout appareil de mesure, un voltmètre est aussi caractérisé par une *précision* et une *résolution* limitées.

4.4.2 Ampèremètres

En électronique, on n'utilise pratiquement pas les ampèremètres ; en effet, ils doivent être placés en série (cf. figure 4.9 à droite) dans le circuit à mesurer, ce qui impose de débrancher celui-ci, ce qui est tout simplement impossible pour un circuit imprimé. D'autre part, un ampèremètre idéal ne doit pas perturber le circuit utilisé ; il doit donc fonctionner à tension nulle. Les écarts à cette situation idéale sont souvent trop importants pour l'usage en électronique, où les tensions étudiées sont elles-mêmes très faibles.

Si on doit mesurer la valeur d'un courant électrique, on préférera mesurer, au moyen d'un voltmètre, la tension aux bornes d'une résistance connue, et utiliser la relation $i = u/R$.

4.4.3 Oscilloscopes

Pour étudier non pas seulement la valeur d'une tension à un instant donné, mais aussi ses évolutions au cours du temps, on utilise des *oscilloscopes*. Il s'agit de voltmètres non idéaux, dont on retiendra seulement quelques caractéristiques qui seront étudiées plus en détail au laboratoire.

De nombreux oscilloscopes ne peuvent mesurer qu'un *potentiel* et non pas une tension ; en d'autres termes, une de leurs deux bornes de mesure est impérativement (pour des raisons de sécurité électrique) reliée à la *masse électrique* du réseau 220 V local. On parle alors de *masse imposée par la mesure*.

Comme tout voltmètre, les oscilloscopes ont une impédance d'entrée élevée, mais pas infinie. Celle-ci figure en général sur la notice ou la face avant de l'appareil. L'étage d'entrée d'un oscilloscope est en fait équivalent à la mise en parallèle d'une résistance élevée (de l'ordre de $10 \text{ M}\Omega$ en général) et d'un condensateur (de capacité de l'ordre de 15 pF en général).

Le fait de mesurer des *variations* d'une grandeur au cours du temps amène à étudier de nombreuses autres caractéristiques de ces appareils : fonctions de synchronisation, d'analyse de forme du signal, etc. Ces propriétés ne sont pas présentées ici.

Ce qu'il faut absolument savoir

L'ARQP correspond, pour un dipôle de dimension D et des tensions et courants de plus haute pulsation ω , à la condition $D\omega \ll c_0$.

Le long d'un circuit *orienté*, on définit le courant électrique $i = \frac{dq}{dt}$. En n'importe quel nœud, dans le cadre de l'ARQP, $\sum_k i_k = 0$ est la loi des nœuds.

En tout point d'un circuit, on définit un potentiel $V(P)$, à une constante près. La tension u_{AB} est la différence $V(B) - V(A)$. Le long de n'importe quel parcours fermé, dans le cadre de l'ARQP, $\sum_k u_k = 0$ est la loi des mailles.

Un dipôle doit être orienté; une fois cette orientation choisie, on le décrit par une convention (générateur ou récepteur). Dans la convention choisie, la relation $i = i(u)$ est la caractéristique du dipôle.

En convention des récepteurs, $u = Ri$ pour une résistance, $i = C \frac{du}{dt}$ (soit $q = Cu$) pour un condensateur et $u = L \frac{di}{dt}$ pour une bobine (idéale).

Un voltmètre mesure une tension $u = v_A - v_B$ ou, dans le cas des oscilloscopes, le potentiel $v_P - v_M$ d'un point P relativement à la masse M du réseau d'alimentation.

Un oscilloscope est en général équivalent, du point de vue électrique, à une résistance élevée (quelques $10^6 \Omega$), éventuellement en parallèle avec une faible capacité (quelques 10^{-12} F).

