LABORATORIO DI FISICA SUBNUCLEARE

Studio del decadimento α con rivelatore al silicio

Samuele Chimento
Fontana Alessandro
Cristina Losa
Chiara Paleari

anno accademico 2003-2004

Indice

Introduzione

L'esperienza di laboratorio è finalizzata allo studio del decadimento alfa di due sorgenti (Rn222 e Cm 244) in particolare ci si è concentrati sull'analisi del tasso di produzione del Radon, calcolato col metodo dei minimi quadrati, e sulla vita media del Polonio 210 (appartenente alla catena del Radon), calcolato col metodo della massimi verosimiglianza, tramite un rivelatore al Silicio. A questo scopo è stato caratterizzato il rivelatore tramite la costruzione di curve I-V, è stata eseguita una taratura del rivelatore multicanale usando i tre picchi del Radon e i due picchi del Curio, è stata valutata l'efficienza geometrica del rivelatore con un metodo MonteCarlo.

Capitolo 1

Strumentazione e sue caratteristiche generali

1.1 Diodi e rivelatori a semiconduttori

Il rivelatore utilizzato in laboratorio non è altro che un diodo a semiconduttore in Silicio, può quindi essere utile richiamare qualche concetto sui semiconduttori e in particolare sulle giunzioni P-N.
I semiconduttori sono solidi covalenti e possono essere considerati in prima analisi degli isolanti in quanto presentano una banda di valenza completamente piena mentre la banda di conduzione è completamente vuota. Questa osservazione sulle bande, però, è vera solo per temperature molto basse, infatti i semiconduttori sono caratterizzati dal fatto che la distanza tra le due bande è estremamente piccola: per il Silicio e per il Germanio (i due semiconduttori più utilizzati in elettronica) i gap energetici tra le bande sono di 1.14eV per il primo e 0.67eV per il secondo. Risulta dunque evidente che anche a temperatura ambiente l'energia di agitazione termica è in grado di far saltare qualche elettrone nella banda di conduzione e rendere il materiale un po' meno isolante e un po' più conduttore.
Per il Silicio e per il Germanio si hanno 4 elettroni di valenza e quando un elettrone lascia un buco (lacuna) nella banda di valenza anche questo contribuisce alla conduzione e si comporta come una carica positiva.
In generale si possono avere tre tipi di conduttività classificati col metodo con cui si ottengono i portatori di carica liberi:

- Conduttività intrinseca: gli elettroni di conduzione sono dovuti all'energia termica;
- Conduttività di fotoeccitazione: gli elettroni vengono portati in banda di conduzione ad opera di fotoni;
- Conduttività estrinseca: deriva dall'immissione nel conduttore di impurità che aumentano il numero di elettroni di conduzione.

L'immissione di impurità (drogaggio) può essere di due tipi: tipo N e tipo P.
Il drogaggio N si ottiene inserendo nel Silicio o nel Germanio degli atomi ad esempio di Arsenico che hanno 5 elettroni di valenza 4 dei quali vengono utilizzati per legare l'atomo al reticolo cristallino con legame covalente mentre per il quinto, avendo un energia di legame molto piccola, basta poca energia per separarlo dall'atomo e può essere considerato praticamente libero.
Il drogaggio P è ottenuto inserendo atomi tipicamente di Gallio (valenza = 3). Di conseguenza nella creazione dei legami tra i vari atomi rimane una lacuna equivalente ad una carica positiva.
Tipicamente viene immesso un atomo di materiale drogante ogni 10^6 atomi di Silicio.
Se il semiconduttore non è drogato e la conduttività è dovuta solo all'eccitazione termica per ogni elettrone in banda di conduzione si ha una buca in banda di valenza e l'energia di fermi risulta essere a metà tra le due bande.
Se invece il materiale è drogato tipo N l'energia di fermi è più vicina alla banda di conduzione poiché la densità di elettroni di conduzione è più alta mentre nel drogaggio P avviene l'opposto e l'energia di fermi è più vicina alla banda di valenza.
Quando si realizza una giunzione di tipo P-N drogando nei due differenti modi due regioni di materiale semiconduttore, poiché l'energia di Fermi deve essere uguale nelle due regioni, i livelli energetici delle due bande delle due regioni di semiconduttore vengono curvate in prossimità della giunzione che ha delle similarità con un condensatore in cui sia posta la carica positiva in N e la carica negativa in P.
Attraverso la giunzione fluisce una corrente elettrica che presenta due contributi distinti: la corrente termica, associata agli elettroni termici che si muovono liberamente fino alla giunzione e poi vengono accelerati dalla zona N, e la corrente di ricombinazione, associata all'attrazione tra lacune ed elettroni liberi. Se non viene applicato alcun potenziale esterno le due correnti sono in equilibrio. Poiché gli elettroni di N e le lacune di P si attraggono l'un l'altro verso la giunzione e si ha che la zona di più prossima alla giunzione è elettricamente neutra mentre il resto del volume della zona drogata P ha una carica negativa e il resto della zona N ha una positiva dovute alle carica degli ioni fissi nel reticolo cristallino.
Se viene applicato un generatore di tensione ai capi dei semiconduttori il comportamento della giunzione cambia in dipendenza della polarità della tensione applicata. Se si applica una tensione con il polo positivo sulla parte P e il polo negativo sulla parte N del dispositivo la corrente termica non cambia apprezzabilmente, quella di ricombinazione invece aumenta tanto da rendere trascurabile il contributo termico e si può pensare che la giunzione, che a questo punto può essere chiamata diodo, si comporta come un circuito chiuso si avrà quindi una differenza di potenziale ai capi del diodo molto piccola mentre la corrente che fluisce attraverso è molto grande.
Da un punto di vista energetico si può pensare che la barriera di potenziale

