

CHAPITRE 13

Intégration sur un intervalle compact

Sommaire

13.1 Intégration des fonctions en escalier	83
13.1.1 Subdivision	83
13.1.2 Fonctions en escalier	84
13.1.3 Intégrale	84
13.1.4 Propriétés	84
13.2 Intégration des fonctions à valeurs réelles	85
13.2.1 Fonctions intégrables	85
13.2.2 Intégrale	85
13.2.3 Exemples	86
13.3 Intégration des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé	86
13.3.1 Fonction intégrables	86
13.3.2 Intégrale	86
13.3.3 Propriétés	87
13.3.4 Sommes de Riemann	87
13.4 Primitivation	88
13.4.1 Définition	88
13.4.2 Relations primitives-intégrales	88
13.4.3 Formulaire de primitivation	88

13.1 Intégration des fonctions en escalier

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie sur le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). On notera $\|x\|$ la norme de l'élément x de E .

13.1.1 Subdivision

DÉFINITION 13.1.1

Soit $[a; b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} , on appelle subdivision de $[a; b]$ est une partie finie de $[a; b]$ contenant a et b . Si σ est une subdivision contenant $n + 1$ points ($n \geq 1$) on range usuellement les éléments de σ par ordre croissant et on écrit $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_{i-1} < x_i$ pour tout i non nul.

DÉFINITION 13.1.2

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a; b]$, on appelle pas de la subdivision le nombre

$$h = \sup\{|x_i - x_{i-1}| ; 1 \leq i \leq n\}$$

On le notera ici $\delta(\sigma)$.

DÉFINITION 13.1.3

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a; b]$. On dit que σ' est plus fine que σ lorsque σ est contenue dans σ' .

REMARQUE : Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions quelconques de $[a; b]$, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est une troisième subdivision de $[a; b]$ plus fine que σ_1 et σ_2 .

13.1.2 Fonctions en escalier

DÉFINITION 13.1.4

Soit $[a; b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} , et f une application de $[a; b]$ dans E , on dit que f est en escalier sur $[a; b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a; b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}; x_i[$. On notera alors f_i ($f_i \in E$) la valeur de f sur cet intervalle et on dit que σ est une subdivision associée à f . On notera $\mathcal{E}([a; b], E)$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur l'intervalle $[a; b]$.

REMARQUE 1 : Les valeurs de f aux points de la subdivision n'ont aucun intérêt dans la pratique, il y en a au plus $n + 1$, donc $f([a; b])$ a au plus $2n + 1$ éléments et une fonction en escalier est bornée.

REMARQUE 2 : Si σ est une subdivision associée à f , alors toute subdivision σ' plus fine est aussi associée à f .

THÉORÈME 13.1.1

$\mathcal{E}([a; b], E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{K})$ est une \mathbb{K} -algèbre.

13.1.3 Intégrale

NOTATION : Soit f une application en escalier de l'intervalle $[a; b]$ dans E et σ une subdivision associée à f , on notera : $I(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f_k$. C'est un élément de E .

THÉORÈME 13.1.2

Soit f une fonction en escalier de $[a; b]$ dans E . Le vecteur $I(f, \sigma)$ est indépendant de la subdivision σ associée à f .

DÉFINITION 13.1.5

Soit f une fonction en escalier de $[a; b]$ dans E , on appelle intégrale de f sur $[a; b]$ et l'on note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x) dx$ l'élément de E défini par $\int_a^b f = I(f, \sigma)$ pour une subdivision σ de $[a; b]$ associée à f .

REMARQUE : On notera que l'intégrale de f ne dépend pas des valeurs de f aux points de la subdivision choisie pour son calcul.