Exercices avec solutions détaillées

A : Dipôles équivalents

1. Déterminer la résistance équivalente à l'association « série » de la figure 4.10, schéma (a).

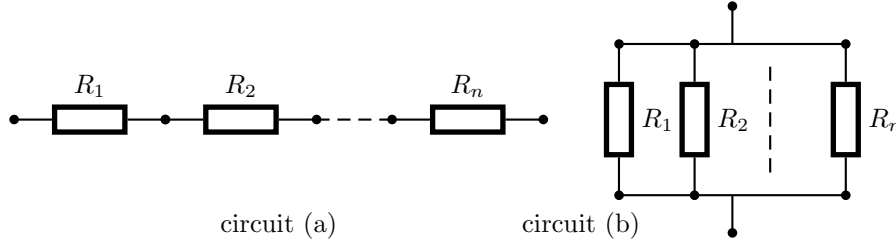


Figure 4.10 – Dipôles équivalents

2. Déterminer la résistance équivalente à l'association « parallèle » de la figure 4.10, schéma (b).
3. Déterminer de même l'inductance propre équivalente à la mise en série de n bobines idéales d'inductance $L_1, L_2, \dots, L_n$.
4. Déterminer enfin le condensateur équivalent à la mise en parallèle de n condensateurs de capacités $C_1, C_2, \dots, C_n$.

— Solutions proposées —

1. Les n dipôles étant parcourus par le *même courant* i , on peut écrire en convention récepteur la tension u_k aux bornes de R_k sous la forme $u_k = R_k i$. La tension totale étant $u = \sum_{k=1}^n u_k$, on peut l'écrire $u = R i$ avec pour résistance équivalente à l'ensemble

$$\text{associé en série la somme } R = \sum_{k=1}^n R_k .$$

2. Les n dipôles étant soumis à la *même tension* u , décrite en convention des récepteurs, on peut écrire le courant i_k à travers R_k sous la forme $i_k = G_k u$, où on a posé $G_k = 1/R_k$. Le courant total étant $i = \sum_{k=1}^n i_k$, on peut l'écrire $i = G u$ avec pour conductance équivalente à l'ensemble associé en parallèle la somme $G = \sum_{k=1}^n G_k$ soit

$$\text{encore } 1/R = \sum_{k=1}^n 1/R_k .$$

3. On procède de même ; la somme des $u_k = L_k \frac{di}{dt}$ pour un courant i commun s'écrit

$$u = L \frac{di}{dt} \text{ où l'inductance propre équivalente est la somme } L = \sum_{k=1}^n L_k .$$

4. La somme des $i_k = C_k \frac{du}{dt}$ s'écrit $i = C \frac{du}{dt}$ avec donc $C = \sum_{k=1}^n C_k$.

B : Symétries dans un réseau

On étudie le réseau de la figure 4.11. Les potentiels V et V' sont fixés. Déterminer le courant dans chacune des sept résistances du circuit. Quelle est la signification de l'axe tracé en pointillés ?

— Solutions proposées —

La loi des nœuds impose $i_0 = i_1 - i_2 = i'_2 - i'_1$.

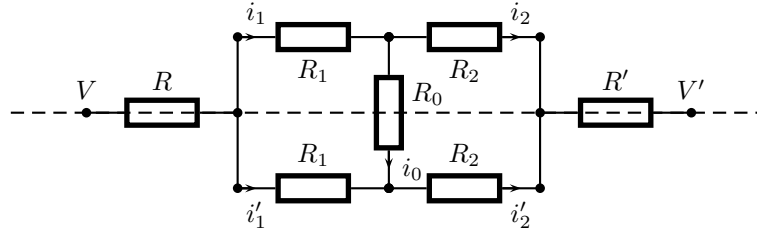


Figure 4.11 – Symétries dans un réseau

La loi des mailles dans les deux mailles centrales du circuit impose alors $0 = R_1 i_1 + R_0 i_0 - R_1 i'_1$ et $0 = R_2 i_2 - R_0 i_0 - R_2 i'_2$.

On a donc $i_0 = R_1 \frac{i'_1 - i_1}{R_0}$ et $i_0 = -R_2 \frac{i'_2 - i_2}{R_0}$; comme on a aussi vu que $i'_1 = i'_2 - i_0$ et

$i_1 = i_2 + i_0$, on peut encore écrire $i_0 = R_1 \frac{i'_2 - i_2}{R_0} - 2 \frac{R_1}{R_0} i_0$ qui s'écrit aussi $i_0 = R_1 \frac{i'_2 - i_2}{R_0 + 2R_1}$.

La comparaison avec l'autre expression de i_0 en fonction de $i'_2 - i_2$ montre que, nécessairement, $\frac{R_1}{R_0 + 2R_1} = -\frac{R_2}{R_0}$, ou bien que $i_2 = i'_2$. La première condition est naturellement impossible (égalité d'un réel négatif et d'un réel positif) donc nécessairement $i_2 = i'_2$, $i_1 = i'_1$ et $i_0 = 0$. On pouvait aussi remarquer que le circuit présente un axe de symétrie (pointillé sur la figure 4.11); les potentiels de part et d'autre de cet axe de symétrie étant symétriques, la résistance R_0 ne peut être parcourue par aucun courant puisque la tension à ses bornes est nulle.