sulla giunzione diventa più bassa e più sottile quindi per gli elettroni è più facile passare da una regione all'altra. In questo caso si dice che la giunzione è polarizzata direttamente. Se invece il polo positivo viene applicato alla regione N la barriera di potenziale diventa più alta e la corrente di ricombinazione viene inibita di un grande fattore, la corrente che attraversa la giunzione è solo di origine termica. In questo caso il circuito si comporta come un circuito aperto (differenza di potenziale ai capi del diodo praticamente uguale alla differenza di potenziale data dal generatore e intensità di corrente molto bassa) e la giunzione è detta essere polarizzata inversamente. Se in assenza di campo le cariche libere di una regione si avvicinano alla giunzione con l'altra regione per la mutua attrazione tra portatori di carica liberi, in condizione di polarizzazione inversa i portatori tendono ad allontanarsi dalla giunzione lasciando al centro del diodo una regione priva di portatori di carica liberi.
Nella pratica un rivelatore a semiconduttore è un diodo polarizzato inversamente e sovrasvuotato. Questo ha due effetti: incrementa l'intensità di campo elettrico che c'è nella regione di svuotamento, facendo in modo che la raccolta di carica elettrica generata dal passaggio di una particella ionizzante sia più efficiente, e incrementa le dimensioni della regione di svuotamento aumentando il volume sensibile del rivelatore, inoltre dato che la corrente che attraversa il rivelatore dovuta all'eccitazione termica è molto piccola risulta più facile distinguere il segale dal fondo elettronico stesso. Si può dunque pensare al rivelatore a semiconduttore come ad un condensatore utilizzato nelle camere di ionizzazione ma, a differenza di quest'ultimi sistemi di rivelazione, l'uso del materiali semiconduttori garantisce una maggiore raccolta di carica a parità di energia della particella incidente sul rivelatore (infatti per eccitare un elettrone nella banda di conduzione di un semiconduttore sono necessari alcuni eV mentre per ionizzare i gas tipicamente usati nelle camere di ionizzazione sono necessari circa 30eV) e un più breve tempo di risposta.

1.2 Curve caratteristiche del rivelatore

Prima di procedere alle esperienze con le sorgenti sono stati caratterizzati tre rivelatori (A, B e il secondo canale del rivelatore D) ottenendo le curve I-V di tensione ai capi del rivelatore e intensità di corrente attraverso il rivelatore. Per fare questo è stato costruito un semplice circuito con un generatore di tensione e il rivelatore al quale sono state connesse in serie due resistenze rispettivamente da $2M\Omega$ e 108400Ω i cui valori sono stati misurati con un tester.

Le resistenze servono primieramente a proteggere il rivelatore da intensità

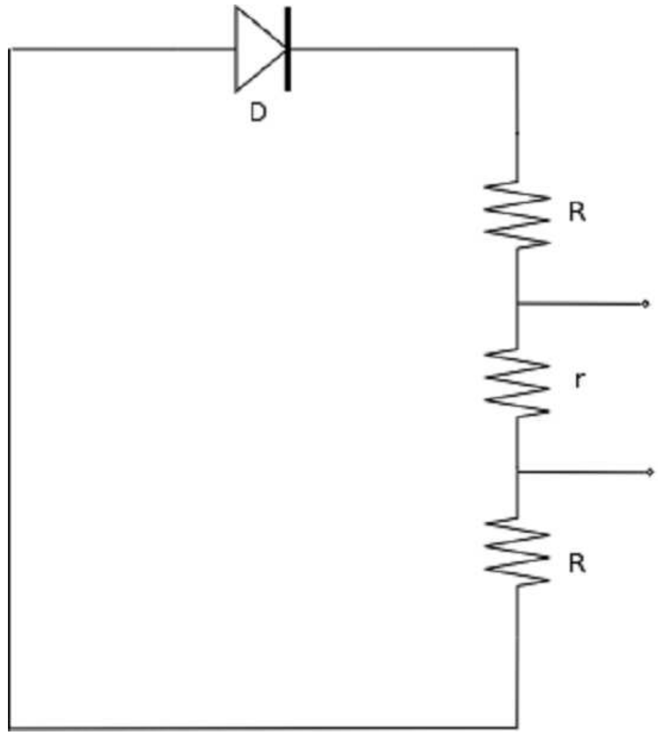

Figura 1.1: Circuito usato per la caratterizzazione dei rivelatori

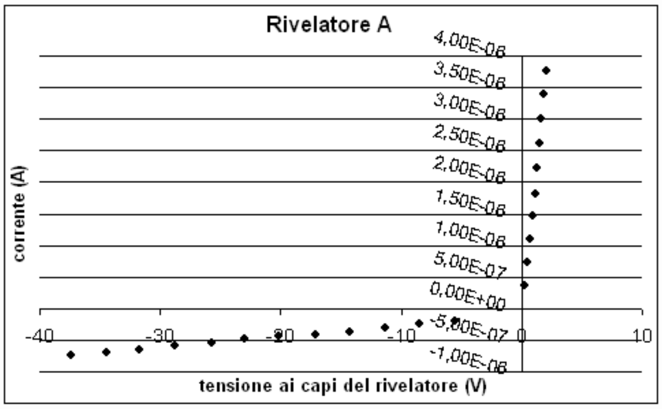

Figura 1.2: Curva caratteristica del rivelatore A

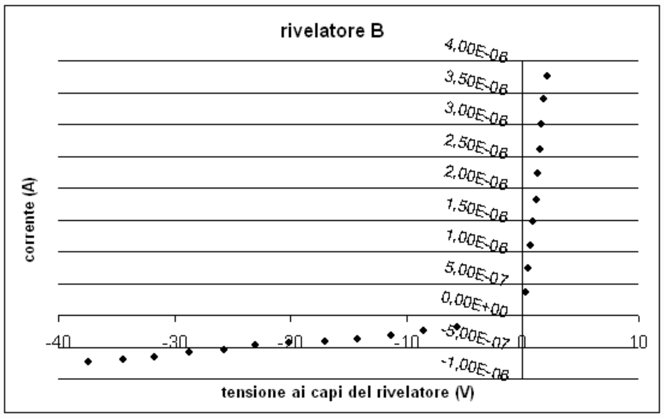

Figura 1.3: Curva caratteristica del rivelatore B

di corrente troppo elevate inoltre sono utili per avere un informazione sulla corrente che attraversa il circuito con una misura indiretta sulla caduta di potenziale (V2 nella figura) ai capi della parte resistiva senza dover inserire il tester in serie al circuito stesso. I valori di caduta di potenziale ai capi del rivelatore non sono stati calcolati da una misura diretta, per evidenti impedimenti strutturali, ma è stata ottenuta indirettamente dalla semplice legge:

$$V_{rif} = V_{gen} - I\,(2 \cdot R + r) \tag{1.1}$$

Come si può notare i dati sono in generico accordo con la legge per la giunzione ideale in cui la corrente è data da:

$$I = I_0 \left(e^{\frac{V}{\beta V_T}} - 1 \right) \tag{1.2}$$

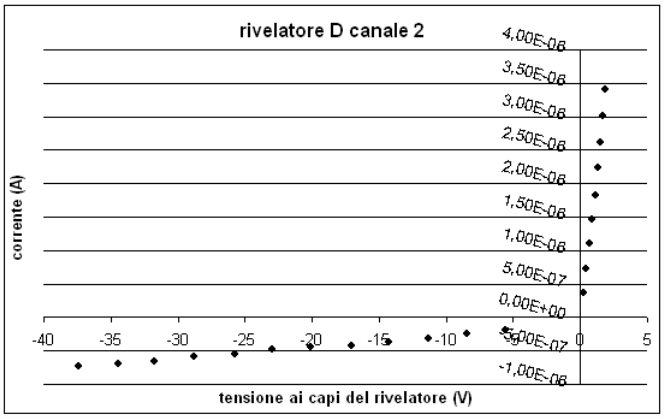

Figura 1.4: Curva caratteristica del secondo canale del rivelatore D

dove $V_T = K_b T/e \cong 25mV$ a temperatura ambiente e dove β è un fattore che tiene conto della creazione di elettroni e lacune nella regione di svuotamento e della non idealità del rivelatore.
Nell'esperienza di laboratorio il rivelatore al Silicio era polarizzato inversamente con una tensione di 40 volt. Il fatto importante da notare è che per tensioni di polarizzazioni inversa prossime ai 40 volt le correnti che attraversano il rivelatore sono dell'ordine delle frazioni di microampere considerando che tipicamente una particella alfa che attraversa il rivelatore per ionizzazione genera delle correnti dell'ordine del milliampere si capisce che la corrente di polarizzazione inversa del rivelatore costituisce un semplice rumore che è ben distinguibile dal segnale dato dall'alfa.
Questo rumore è stato analizzato velocemente all'oscilloscopio e si è potuto notare che è un rumore completamente bianco (il segnale non presenta alcun tipo di periodicità) la cui intensità è fortemente influenzata dalle apparecchiature elettroniche in funzione in prossimità del rivelatore primo fra tutti l'analizzatore multicanale che verrà presentato in seguito.

1.3 Catena elettronica

Sono brevemente esposti i costituenti della catena elettronica e il loro ruolo.

Preamplificatore. Il preamplificatore è lo strumento più vicino al rivelatore, in questo modo si evita la dispersione del segnale, e ha il compito di amplificare il debole segnale proveniente dal rivelatore. Il preamplificatore risolve il problema dell'attenuazione del segnale causata dai cavi coassiali e dai vari dispositivi che sono collegati alla catena elettronica e impedisce che il segnale stesso venga eccessivamente deformato. Idealmente un preamplificatore deve avere impedenza di ingresso infinita e un'impedenza di uscita piccolissima, in questo modo può agire sul segnale come un amplificatore di potenza o buffer: il segnale (tensione) di fatto resta inalterato in ampiezza ma dato che al segnale stesso è associata una corrente piccola il preamplificatore fornisce la corrente necessaria al segnale affinché possa essere processato dagli altri elementi della catena senza subire attenuazione.

Preamplificatore di carica. Dato che è possibile associare al rivelatore una capacità C_{riv} tipicamente il segnale che si misura è dato da $V = Q/C_{riv}$, il problema adesso è che la capacità associata al rivelatore non è costante ma può dipendere da molteplici fattori (temperatura ed effetti capacitivi dei cavi soprattutto) questo provocherebbe una perdita di risoluzione in fase di analisi del segnale. Il preamplificatore di carica risolve questo problema. Di fatto questo costituente è un operazionale retroazionato negativamente con un condensatore (integratore) il quale fa in modo che il segnale in uscita dipenda solo dalla capacità caratteristica dell'integratore.

Amplificatore. Dopo il preamplificatore di carica è posto un amplificatore/formatore composto da due circuiti RC e CR ed un operazionale che insieme costituiscono un filtro passa banda attivo che ha il compito di amplificare e modulare il segnale dato dal rivelatore (segnale deltiforme) in un segnale simile ad una gaussiana (questo in realtà avviene grazie ad un'ulteriore catena di operazionali e circuiti RC). Il segnale così formato viene inviato al convertitore analogico digitale. Va sottolineato che bisogna prestare particolare attenzione affinché l'operazionale non vada in saturazione, in questo caso il segnale gaussiano risulterebbe tagliato in prossimità del massimo rendendo difficile la conversione del segnale da analogico in digitale. È importante notare che l'amplificazione non può avvenire in un solo momento perché altrimenti si rischierebbe di perdere parte dell'informazione portata

Analizzatore multicanale. Il segnale amplificato viene mandato al convertitore analogico digitale (ADC) che è un modulo estraibile contenuto nell'analizzatore multicanale. l'ADC riconosce e digitalizza l'energia associata al segnale dal punto di massimo del segnale formato e amplificato, associa ad ogni range energetico un numero intero (e quindi un canale) e invia i dati inerenti la popolazione di eventi divisi in energia all'analizzatore multicanale che immagazzina i dati stessi e fornisce tramite un display un grafico in cui in ascissa sono rappresentati i vari canali ad ognuno dei quali corrisponde un range energetico mentre in ordinata sono presentati i conteggi di eventi avvenuti nei vari canali.

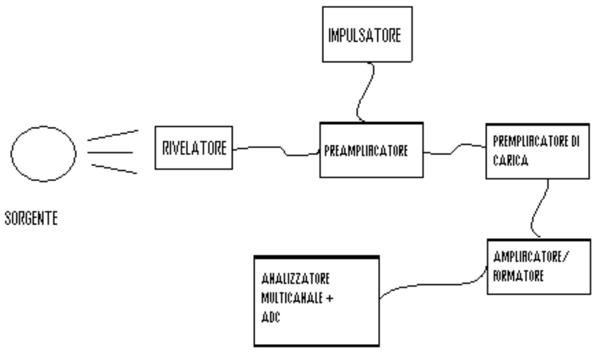

Figura 1.5: Catena elettronica

Generatore di impulsi. È uno strumento che genera impulsi di diverse forme modulabili in ampiezza e frequenza. È stato utilizzato per verificare il buon funzionamento della catena elettronica e per studiare la possibilità che il funzionamento dell'apparato strumentale sia influenzato della differenza di temperatura tra il giorno e la notte.

Capitolo 2

Misure del decadimento alfa di Cm-244 e Rn-222

Il Curio decade con la seguente catena di decadimento in cui sono riportati i decadimenti , la loro energia e infine i tempi di dimezzamento.

(inserire figura)

Il Radon decade con la seguente catena di decadimento.

(inserire figura)

Sono state effettuate le misure in due camere, una delle quali contaminata di Torio a causa di esperimenti effettuati negli anni passati.
Prima di iniziare la misura si crea il vuoto fino alla pressione di qualche mbar nella camera in uso,grazie a una pompa cui è collegata, per evitare l'assorbimento da parte dell'aria di particelle alfa.

2.1 Misura nella camera contaminata

Il grafico sottostante mostra il decadimento alfa del Cm-244 in funzione dell'energia
Si puo' notare da questo primo grafico l'importante caratteristica degli spettri alfa di essere molto ben definiti in energia: questo e' dovuto al fatto che il decadimento alfa e' un processo a due corpi, per cui la distribuzione delle energie cinetiche e' determinata univocamente cosa che non avviene ad esempio nei decadimenti beta che sono processi a tre corpi.
Sono evidenti il picco principale corrispondente al decadimento del $Cm-244 \rightarrow Pu-240$ con energia di 5902 KeV ed il picco secondario corrispondente al decadimento del $Pu-240 \rightarrow U-236$ con energia di 5256 KeV.