13.1.4 Propriétés

THÉORÈME 13.1.3 (RELATION DE CHASLES)

Soit f une application de $[a; b]$ dans E et c un point de $]a; b[$. f est en escalier sur $[a; b]$ **SSI** f est en escalier sur $[a; c]$ et $[c; b]$. On a alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

THÉORÈME 13.1.4 (LINÉARITÉ)

L'intégrale est une application linéaire de $\mathcal{E}([a; b], E)$ dans \mathbb{K} . Pour tout λ dans \mathbb{K} et tout couple (f, g) de fonctions en escalier : $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

THÉORÈME 13.1.5 (MAJORATION)

Soit f dans $\mathcal{E}([a; b], E)$, $\|f\|$ est dans $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ avec : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

COROLLAIRE : Soit f dans $\mathcal{E}([a; b], E)$ et M un majorant de $\|f\|$ sur $[a; b]$, on a : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq M(b - a)$.

THÉORÈME 13.1.6 (POSITIVITÉ)

Soit f une fonction numérique positive en escalier sur $[a; b]$, on a : $\int_a^b f \geq 0$.

COROLLAIRE : Soit f et g dans $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ avec $f \leq g$, on a : $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

13.2 Intégration des fonctions à valeurs réelles

Dans tout ce paragraphe on ne considère que des fonctions définies d'un intervalle compact $[a; b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

13.2.1 Fonctions intégrables

DÉFINITION 13.2.1

Une fonction f définie de $[a; b]$ dans \mathbb{R} est dite intégrable sur $[a; b]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists (g, h) \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) \quad g \leq f \leq h \text{ et } \int_a^b (h - g) \leq \varepsilon$$

L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a; b]$ sera noté $\mathcal{I}([a; b], \mathbb{R})$.

CARACTÉRISATION : Une fonction f définie de $[a; b]$ dans \mathbb{R} est intégrable sur $[a; b]$ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists (\varphi, \theta) \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) \quad |f - \varphi| \leq \theta \text{ et } \int_a^b \theta \leq \varepsilon$$

REMARQUE 1 : La définition est propre au cas des fonctions à valeurs réelles : on utilise la structure ordonnée de \mathbb{R} pour encadrer la fonction f . La caractérisation est plus générale et peut être utilisée pour des fonctions à valeurs dans d'autres espaces.

REMARQUE 2 Les fonctions en escalier sont bornées, donc une fonction intégrable, encadrée par des fonctions en escalier est également bornée.

13.2.2 Intégrale

NOTATIONS Soit f une fonction numérique définie et bornée sur $[a; b]$, on notera m et M deux réels tels que, pour tout x de $[a; b]$: $m \leq f(x) \leq M$.

On pose alors $\mathcal{E}_-(f) = \{g \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) ; g \leq f\}$ et $\mathcal{E}_+(f) = \{h \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) / h \geq f\}$. Ces ensembles sont non vides car ils contiennent respectivement les fonctions constantes de valeurs m et M . Soit g dans $\mathcal{E}_-(f)$, on a : $g \leq M$ donc $\int_a^b g \leq M(b - a)$. L'ensemble $\{\int_a^b g ; g \in \mathcal{E}_-(f)\}$ est majoré ; il admet une borne supérieure notée $I_-(f)$. De même l'ensemble $\{\int_a^b h ; h \in \mathcal{E}_+(f)\}$ est minoré, il admet une borne inférieure $I_+(f)$.

On a alors, pour tout g de $\mathcal{E}_-(f)$ et tout h de $\mathcal{E}_+(f)$, $\int_a^b g \leq \int_a^b h$ donc, en passant à la borne supérieure lorsque g décrit $\mathcal{E}_-(f)$ puis à la borne inférieure lorsque h décrit $\mathcal{E}_+(f)$, on a $\int_a^b g \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \int_a^b h$.

THÉORÈME 13.2.1

Une fonction f de $[a; b]$ dans \mathbb{R} , bornée sur $[a; b]$, est intégrable sur $[a; b]$ SSI $I_-(f) = I_+(f)$.

DÉFINITION 13.2.2

Soit f une fonction numérique intégrable sur $[a; b]$, on appelle intégrale de f sur $[a; b]$ et l'on note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x) dx$ la valeur commune de $I_-(f)$ et $I_+(f)$.