En particulier, on peut ôter R_0 du circuit sans modifier la répartition des courants et potentiels. L'ensemble des quatre résistances centrales est alors équivalent (voir l'exercice A) à la mise en parallèle de deux résistances égales à $R_1 + R_2$, soit $R_e = \frac{R_1 + R_2}{2}$. Après mise en série avec R et R' , on peut écrire pour le courant total $i = i_1 + i'_1 = 2i_1$ la loi d'Ohm

$$V - V' = (R + R' + R_e) i \text{ d'où enfin } i_1 = i'_1 = i_2 = i'_2 = 2 \frac{V - V'}{2R + RR' + R_1 + R_2}.$$

C : Chaîne résistive

On considère la chaîne de résistances de la figure 4.12, considérée comme infinie vers la droite. Le courant I est connu, constant.

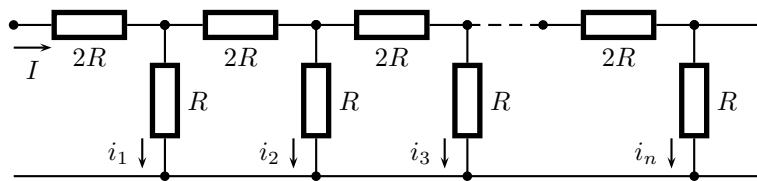


Figure 4.12 – Réseau périodique

1. Expliciter la relation de récurrence vérifiée par les courants i_n . À quelle(s) condition(s) peut-on l'écrire sous la forme $i_n = i_0 \lambda^n$?
2. Expliquer pourquoi la suite des i_n est décroissante. Déterminer les courants i_n ($n \geq 1$). En déduire la résistance R_c de la chaîne.
3. On considère maintenant l'élément de chaîne de la figure 4.13. On appelle résistance itérative de cet élément la valeur R_0 de la résistance à brancher entre B et B' pour que la résistance apparente de l'ensemble, vue entre A et A' , soit encore égale à R_0 .

Calculer R_0 . Établir une relation simple entre R , R_0 et R_c ; commenter.

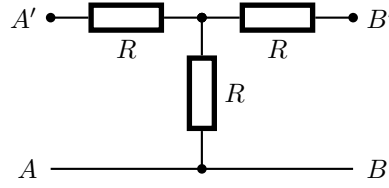


Figure 4.13 – Cellule élémentaire

— Solutions proposées —

1. Les résistances $2R$ sont successivement parcourues par les courants $j_1 = I$, $j_2 = j_1 - i_1$, $j_3 = j_2 - i_2$ et plus généralement $j_{n+1} = j_n - i_n$, par applications successives de la loi des nœuds. L'écriture de la loi des mailles dans une maille R , $2R$, R impose alors $Ri_n + 2Rj_n - Ri_{n-1} = 0$, soit $j_n = \frac{i_{n-1} - i_n}{2}$, donc aussi $j_{n+1} = \frac{i_n - i_{n+1}}{2}$. On élimine alors les courants j_n en écrivant $\frac{i_n - i_{n+1}}{2} = \frac{i_{n-1} - i_n}{2} - i_n$ ou, après simplification,

$$4i_n = i_{n+1} + i_{n-1}.$$

La suite i_n sera de la forme $i_n = i_0 \lambda^n$ seulement si $4i_0 \lambda^n = i_0 \lambda^{n+1} + i_0 \lambda^{n-1}$, ce qui s'écrit encore $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$.

2. Du fait de la chute de tension apportée par chaque résistance, et les courants circulant globalement vers la droite (puisqu'ils sont imposés par le sens de I), on doit observer une chute progressive des grandeurs électriques au fur et à mesure que n augmente. Ainsi, la solution $(2 + \sqrt{3})^n$, qui tend vers l'infini lorsque $n \rightarrow \infty$, n'est pas physique. On en déduit que seule l'autre solution est acceptable, avec $\lambda = 2 - \sqrt{3}$, $0,268 \leq 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$.