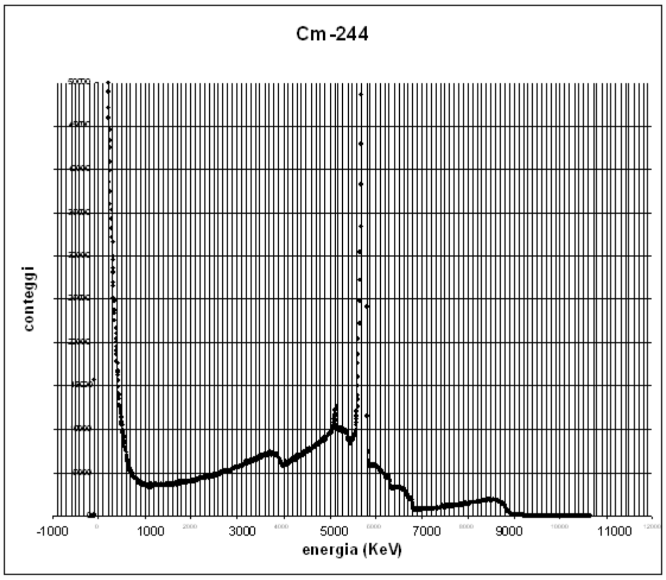

Figura 2.1: Decadimento di Cm-244 in camera contaminata

Ovviamente si hanno solo questi due picchi per la catena del Curio per l'elevata vita media di 23,42 milioni di anni dell'Uranio 236.
Si noti inoltre, nell'intervallo energetico 3000-4000 KeV, un andamento anomalo dovuto alla contaminazione nella camera del Torio.
Il massimo di tale curva non è a 4083 KeV, come ci si aspetterebbe per il decadimento del Th-232, ma ad un'energia inferiore. Questo è probabilmente dovuto al fatto che il Torio per raggiungere il rivelatore deve attraversare il piombo di cui sono costituite le pareti della camera, perdendo conseguentemente energia.
L'unica cosa che osserviamo è che tra i 6000 e i 9000 KeV si hanno degli altri picchi secondari dovuti a decadimento α degli altri materiali costituenti la camera.

2.2 Misure nella camera non contaminata

In questa camera abbiamo effettuato un'altra misura di 1300 second del Cm-244.
e una del Rn-222 di 271000 secondi il cui grafico mostra i tre picchi corrispondenti rispettivamente al decadimento del $Rn - 222 \rightarrow Po - 218$ con energia di 5590 KeV; del $Po - 218 \rightarrow Pb - 214$ con energia di 6115 KeV; del $Po - 214 \rightarrow Pb - 210$ con energia di 7687 KeV.
Da questo grafico si può notare che l'altezza dei picchi è molto simile e all'aumentare della lunghezza della misura la differenza tra le altezze dei picchi

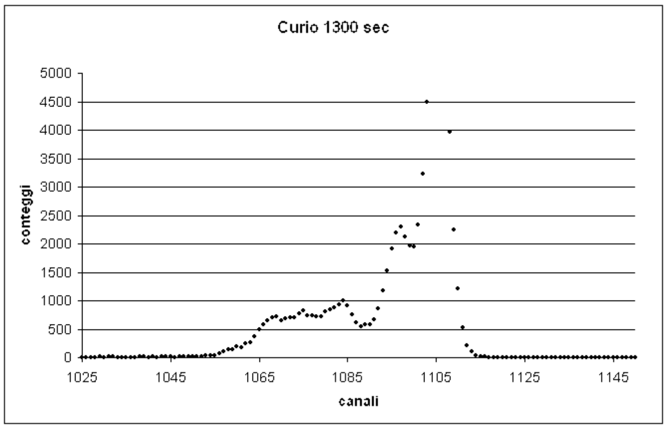

Figura 2.2: decadimento del Cm-244 nella camera non contaminata

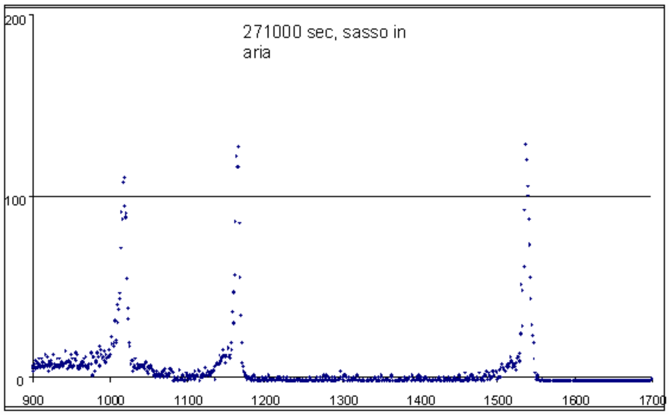

Figura 2.3: Decadimento

Elemento	Canale	Energia (KeV)
Cm-244	1103	5902
Pu-240	975	5256
Rn-222	1019	5590
Po-218	1165	6115
Po-214	1537	7687

Tabella 2.1: Taratura del dispositivo

diventerebbe sempre più piccola. Questo fatto si può spiegare guardando la vita media dei vari elementi. Nella catena del Radon si ha che la somma delle vite medie è dell'ordine di trenta minuti quindi una volta che il Radon inizia a decadere la popolazione di Polonio 218 aumenta finché non si arriva ad una situazione di equilibrio statistico (equilibrio secolare locale), dovuto appunto al fatto che i vari elementi della catena dopo Rn 222 hanno un tempo di dimezzamento dell'ordine dei minuti, in cui ad ogni decadimento del Radon coincide un decadimento del Polonio.
In un sistema isolato una condizione simile si avrebbe per ogni tipo di catena (considerando solo catene con un canale di decadimento predominante rispetto agl'altri) solo che in generale bisognerebbe aspettare molto più tempo (equilibrio secolare).
Grazie a queste due misure si è effettuata la taratura del rivelatore considerando i due picchi del Cm-244 e i tre del Rn-222.