13.2.3 Exemples

THÉORÈME 13.2.2 (FONCTIONS MONOTONES)

Toute fonction numérique monotone sur $[a; b]$ est intégrable sur $[a; b]$.

THÉORÈME 13.2.3 (FONCTIONS CONTINUES)

Toute fonction numérique continue sur $[a; b]$ est intégrable sur $[a; b]$.

PREUVE : $[a; b]$ est compact donc f est uniformément continue sur $[a; b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ avec $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ si $|x - y| \leq \eta$. Soit alors n entier tel que $b - a < n\eta$, on utilise la subdivision $\left\{ x_k = a + k \frac{b-a}{n} ; 0 \leq k \leq n \right\}$ et on définit g et h en escalier sur $[a; b]$ par : $g(x_k) = h(x_k) = f(x_k)$ pour tout k et, pour x dans $]x_{k-1}; x_k[$, $g(x) = f(x_k) - \varepsilon$, $h(x) = f(x_k) + \varepsilon$. On a $h - g \leq 2\varepsilon$ et, par uniforme continuité de f , $g \leq f \leq h$ donc $\int_a^b (h - g) \leq 2\varepsilon(b - a)$, ce qui prouve l'intégrabilité de f .

13.3 Intégration des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie sur le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). On notera $\|x\|$ la norme de l'élément x de E .

13.3.1 Fonction intégrables

DÉFINITION 13.3.1

Une fonction f définie de $[a; b]$ dans un espace vectoriel normé E est intégrable sur $[a; b]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{E}([a; b], E) \exists \theta \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) \quad \|f - \varphi\| \leq \theta \text{ et } \int_a^b \theta \leq \varepsilon$$

L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a; b]$ sera noté $\mathcal{I}([a; b], E)$.

CARACTÉRISATION : Une application f de $[a; b]$ dans E est intégrable, **SSI** il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier de $[a; b]$ dans E et une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en escalier de $[a; b]$ dans \mathbb{R} telles que l'on ait :

- (i) Pour tout entier n : $\|f - \varphi_n\| \leq \theta_n$
- (ii) La suite de terme général $\varepsilon_n = \int_a^b \theta_n$ converge vers 0.

La suite $(\varphi_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite associée à f .

REMARQUE : Deux normes équivalentes définissent les mêmes fonctions intégrables. E est de dimension finie, donc $\mathcal{I}([a; b], E)$ ne dépend pas de la norme choisie.

THÉORÈME 13.3.1

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E , une application f de $[a; b]$ dans E définit les applications coordonnées (f_1, \dots, f_n) de $[a; b]$ dans \mathbb{K} par la relation $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k$. f est intégrable sur $[a; b]$ **SSI** f_k est intégrable sur $[a; b]$ pour tout k . En particulier une fonction à valeurs complexes est intégrable **SSI** ses parties réelle et imaginaire le sont, et les fonctions continues sur $[a; b]$ sont intégrables sur $[a; b]$.

13.3.2 Intégrale

THÉORÈME 13.3.2

Soit f dans $\mathcal{I}([a; b], E)$ et $(\varphi_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite associée à f . La suite $\left(\int_a^b \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite ne dépend pas de la suite $(\varphi_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

DÉFINITION 13.3.2

Soit f une fonction intégrable de $[a; b]$ dans E , on appelle intégrale de f sur $[a; b]$ et l'on note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x) dx$ l'élément de E défini par $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n$ où $(\varphi_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite associée à f .

13.3.3 Propriétés

Toutes les propriétés des fonctions intégrables se déduisent de celles des fonctions en escalier par passage à la limite sur une suite de fonctions associée.