Reste à déterminer i_0 dans l'expression $i_n = i_0 \lambda^n$; on remarque que $j_n = \frac{i_{n-1} - i_n}{2}$ peut s'écrire $j_n = i_0 \frac{1 - \lambda}{2} \lambda^{n-1}$ tandis que $j_1 = I$ donc aussi $i_0 = \frac{2I}{1 - \lambda} = I(\sqrt{3} + 1)$

soit enfin $i_n = I(\sqrt{3} + 1)(2 - \sqrt{3})^n$.

La résistance R_c de la chaîne vérifie $u = R_c I$, où la tension u aux bornes de l'ensemble de la chaîne se calcule dans la maille d'entrée par la relation $u = 2RI + Ri_1$ soit $u = R(2 + (\sqrt{3} + 1)(2 - \sqrt{3}))I$ ou encore $R_c = R(\sqrt{3} + 1)$.

3. Utilisons les résultats de l'exercice A, après avoir branché R_0 entre B et B' . La mise en série de R_0 et de R correspond à $R + R_0$; cet élément est en parallèle avec R d'où un ensemble équivalent à $\frac{1}{1/R + 1/(R + R_0)} = \frac{(R + R_0)R}{2R + R_0}$; enfin, l'ensemble est mis en série avec la résistance R d'où une résistance globalement équivalente à $R + \frac{(R + R_0)R}{2R + R_0}$. La condition demandée s'écrit alors $R_0 = R + \frac{(R + R_0)R}{2R + R_0}$ ou aussi $(R_0 - R)(2R + R_0) = R(R + R_0)$ qui, après développement, prend la forme $R_0 = R\sqrt{3}$.

On a bien sûr $R_c = R + R_0$; on peut interpréter ce résultat comme suit. Puisque la chaîne résistive de la première question est infinie vers la droite, $i_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et on peut sans modification sensible arrêter la chaîne au bout d'une certaine longueur i_N pour N assez grand. Le courant i_N étant complètement négligeable, on peut modifier les connexions au-delà de ce N -ième maillon de chaîne sans modifier de façon significative la répartition des courants i_n pour $n \ll N$. En particulier, on peut brancher R_0 au-delà du N -ième maillon, et considérer la chaîne comme une

juxtaposition d'un nombre N de cellules élémentaires (la résistance de l'ensemble, itérée de proche en proche, est alors R_c) mise en série avec une seule résistance R à l'entrée (pour former la première résistance $2R$ dans laquelle débite le courant I). Il est donc logique d'obtenir la relation $R_c = R + R_0$ pour cette association en série (même courant I) de R et de la chaîne itérée.

D : Mise sous tension de condensateurs

À l'instant initial, les trois condensateurs (identiques, de capacité C) sont déchargés dans le réseau de la figure 4.14.

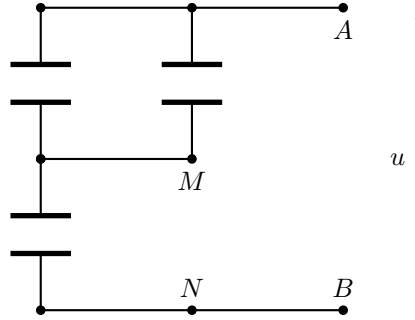


Figure 4.14 – Système à trois condensateurs

1. On branche alors aux bornes du système (entre A et B) un générateur qui impose $u = E$, grandeur constante et positive. Déterminer l'état des condensateurs, une fois l'état d'équilibre atteint.
2. Après avoir réalisé cet état d'équilibre on branche entre M et N un quatrième condensateur identique aux trois précédents, qui a lui-même été préalablement chargé sous la tension E , dans le même sens que les autres générateurs. Déterminer le nouvel état d'équilibre.

On pourra distinguer deux cas, selon que le générateur reste connecté entre A et B ou non.

— Solutions proposées —

1. On adopte les notations de la figure 4.15 ; à ce stade, le condensateur de charge q'_2 n'est pas encore présent. L'état d'équilibre est caractérisé par $q_1 = Cu_1 = q'_1$ et $q_2 = Cu_2$ avec aussi $u_1 + u_2 = E$. D'autre part, l'ensemble compris dans la surface fermée S signalée sur la figure est isolé et sa charge électrique totale $q_2 - q_1 - q'_1$ est constante, égale donc à sa valeur initiale zéro avant le début de la charge du système. On a donc

$$CE = q_1 + q_2 \text{ et } q_2 = 2q_1 \text{ donc } \boxed{q_1 = \frac{CE}{3} \text{ et } q_2 = \frac{2CE}{3}}.$$

2. Après la mise en place du quatrième condensateur, on doit déterminer les nouvelles valeurs Q_1 , Q_2 , Q'_1 et Q'_2 des charges des quatre condensateurs. À l'équilibre, $Q_1 = Q'_1 = CU_1$ et $Q_2 = Q'_2 = CU_2$ où on a noté U_1 et U_2 les nouvelles valeurs des tensions u_1 et u_2 .