Ottenendo

$$Energia = A \cdot Canale + B \tag{2.1}$$

con

A=4.1989 B=1240.1

Grazie a questa calibrazione abbiamo effettuato un'ulteriore misura del decadimento del Rn-222 di 80000 secondi.
Il grafico sottostante rappresenta i picchi del Radon in funzione dell'energia.
E' evidentissima l'anomalia dovuta ai tre doppi picchi di Rn-222, Po-218 e Po-214.
Si è pensato che tale anomalia fosse dovuta all'elettronica dell'apparato strumentale; è stato posto un impulsatore in aggiunta all'apparato strumentale ad un energia ed una frequenza ben definite e paragonabili a quelle dei nostri conteggi (la frequenza è stata posta a 1Hz). Se fosse stata presente qualche anomalia nella catena elettronica si sarebbe dovuto assistere ad una deformazione dello spettro del segnale dell'impulastore. Era stata presa in considerazione l'ipotesi che la variazione di energia dei picchi fosse causata da una perdita di energia del segnale dovuta alla variazione di resistività della

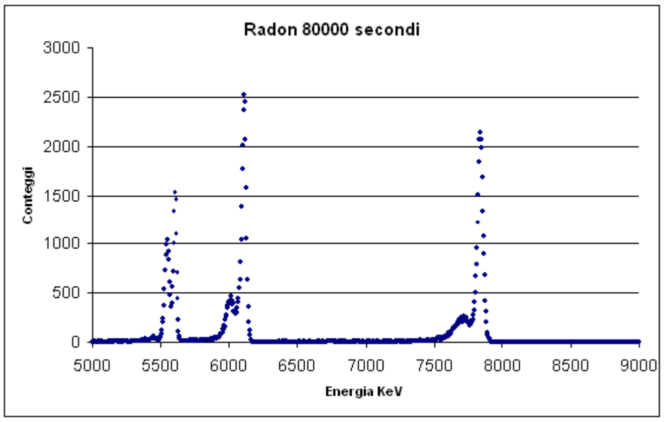

Figura 2.4: Decadimento del Rn-222 nella camera non contaminata

catena elettronica. Tale variazione di resistività poteva essere associata ad una variazione di temperatura tra il giorno e la notte. Il fatto che il segnale dell'impulsatore ha generato un picco monocromatico molto ben definito sull'analizzatore multicanale falsifica questa ipotesi.
Utilizzando un altro rivelatore abbiamo riscntrato ancora la presenza dei doppi picchi, evidentemente il problema è strettamente legato al rivelatore ed al sistema di vuoto associato.
Non siamo ancora riusciti a dare una spiegazione alla natura anomala dello spettro alfa del Rn-222.

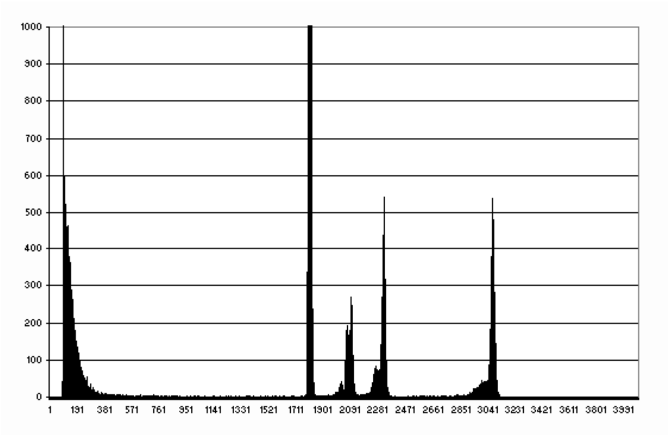

Figura 2.5: Decadimento di Rn-222 con impulsatore

Capitolo 3

Stima dell'efficienza geometrica del rivelatore

Per poter valutare l'effettivo tasso di produzione della sorgente radioattiva utilizzata a partire dai dati da noi raccolti, abbiamo dovuto calcolare l'efficienza geometrica del rivelatore (ipotizzando che l'efficienza intrinseca del rivelatore fosse con buona approssimazione pari a 1).
Per far questo, abbiamo scritto un programma in FORTRAN che, utilizzando un metodo Montecarlo, calcola la frazione degli eventi che vengono effettivamente visti dal rivelatore. Il programma simula i decadimenti generando una particella in un punto casuale all'interno della camera (le cui dimensioni geometriche sono preimpostate nel programma), che si muove in una direzione anch'essa casuale; se la particella così generata colpisce la superficie del rivelatore viene incrementato un contatore (COLPITO). Il procedimento viene ripetuto per un numero di volte pari al numero di eventi che si vogliono simulare, numero anch'esso preimpostato all'interno del programma; alla fine il risultato è ottenuto come rapporto tra le particelle che hanno colpito il rivelatore ed il numero totale di eventi simulati.
Lo schema qui riprodotto rappresenta la camera a vuoto (quella nuova, a sezione rettangolare), ed illustra il sistema di riferimento cartesiano da noi utilizzato, oltre al significato delle lunghezze presenti nel programma.

3.1 Il programma base

Di seguito riportiamo, co i vari passaggi debitamente commentati.

```
PROGRAM MCEFFI

c Programma per il calcolo dell'efficienza geometrica del sistema camera a vuoto
```