THÉORÈME 13.3.3 (RELATION DE CHASLES)

Soient f une application de $[a; b]$ dans E et c dans $]a; b[$. f est intégrable sur $[a; b]$ **SSI** f est intégrable sur $[a; c]$ et $[c; b]$ et : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

THÉORÈME 13.3.4 (LINÉARITÉ)

$\mathcal{J}([a; b], E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $\mathcal{J}([a; b], \mathbb{K})$ est une \mathbb{K} -algèbre. L'intégrale est une application linéaire de $\mathcal{J}([a; b], E)$ dans \mathbb{K} . On a donc, pour tout λ dans \mathbb{K} et tout couple (f, g) de fonctions intégrables :

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \text{ et } \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

On a aussi, si λ est dans $\mathcal{J}([a; b], \mathbb{K})$ et u dans E : $\int_a^b \lambda(x) u dx = u \int_a^b \lambda(x) dx$, et si (e_1, \dots, e_n) est une base de E avec $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k$ on a : $\int_a^b f = \sum_{k=1}^n e_k \int_a^b f_k$.

THÉORÈME 13.3.5 (MAJORATION)

Soit f dans $\mathcal{J}([a; b], E)$, alors $\|f\|$ est dans $\mathcal{J}([a; b], \mathbb{R})$ et $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

COROLLAIRE : Soit f dans $\mathcal{J}([a; b], E)$ et M un majorant de $\|f\|$ sur $[a; b]$, alors : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq M(b - a)$.

THÉORÈME 13.3.6 (POSITIVITÉ)

Soit f une fonction numérique positive intégrable sur $[a; b]$, on a : $\int_a^b f \geq 0$.

COROLLAIRE : Soient f et g intégrables de $[a; b]$ dans \mathbb{R} avec $f \leq g$, on a : $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

THÉORÈME 13.3.7 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ)

Soient f et g dans $(I)([a; b], \mathbb{C})$, on a $\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$.

13.3.4 Sommes de Riemann

DÉFINITION 13.3.3

Soient une fonction f de $[a; b]$ dans E et $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a; b]$. Pour tout (y_1, \dots, y_n) de $\prod_{k=1}^n]x_{k-1}; x_k[$ on appelle somme de Riemann associée à f pour la subdivision σ et le choix des y_k le vecteur

$$R(f, \sigma, y_k) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(y_k).$$

THÉORÈME 13.3.8

Si f est intégrable sur $[a; b]$ les sommes de Riemann associées à f "convergent" vers $\int_a^b f$ au sens suivant :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall \sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \forall (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{k=1}^n]x_{k-1}; x_k[\delta(\sigma) \leq \eta \Rightarrow \left\| R(f, \sigma, y_k) - \int_a^b f \right\| \leq \varepsilon.$$

13.4 Primitivation

13.4.1 Définition

DÉFINITION 13.4.1

Soient f et F deux applications définies d'un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans E ; on dit que F est une primitive de f sur I , si F est dérivable sur I , de dérivée f .

PROPOSITION 13.4.1

Soit f une application définie d'un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans E ; si f admet une primitive sur I , elle en admet une infinité qui diffèrent deux à deux d'une constante.

13.4.2 Relations primitives-intégrales

THÉORÈME 13.4.1

Soient f une application continue, définie d'un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans E , et a un point de I ; on définit une application F_a de I dans E en posant, pour tout réel x dans I : $F_a(x) = \int_a^x f$. Alors F_a est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $F'_a = f$.

COROLLAIRE 5

Toute application continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

13.4.3 Formulaire de primitivation

THÉORÈME 13.4.2 (INTÉGRATION PAR PARTIES)

Soient E , F , et G , trois e.v.n. de dimension finie, et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G .

Si u et v sont deux applications de classe \mathcal{C}^1 , définie de $[a, b]$ à valeurs dans E et F respectivement, alors :

$$\int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'.$$

THÉORÈME 13.4.3 (CHANGEMENT DE VARIABLE)

Soient f une application de classe \mathcal{C}^1 de $[a, b]$ dans E , et φ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'| = \int_a^b f.$$

REMARQUE : Le théorème est généralement utilisée avec l'hypothèse : φ est une application de classe \mathcal{C}^1 d'un intervalle I à valeurs dans J contenant $[a, b]$. On a alors :

$$\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$