La conservation de la charge électrique de la zone isolée comprise dans S impose encore $Q_2 + Q'_2 - Q_1 - Q'_1 = q_2 + q'_2 - q_1 - q'_1 = \frac{2CE}{3} + CE - 2\frac{CE}{3}$ soit $Q_2 - Q_1 = \frac{CE}{2}$.

Si le générateur de tension E est resté branché, on a de plus $E = U_1 + U_2$ ce qui mène

$$\text{à } \boxed{Q_1 = Q'_1 = \frac{3CE}{4} \text{ et } Q_2 = Q'_2 = \frac{CE}{4}}.$$

Si au contraire le générateur de tension E a été débranché, l'ensemble des deux armatures supérieures est resté isolé et sa charge n'a pas varié, $q_1 + q'_1 = Q_1 + Q'_1$ ou

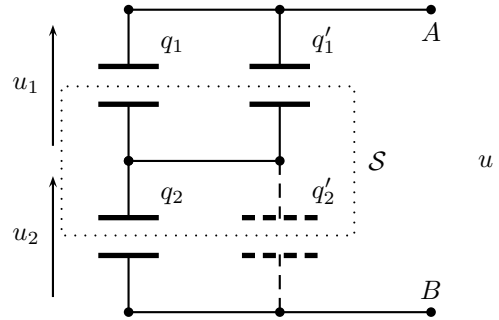


Figure 4.15 – Système à trois condensateurs

$$\boxed{Q_1 = Q'_1 = \frac{CE}{3}}; \text{ la réorganisation des charges ne concerne que les deux condensateurs inférieurs et } \boxed{Q_2 = Q'_2 = \frac{5CE}{6}}.$$

Autres exercices

E : Mesures électriques

On veut mesurer la résistance R du circuit de la figure 4.16 au moyen d'un voltmètre de résistance interne R_v et d'un ampèremètre de résistance R_a . L'ensemble est alimenté au moyen d'un générateur imposant une tension E constante. Le montage de gauche porte le nom de *courte dérivation*, celui de droite le nom de *longue dérivation*.

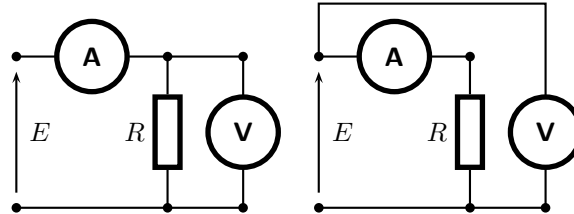


Figure 4.16 – Mesures électriques

Les mesures effectuées fournissant les valeurs u et i , on appelle *résistance mesurée* la grandeur $R' = \frac{u}{i}$ et *erreur systématique* de la méthode le quotient $\epsilon = \left| \frac{R' - R}{R} \right|$.

1. Exprimer l'erreur systématique de la méthode dans le montage en courte dérivation. Quel est le signe de l'erreur commise? Application numérique pour $R_v = 100 \text{ k}\Omega$, $R_a = 10 \Omega$, $R = 10 \text{ k}\Omega$.
2. Exprimer l'erreur systématique de la méthode dans le montage en longue dérivation. Quel est le signe de l'erreur commise? Application numérique pour $R_v = 100 \text{ k}\Omega$, $R_a = 10 \Omega$, $R = 100 \Omega$.
3. Pour des appareils de mesure donnés (R_a et $R_v \gg R_a$ fixés), pour quelles valeurs de R la méthode courte dérivation introduit-elle le moins d'erreur?

— Solutions proposées —

1. $\epsilon_1 = \frac{1}{1 + R_v/R} = 9\%$. $R' < R$, la mesure sous-estime R .

2. $\epsilon_2 = \frac{R_a}{R} = 10\%$. $R' > R$, la mesure sur-estime R .
3. Il faut $\epsilon_1 < \epsilon_2$ donc $R^2 - R_a R - R_a R_v > 0$ soit $R > \frac{R_a + \sqrt{R_a(R_a + 4R_v)}}{2} \simeq \sqrt{R_a R_v}$.