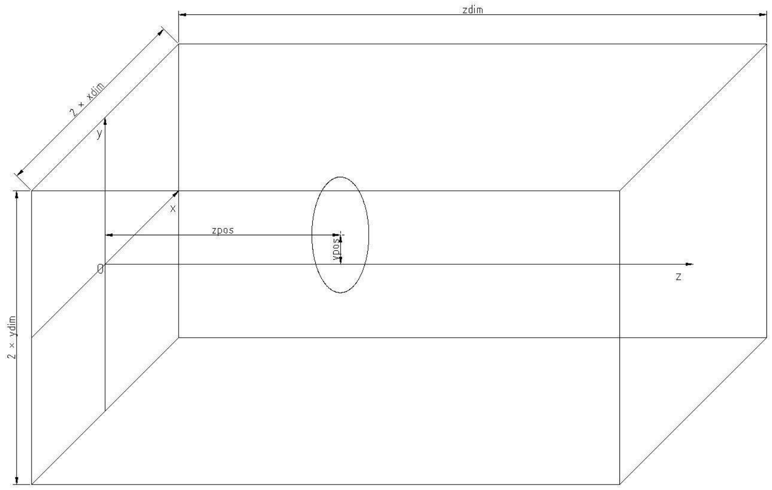

Figura 3.1: Schema della camera a vuoto e sistema di riferimento usato

```
c nuova/rivelatore mediante metodo di Montecarlo

c Definizione delle costanti e dichiarazione variabili:

DATA PI / 3.142 /
DATA XDIM / 2.95 / YDIM / 3.45 / ZDIM /6.3/
DATA XPOS / 0. / YPOS / 0.75 / ZPOS / 2.4 /
DATA RRIV / 1./
DATA EVENTI / 100000 /


REAL COLPITO, MANCATO

RRIV2 = RRIV * RRIV

c Inizializzazione contatori:

COLPITO = 0.
MANCATO = 0.

c Inizio del ciclo di calcolo:
```

```
DO 10 I = 1, EVENTI

c Determinazione casuale del punto in cui avviene il decadimento:

X0 = XDIM - 2 * XDIM * RANF(IDUOMO)
Y0 = YDIM - 2 * YDIM * RANF(IDUOMO)
Z0 = ZDIM * RANF(IDUOMO)

c Determinazione casuale degli angoli con i quali viene emessa la particella alfa:

PHI = 2 * PI * RANF(IDUOMO)
THETA = PI * RANF(IDUOMO) - PI / 2.

c Calcolo delle tangenti:

TGF = TAN(PHI)
TGT = TAN(THETA)

c Calcolo del punto di intersezione della particella alfa con il piano su cui gi-
ace
c la superficie del rivelatore, e della distanza al quadrato di tale punto dal
c centro del rivelatore stesso:

XESTR = X0 + TGF * (ZPOS - Z0)
YESTR = Y0 + TGT * (ZPOS - Z0)

DISTR2 = (XESTR - XPOS)**2 + (YESTR - YPOS)**2

c Se il punto sopra calcolato si trova all'esterno della superficie del rivelatore,
c l'evento non viene osservato:

IF (DISTR2.GE.RRIV2) THEN

MANCATO = MANCATO + 1

c Anche nel caso in cui, pur intersecandosi la traiettoria della particella e la
c superficie del rivelatore, la particella si muove nella direzione opposta rispetto
c a quella in cui si trova il rivelatore stesso, l'evento non viene osservato:

ELSE IF (((Z0.GT.ZPOS).AND.(PHI.LT.PI)).OR.((Z0.LT.ZPOS).AND.(PHI.GT.PI)))
THEN

MANCATO = MANCATO + 1
```

c Se non si verifica alcuna delle condizioni di cui sopra, l'evento viene osservato:

```
ELSE

COLPITO = COLPITO + 1

ENDIF

10 CONTINUE
```

c Calcolo dell'efficienza e stampa a video del risultato:

```
EFF = COLPITO / EVENTI
PRINT *, 'EFFICIENZA'
PRINT *, EFF
PRINT *, 'CONTEGGI REALI'
PRINT *, EVENTI
PRINT *, 'COLPITO', COLPITO


STOP
END
```

3.2 Una possibile modifica

Di questo programma abbiamo anche realizzato una versione per la camera vecchia, la cui unica differenza sostanziale rispetto a quanto riportato sopra (oltre ovviamente alle diverse misure), è un ulteriore controllo sulla posizione dei punti casualmente generati; infatti la camera vecchia, a differenza di quella nuova, è a sezione circolare. Ecco le righe di programma interessate alla modifica:

c Determinazione casuale del punto in cui avviene il decadimento (X e Y):

```
20 X0 = XDIM - 2 * XDIM * RANF(IDUOMO)
Y0 = YDIM - 2 * YDIM * RANF(IDUOMO)
```

c Calcolo della distanza del punto dall'asse della camera a vuoto:

```
DIST2 = (X0)**2 + (Y0)**2
```

c Se il punto è all'esterno della camera non va bene; calcolo un altro punto:

```
IF (DIST2.GE.R2) GOTO 20
```

c Determinazione casuale del punto in cui avviene il decadimento (Z):

```
Z0 = ZDIM * RANF(IDUOMO)
```

Inoltre, per verificare la bontà dell'algoritmo da noi utilizzato, abbiamo testato due casi limite: innanzitutto abbiamo impostato la superficie del rivelatore ad una dimensione tale da riempire l'intera sezione della camera a vuoto, ed abbiamo al contempo ridotto ai minimi termini la profondità della camera stessa; poi abbiamo inserito per il raggio del rivelatore un valore molto piccolo ed abbiamo ingrandito la camera a dismisura. In entrambi i casi abbiamo ottenuto i risultati attesi, cioè un numero di conteggi pari alla meta' del numero di decadimenti simulati nel primo caso, e pari a zero nel secondo; abbiamo così avuto conferma della validità del nostro programma. I valori dell'efficienza geometrica così ottenuti sono l' 1.25% per la camera vecchia e il 2% per la camera nuova.

Capitolo 4

Tasso di produzione del Radon 222 nel vuoto

Consideriamo l'equazione differenziale che descrive il decadimento del radon:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + P \tag{4.1}$$

dove λ è la costante di decadimento, e P è la produttività. Facendo dei semplici conti e imponendo la condizione iniziale N(0) = 0 otteniamo la legge:

$$N(t) = \frac{P}{\lambda}\left(1 - e^{-t\lambda}\right) \tag{4.2}$$

Definiamo l'attività della nostra sorgente come $A(t) = \lambda N(t)$ ottenendo quindi

$$A(t) = P\left(1 - e^{-t\lambda}\right) \tag{4.3}$$

Il dato che però noi misuravamo in laboratorio con il multicanale non era tanto l'attività ma l'intensità del decadimento, che è definita come l'integrale dell'attività stessa e rappresenta quindi il numero di decadimenti avvenuti tra l'istante 0 e l'istante t:

$$I(t) = \int_0^t A(t)dt = P\left(t - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-t\lambda}\right) \tag{4.4}$$

Si ha quindi che l'andamento dell'intensità è:

- lineare con coefficiente angolare pari a P per tempi molto grandi;
- per tempi piccoli possiamo sviluppare l'esponenziale fino al second'ordine ottenendo un andamento parabolico in t^2.

Nel nostro caso la sorgente era Rn222 allo stato gassoso (quindi $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} sec^{-1}$), e il fattore di produzione è dovuto all'emissione del gas da parte

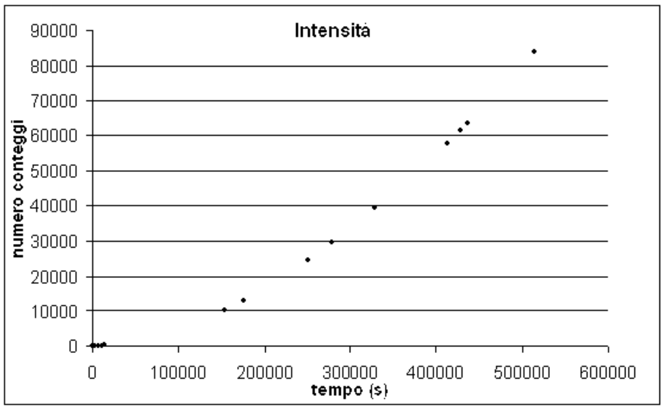

Figura 4.1: Andamento temporale dell'intensità

di un sasso naturale. Abbiamo misurato l'intensità a vari istanti in un periodo di tempo di circa 6 giorni. Prendendo i valori di intensità datici dal multicanale con i tempi associati abbiamo cercato di determinare il valore del tasso di produttività del decadimento. Riportiamo innanzitutto il grafico che rappresenta l'andamento di I(t).