F : Étude d'une clôture électrique

Pour clôturer un parc à chevaux, on utilise un fil métallique tendu entre des piquets. La longueur totale du fil est $L = 500$ m, sa résistance par unité de longueur est $\rho = 0,12 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$ (cf. figure 4.17).

Un générateur impose la tension constante u_0 à une extrémité du parc. De façon à peu près régulière, le fil est relié au sol (équipotentiel, de potentiel $V = 0$) par des herbes, arbustes, etc., de sorte que la conductance de fuite par unité de longueur de fil soit égale à g_u . Ainsi, la tension $u(x)$ (entre le fil et le sol) et le courant $i(x)$ transporté par le fil varient le long de l'abscisse x le long de la clôture.



Figure 4.17 – Clôture électrique

1. Représenter le schéma équivalent à une longueur élémentaire dx de clôture.
2. Établir les équations différentielles vérifiées par $u(x)$ et $i(x)$, en négligeant les termes en dx^2 .
3. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $u(x)$.
Résoudre cette équation sous la forme $u(x) = \alpha \exp(\kappa x) + \beta \exp(-\kappa x)$ sans chercher ici à déterminer α et β . En déduire l'expression de $i(x)$.
4. Le parc est ouvert à son extrémité (les points B et A sont électriquement séparés). Déterminer α et β ; en déduire la valeur maximale de g_u pour que la tension entre le fil de clôture et le sol ne chute pas de plus que 50 % entre le générateur et l'extrémité du parc.
5. Même question, si le générateur est relié aux deux brins du fil (A et B reliés).

— Solutions proposées —

1. Le schéma est représenté sur la figure 4.18.

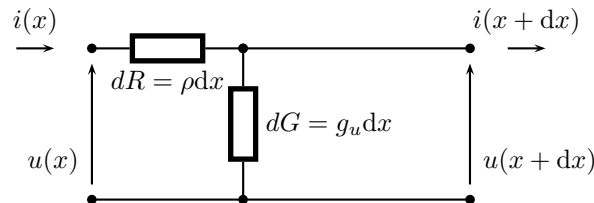


Figure 4.18 – Clôture électrique

- On écrit $u(x+dx) = u(x) + \frac{du}{dx}dx$ et $i(x+dx) = i(x) + \frac{di}{dx}dx$. La loi des mailles impose $\frac{du}{dx} = -\rho i(x)$; la loi des nœuds impose $\frac{di}{dx} = -g_u u(x)$.
- $\frac{d^2u}{dx^2} = K^2 u(x)$, impose $\kappa = \sqrt{g_u \rho}$.
On en déduit $i(x) = \sqrt{\frac{g_u}{\rho}} [-\alpha \exp(\kappa x) + \beta \exp(-\kappa x)]$.
- $i(L) = 0$ et $u(0) = u_0$ impose $\alpha = \frac{u_0}{1 + \exp(2\kappa L)}$ et $\beta = \frac{u_0}{1 + \exp(-2\kappa L)}$. La valeur minimale de u est atteinte en $x = L$, avec $u_{\min} = \frac{u_0}{\cosh \kappa L}$. Il faut $\cosh \kappa L < 2$ donc $\kappa < 2,6 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ soit $g_u < 5,8 \times 10^{-5} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.
- $u(L) = u(0) = u_0$ impose $\alpha = u_0 \frac{\exp(-\kappa L/2)}{2 \cosh \kappa L/2}$ et $\beta = u_0 \frac{\exp(\kappa L/2)}{2 \cosh \kappa L/2}$. La valeur minimale de u est atteinte en $x = L/2$, avec $u_{\min} = \frac{u_0}{\cosh \kappa L/2}$. Il faut $\cosh \kappa L/2 < 2$ donc $\kappa < 5,3 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ soit $g_u < 2,3 \times 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Refermer le parc permet de doubler la longueur utile à κ fixé.

G : Conversion numérique-analogique

Dans le circuit de la figure 4.19, quatre générateurs maintiennent constantes les valeurs des potentiels V_0, V_1, V_2 et V_3 .