Osservando questo grafico, in laboratorio abbiamo subito notato come effettivamente sembri che gli ultimi valori rilevati possano essere ben plottati da una retta.
Su un altro grafico abbiamo quindi riportato gli ultimi tre valori con la retta che meglio li interpola e mediante una regressione lineare abbiamo calcolato il suo coefficiente angolare ottenendo quindi un primo valore per la produttività P.

Mediante questo primo metodo si ottiene $P = 0.26sec^{-1}$.
Con osservazioni e calcoli più attenti si osserva però che non è del tutto corretto ipotizzare un andamento lineare a questi tempi, probabilmente ancora troppo bassi rispetto alla vita media del Radon.
Supponendo infatti l'esattezza di questo valore per P, abbiamo calcolato l'errore percentuale ai vari tempi tra il dato di intensità datoci dal multicanale e quello calcolato mediante la formula scritta prima (in cui abbiamo usato $P = 0.26sec^{-1}$); esso è risultato essere molto alto.

Questi valori ci hanno suggerito di provare a calcolare in altro modo la produttività.
Riportiamo ora i calcoli analitici da noi svolti usando il metodo del χ^2

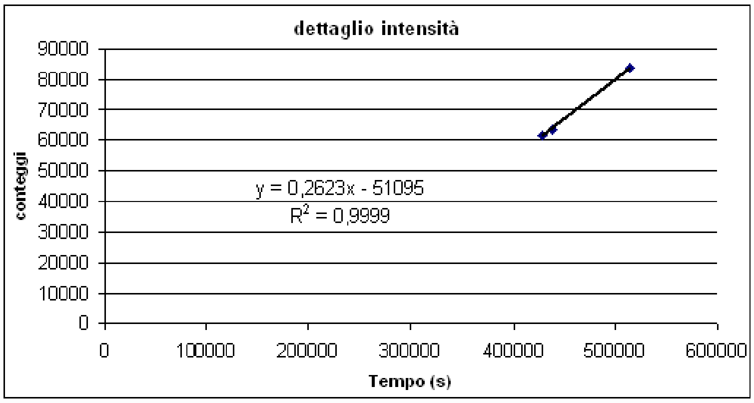

Figura 4.2: Dettaglio

Ricordiamo innanzitutto la definizione

$$\chi^2 = \sum_0^n \left(\frac{\textit{valore osservato - valore atteso}}{\textit{deviazione standard}} \right) \tag{4.5}$$

Si ha quindi che il χ^2 è un indicatore dell'accordo tra i valori osservati e quelli attesi. Se l'accordo è buono, χ^2 sarà dell'ordine di n; se è cattivo sarà molto maggiore di n. Supponendo che i dati sulle intensità da noi raccolti in laboratorio abbiano tutti uno stesso errore pari a $\sqrt{n}$, abbiamo cioè supposto un errore poissoniano, la nostra idea è stata quella di porre

$$\frac{d\chi^2}{dP} = 0 \tag{4.6}$$

così da trovare il valore di P che minimizza lo scarto tra il valore di intensità osservato e quello atteso teoricamente. Considerando:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(I_i - I(t_i))^2}{\sigma_i^2} \tag{4.7}$$

siano:

- $\sigma_i^2 = I_i$;
- I_i il vaolre di intensità datoci dal multicanale al tempo t_i;
- $I(t_i)$ il vaolre che invece si deduce in modo teorico usasndo la formula (4.4) con P incognito.

La condizione di minimo che quindi volgliamo imporre per determinare il valore di P è data da:

$$\frac{d}{dP} \sum \frac{\left(I_i - P \cdot \left(t_i - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-t\lambda}\right)\right)^2}{\sigma_i^2} = 0 \tag{4.8}$$

$$-2\sum\left[\frac{1}{\sigma_i^2}\left(I_i - P\left(t_i - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-t_i\lambda}\right)\right)\left(t_i - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-t_i\lambda}\right)\right] = 0$$

$$\sum\frac{1}{\sigma_i^2}\left[I_i\left(t_i - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-t_i\lambda}\right) - P\left(t_i - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-t_i\lambda}\right)^2\right] = 0$$

Si ottiene quindi:

$$P = \frac{\sum\frac{I_i}{\sigma_i^2}\left(t_i - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-t_i\lambda}\right)}{\sum\frac{1}{\sigma_i^2}\left(t_i - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-t_i\lambda}\right)^2} \tag{4.9}$$

Calcolando queste due sommatorie abbiamo ottenuto per P un valore pari a 0.43 sec-1. Anche in questo caso abbiamo calcolato l'errore percentuale dell'intensità prevista teoricamente rispetto a quella misurata sperimentalmente ottenendo per tempi sufficientemente alti dei valori ragionevoli: per le ultime 6 misure lo scarto tra il valore atteso teoricamente con P = 0.43 sec-1 e quello osservato risulta sempre inferiore al 4Abbiamo inoltre calcolato il valore di P utilizzando un programma di Fortran e abbiamo ottenuto ancora un valore numerico pari a 0.4 sec-1 ; questo ha quindi confermato l'esattezza del metodo analitico da noi precedentemente seguito.

Il valore così ottenuto, tuttavia, non è il reale tasso di produzione della nostra sorgente; infatti il numero di decadimenti visti dal rivelatore, su cui ci siamo basati per il calcolo, è solo una frazione dei decadimenti realmente avvenuti. Per ottenere il reale valore di dobbiamo pertanto dividere quello sopra calcolato per l'efficienza del rivelatore, che abbiamo ricavato nel paragrafo precedente. Si ottiene così $P_{reale} = 21.5 sec^{-1}$.
Questo valore è simile a quelli ottenuti dai gruppi degli anni precedenti per valori di vuoto confrontabili.

Capitolo 5

Determinazione della vita media del Polonio 218

5.1 Dati e metodo della massima verosimiglianza

Per ottenere una stima della vita media del Polonio 214, ne abbiamo misurato l'intensità in funzione del tempo. per un tempo relativamnete breve; in questo modo abbiamo potuto considerare trascurabili gli effetti di sorgente, dal momento che il radon ha un tempo di dimezzamento molto più grande degli elementi che lo seguono nella catena di decadimento. Le misure così ottenute sono riportate nella tabella che segue.

Osserviamo che alla fine il numero di decadimenti è ormai stabilizzato. Da questi dati si possono ottenere approssimativamente gli istanti in cui, a partire dall'istante di inizio della misura, i singoli nuclei di Polonio sono decaduti: Il calcolo della vita media si può fare con il metodo della massima verosimiglianza; la probabilità che un nucleo di Polonio decada all'istante è data da:

$$P_\tau(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5.1}$$

Pertanto la probabilità di ottenere l'intero insieme di misure è:

$$P_\tau(t) = \left(\frac{1}{\tau}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\tau}}$$

Per trovare il valore di τ che massimizza tale probabilità, se ne calcola il logaritmo e si pone la derivata rispetto a τ uguale a zero:

$$\frac{d}{d\tau}ln(P_\tau(t_1, t_2, ...t_n)) = \sum_{i=1}^{n} = \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{t_i}{\tau}\right) = 0$$

Da questa equazione si ottiene:

$$\tau = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \bar{t} \tag{5.2}$$

Intensità	Tempo (sec)
4	333
4	675
6	803
6	1206
6	1420
11	1800
12	2070
14	2515
14	2935
17	3444
17	3820
18	4045
19	4400
19	4835
19	5245
19	5613
19	6000
19	6400
19	6820
19	7260

Tabella 5.1: Intensità in funzione del tempo

Decadimento n^o	Tempo (sec)
1	166.5
2	166.5
3	166.5
4	166.5
5	739
6	739
7	1610
8	1610
9	1610
10	1610
11	1610
12	1935
13	2292.5
14	2292.5
15	3189.5
16	3189.5
17	3189.5
18	3932.5
19	4222.5

Tabella 5.2: Tempo dei decadimenti

Dobbiamo tuttavia tenere in conto il fatto che le nostre misure si sono svolte per un tempo finito, pertanto la probabilità deve essere calcolata in base ad un valore di τ corretto, quindi:

$$P_\tau(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)} \tag{5.3}$$

dove T è il tempo al quale abbiamo interotto le nostre misure, cioè 7260 secondi.

5.2 Parte computazionale

Il seguente programma scritto in FORTRAN, calcola dapprima in maniera approssimanta quale sia il valore di τ che massimizza la probabilità con la correzione descritta sopra,quindi, per confrontare il risultato con il caso ideale, la media dei tempi di decadimento misurati.

```
c*****************************************************************
program malik

dimension amisu(19)
numis = 19

c Tempi di decadimento valutati in base alle misure sperimentali:

amisu(1) = 166.5
amisu(2) = 166.5
amisu(3) = 166.5
amisu(4) = 166.5
amisu(5) = 739.
amisu(6) = 739.
amisu(7) = 1610.
amisu(8) = 1610.
amisu(9) = 1610.
amisu(10)= 1610.
amisu(11)= 1610.
amisu(12)= 1935.
amisu(13)= 2292.5
amisu(14)= 2292.5
amisu(15)= 3189.5
amisu(16)= 3189.5
amisu(17)= 3189.5
amisu(18)= 3932.5
amisu(19)= 4222.5
```

```
c Massimizzazione della probabilità

valmin = -9000.
valore = 0.

c Ciclo su possibili valori di tau

do 10 i=1,4000.
tau = float(i)

c Chiamata alla funzione amina sotto definita:

value = amina(amisu,numis,tau)
print *,value

c Se la probabilità calcolata con l'attuale valore di tau è maggiore della
c precedente, teniamo questi valori di probabilità e tau come riferimento:

if (value.gt.valmin) then
valmin = value
valore = tau
endif
10 continue


print *,'valore = ',valore



c Calcolo del valore medio:

valmed = 0.

do 20 j=1,numis
valmed = valmed + amisu(j)
20 continue

valmed = valmed/float(numis)

print *,'valmed = ',valmed

stop
```

```
end

c***************************************************************************

c Funzione che valuta il logaritmo della probabilità per un dato valore di tau

function amina(amisu,numis,tau)

dimension amisu(19)

tota = 0.

do i=1,numis
tota = tota - alog(tau) - amisu(i)/tau
enddo

amina = tota

return
end
c****************************************************************************
```

I due valori risultanti dal programma sono 2173 e 1812.5 secondi (si noti che per come è scritto il programma, il valore di τ calcolato con il primo metodo non può che essere intero). Ci aspettavamo un risulto di circa 3000 secondi, essendo il decadimento del Polonio 214 (che ha un tempo di dimezzamento dell'ordine del centinaio di micro secondi) dominato dalle vite medie del Pb-214 e del Bi-214, che decadono β (il rivelatore non ne osserva, quindi, i decadimenti) e hanno tempi di dimezzamento compresi tra 20 e 30 minuti. Il nostro risulato differisce notevolmente da quello atteso: questa discrepanza è presumibilmente attribuibile alla scarsa efficienza del rivelatore che si attesta attorno al 2%: infatti per tempi elevati non abbiamo più misurato decadimenti, tuttavia è possibile che ne siano avvenuti pochi e che il rivelatore non li abbia visti.

Capitolo 6

Calcolo del fattore di produzione colla distribuzione di Poisson

Quando prima abbiamo determinato il valore di P abbiamo usato il metodo dei minimi quadrati. La distribuzione che però meglio descrive i decadimenti radioattivi non è tanto la gaussiana quanto la distribuzione di Poisson. Riportiamo quindi qui sotto questo secondo metodo analitico più preciso. Siano

$$y_i := \Delta N_i$$

$$x_i := f(t_i) = \left(t_i - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-t_i\lambda}\right)$$

Otteniamo così una dipendenza lineare del tipo $y = Px$.
La probabilità di ottenere un determinato valore per y è governata dalla distribuzione:

$$\Pi(y) = e^{-y_{atteso}} \frac{y_{atteso}^y}{y!}$$

dove nel nostro caso per quanto detto prima si ha $y_{atteso} = Px_i$. La probabilità combinata di ottenere il nostro set di misure sarà dunque data dal prodotto delle probabilità per i singoli y_i:

$$\Pi_p(y_1, ...y_n) = e^{-P\sum_{i=1}^n x_i} \Pi \frac{(Px_i)^{y_i}}{y_i!}$$

Massimizzare questa probabilità equivale a massimizzarne il logaritmo, che risulta più semplice dal punto di vista dei calcoli:

$$ln(\Pi_p(y_1, ...y_n)) = -P\sum x_i + \sum y_i ln(Px_i) - \sum ln(y_i!)$$

Imponendo che la derivata sia zero:

$$\frac{d}{dP} ln(\Pi_P(y_i, ...y_n)) = -\sum x_i + \sum \frac{y_i}{P} = 0$$

da cui alla fine

$$P = \frac{\sum y_i}{\sum x_i}$$

Eseguendo il calcolo abbiamo trovato $P = 0.43 sec^{-1}$. Notiamo che anche in questo secondo modo riotteniamo il risultato che ci era venuto prima, questo è dovuto al fatto che per un numero di conteggi sufficientemente elevato la distribuzione di Poisson tende a coincidere con quella di Gauss.