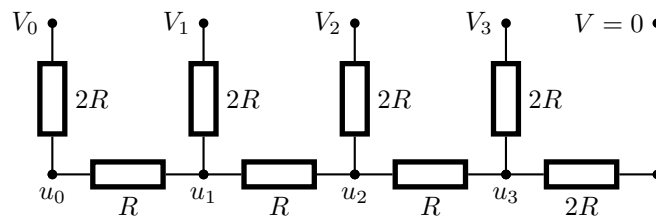


Figure 4.19 – Montage de conversion numérique-analogique

- Écrire le système d'équations linéaires permettant de déterminer les potentiels u_0, u_1, u_2 et u_3 .
- Au moyen d'un logiciel de calcul formel, résoudre ces équations; on exprimera seulement u_0 en fonction des potentiels V_k .
- Les potentiels V_k peuvent prendre seulement une des deux valeurs $V_k = 0$ ou $V_k = 1 \text{ V}$. Préciser alors le rôle du circuit.

— Solutions proposées —

- Notation **Maple** pour les quatre lois des nœuds :


```
> LN0 := (V0-u0)/(2*R)+(u1-u0)/R = 0:
> LN1 := (V1-u1)/(2*R)+(u0-u1)/R+(u2-u1)/R = 0:
> LN2 := (V2-u2)/(2*R)+(u1-u2)/R+(u3-u2)/R = 0:
> LN3 := (V3-u3)/(2*R)+(u2-u3)/R+(0-u3)/(2*R) = 0:
```
- La résolution par **Maple** fournit $u_0 = \frac{V_3 + 2V_2 + 4V_1 + 8V_0}{16}$:


```
> s := solve({LN0,LN1,LN2,LN3},{u0,u1,u2,u3}):
> assign(s):
> u0;
```

$$\frac{1}{8} V_2 + \frac{1}{4} V_1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{16} V_3$$

- Il s'agit d'une conversion analogique, fournissant une tension u_0 proportionnelle au codage binaire réalisé par les quatre chiffres binaires V_0 à V_3 .

Compléments et problèmes

H : Filtre en régime de créniaux

On réalise le filtre de la figure 4.20, avec $L = 200$ mH, $C = 10$ μ F, $R = 80$ Ω .

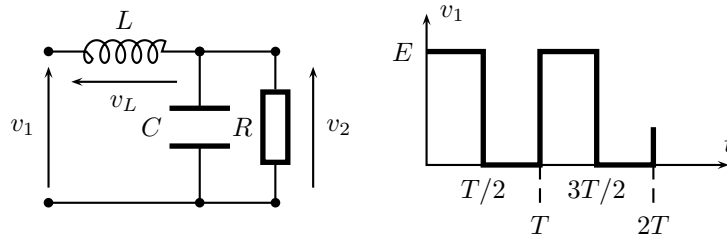


Figure 4.20 – Filtre en régime de créniaux

On note, en convention des récepteurs, $i_L(t)$, $i_C(t)$ et $i_R(t)$ les courants dans L , C et R . La tension $v_1(t)$ est un crénneau positif d'amplitude $E = 10$ V et de période $T = 1$ ms. Le système joue le rôle de filtre, de sorte que la tension $v_2(t)$ est sensiblement constante au cours du temps.

Pour chacune des grandeurs électriques $g(t)$ intervenant dans ce problème (tensions et courants), on notera $g(t) = g_m + g_a(t)$ où g_m est la valeur *moyenne* de $g(t)$, définie par $g_m = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$, et $g_a(t)$ est la partie alternative ou *ondulation* de $g(t)$, définie par $g_a(t) = g(t) - g_m$; $g_a(t)$ est donc de valeur moyenne nulle.

1. Montrer que la tension moyenne aux bornes de L est nulle.
Montrer que le courant moyen dans C est nul.
2. Si on suppose la tension de sortie $v_2(t)$ suffisamment filtrée pour être considérée comme continue ($v_2 = v_{2m}$), calculer v_{2m} ; calculer la valeur moyenne i_{Lm} du courant dans L .
3. Représenter la tension $v_L(t)$ aux bornes de L en fonction du temps; en déduire le courant $i_L(t)$; déterminer en particulier les valeurs extrêmes et l'amplitude de l'ondulation de i_L . Représenter l'allure de la courbe $i_L(t)$.
4. Déterminer enfin, dans le cadre de l'approximation précédente, les ondulations de $v_2(t)$ autour de sa valeur moyenne v_{2m} ; on déterminera en particulier l'amplitude de l'ondulation de v_2 .

— Solutions proposées —

1. $v_L = L \frac{di_L}{dt}$ donc $v_{Lm} = \frac{1}{T} \int_0^T L \frac{di_L}{dt} dt$ soit $v_{Lm} = \frac{L}{T} [i_L(t)]_0^T$ mais, $i_L(t)$ étant T -périodique, $i_L(T) = i_L(0)$ donc $\boxed{v_{Lm} = 0}$.
De même, $i_C = C \frac{dv_2}{dt}$ donc $i_{Cm} = \frac{C}{T} [v_2(t)]_0^T = 0$ soit $\boxed{i_{Cm} = 0}$.
2. Puisque $v_L = v_1 - v_2$, $v_{Lm} = v_{1m} - v_{2m}$ impose $v_{2m} = v_{1m} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E dt$ donc $\boxed{v_{2m} = E/2 = 5 \text{ V}}$. De même, $i_L = i_C + i_R = i_C + \frac{v_2}{R}$ donc $i_{Lm} = i_{Cm} + \frac{v_{2m}}{R}$ impose $\boxed{i_{Lm} = \frac{E}{2R} = 62,5 \text{ mA}}$.
3. $v_L(t) = v_1 - v_2 \simeq v_1(t) - v_{2m}$ est donc une tension crénneau de moyenne nulle (cf. figure 4.21 à gauche). Comme $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$, le courant $i_L(t)$ est une fonction affine par

morceaux, de moyenne connue, dont les pentes sont constantes par morceaux, égales à $+\frac{E}{2L}$ pour $0 \leq t \leq T/2$ et à $-\frac{E}{2L}$ pour $T/2 \leq t \leq T$ (cf. figure 4.21 à droite).

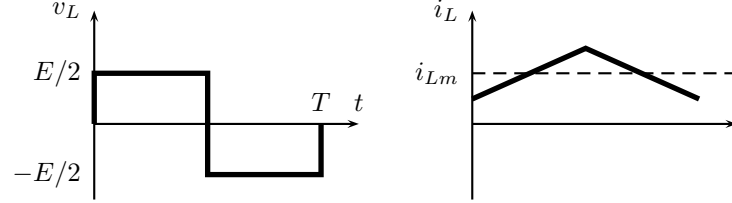


Figure 4.21 – Tension v_L et courant i_L

Les valeurs extrêmes $i_{L\max}$ et $i_{L\min}$ de i_L vérifient $\frac{i_{L\max} + i_{L\min}}{2} = \frac{E}{2R}$; la pente de la droite $i_L(t)$ montre $2\frac{i_{L\max} - i_{L\min}}{T} = \frac{E}{2L}$ d'où $i_{L\max} = E \left(\frac{1}{2R} + \frac{T}{8L} \right) = 68,8 \text{ mA}$

et $i_{L\min} = E \left(\frac{1}{2R} - \frac{T}{8L} \right) = 56,3 \text{ mA}$.

L'ondulation totale est $i_{L\max} - i_{L\min} = 12,5 \text{ mA}$.

4. On améliore enfin les approximations précédentes pour la forme de $v_2(t)$ en remarquant que $i_L = i_C + i_R = C \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R}$ donc les variations de v_2 seront approchées par l'expression $C \frac{dv_2}{dt} = i_L(t) - \frac{E}{2R}$ qui s'écrit encore $C \frac{dv_2}{dt} = i_{La}(t)$. Ainsi, les variations de $v_2(t)$ autour de sa valeur moyenne sont elles paraboliques par morceaux, puisque sa dérivée est affine par morceaux.

En particulier, dans l'intervalle $0 \leq t \leq T/2$, on aura $\frac{dv_2}{dt} = \frac{E}{2LC} \left(t - \frac{T}{4} \right)$ et, dans l'intervalle $T/2 \leq t \leq T$, $\frac{dv_2}{dt} = -\frac{E}{2LC} \left(t - \frac{3T}{4} \right)$. La dérivée de v_2 s'annule ainsi aux instants $t_1 = \frac{T}{4}$ et $t_2 = \frac{3T}{4}$, qui sont les instants où v_2 prend ses valeurs extrêmes; la différence entre ces valeurs extrêmes représente l'amplitude de l'ondulation recherchée, $v_{2\max} - v_{2\min} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv_2}{dt} dt$ qui s'écrit, après quelques calculs,

$v_{2\max} - v_{2\min} = \frac{ET^2}{32LC} = 0,15 \text{ V}$ soit 1,5% en valeur relative : ce résultats constitue une justification *a posteriori* de la méthode utilisée ici.