

**ESPERIMENTAZIONI DI
FISICA 2
RELAZIONI DI LABORATORIO**

**Marco Bavera
Alessandro Fontana
Giovanni Ganzer**

Misure polarimetriche

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata a determinare il potere rotatorio di soluzioni di saccarosio in acqua

Materiale

Polarimetro di Laurent	(precisione: un secondo di grado)
Bilancia elettronica	(precisione: 1 mg)
Becher graduato	(precisione: 1 ml)
Calibro	(precisione: 0.1 mm)
Lampada a vapori di sodio	

Procedura sperimentale

Alcune sostanze come, ad esempio, lo zucchero, la canfora, il quarzo, sono caratterizzate dalla proprietà di ruotare la direzione di polarizzazione delle onde luminose polarizzate linearmente che le attraversano: tale proprietà viene definita "attività ottica".

L'angolo α del quale la direzione di polarizzazione viene ruotata e lo spessore h di materiale otticamente attivo attraversato dall'onda luminosa sono legati dalla formula

$$\alpha = K h$$

dove la costante K , dipendente dalla lunghezza d'onda, viene definita come "potere rotatorio". Nel caso particolare di soluzione di saccarosio l'angolo di rotazione è dato da:

$$\alpha = k_{\lambda} c l$$

dove la costante k_{λ} , dipendente dalla lunghezza d'onda e definita come "potere rotatorio specifico della soluzione", indica l'angolo di rotazione per unità di percorso e unità di concentrazione, la grandezza l indica il cammino geometrico dalla luce nella soluzione di saccarosio e c è data da

$$c = \text{Massa (zucchero)} / \text{Volume (acqua)}$$

indica la concentrazione della soluzione.

Lo strumento a disposizione per determinare la misura della rotazione del piano di polarizzazione di un fascio di luce monocromatica (in laboratorio luce gialla del sodio) è il polarimetro di Laurent.

Tale strumento è in sostanza una cella contenente la soluzione in mezzo a due nicol polarizzatori incrociati.

Tali nicol (il primo chiamato polarizzatore ed il secondo analizzatore) sono posizionati inizialmente in modo che un fascio di luce polarizzato dal primo venga completamente disperso dal secondo; ponendo successivamente fra i due nicol la sostanza della quale si deve determinare il poter rotatorio, si osserva la ricomparsa di una certa intensità luminosa al di là del nicol analizzatore. Dalla rotazione del nicol analizzatore necessaria ad ottenere nuovamente la condizione di estinzione dell'onda luminosa si determina α .

Variando sia la lunghezza del cammino ottico sia la concentrazione delle soluzioni di saccarosio e misurando l'angolo di rotazione α con il polarimetro è possibile determinare il potere rotatorio k_{λ} .

Nel polarimetro utilizzato in laboratorio è presente inoltre una lamina mezz'onda che permette di osservare una condizione di equipenombra al posto della condizione di estinzione della luce.

Analisi dei dati

Si misura in primo luogo l'angolo di equipenombra .

La seguente tabella mostra i valori ottenuti per l'angolo di equipenombra α_0 .

α_0	4° 12'	4° 13'	4° 11'	4° 11'	4° 13'
------------	--------	--------	--------	--------	--------

$$\alpha_0 = 4^\circ 12' = 4,2^\circ$$

Come tutte le misure angolari nelle esperienze polarimetriche il valore ricavato per α_0 è affetto da un errore che dipende essenzialmente dalla sensibilità visiva dello sperimentatore ; una stima accettabile per quantificare l'errore percentuale tipico di queste misure risulta essere intorno al 2% .

Si misurano successivamente le lunghezze l_1 , l_2 dei due tubi polarimetrici che, riempiti con le soluzioni di saccarosio, vengono posti fra i due nicol del polarimetro.

La seguente tabella mostra i valori ottenuti per l_1 , l_2

Lunghezza1 (dm)	Lunghezza2 (dm)
1,821	1,415
1,822	1,415
1,821	1,416
1,821	1,415
1,822	1,416

$$l_1 = 1,8214 \pm 0.0005 \text{ dm (errore percentuale 0.03 \%)}$$

$$l_2 = 1,4154 \pm 0.0005 \text{ dm (errore percentuale 0.03 \%)}$$

Per stimare l'incertezza sulle misure della concentrazione bisogna considerare che la bilancia elettronica apprezza 1 mg, il becher usato per trovare il volume d'acqua necessario apprezza 1 ml, le masse di zucchero utilizzate sono dell'ordine delle decine di grammi e che i volumi di acqua sono dell'ordine di 0.2÷0.4 l; combinando in quadratura gli errori percentuali si ha:

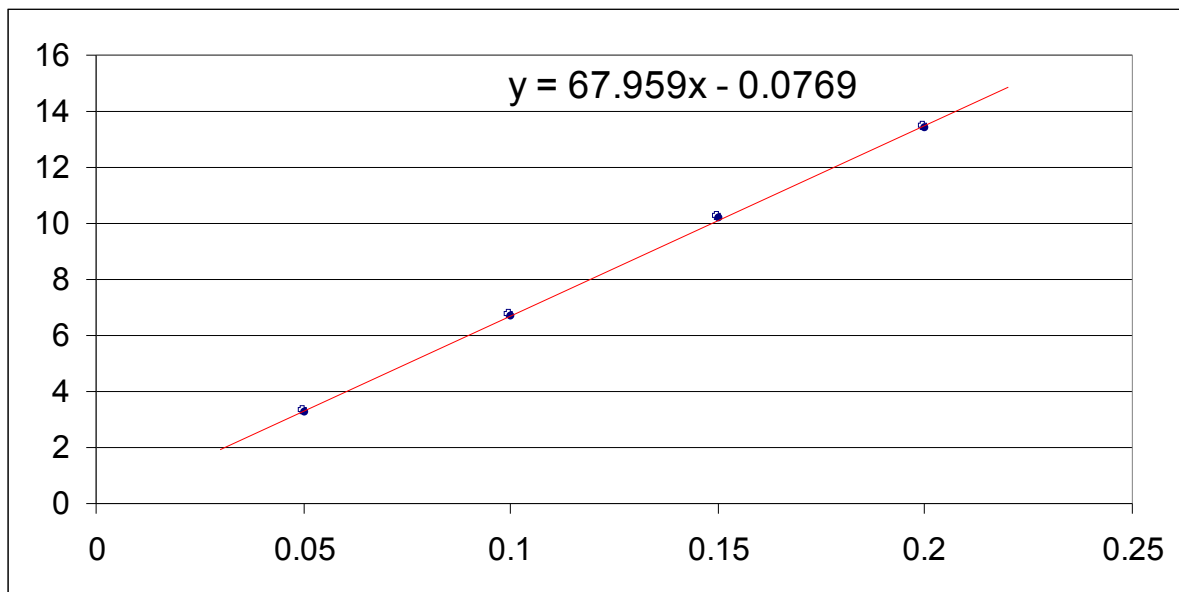
$$\delta_c / c = ((\delta_m / m)^2 + (\delta_v / v)^2)^{1/2} = 0.33\%.$$

Nella seguente tabella si mostra la serie di dati relativa alla determinazione del potere rotatorio specifico per varie soluzioni nel caso in cui si è usato il primo tubo polarimetrico.

c (Kg/dm ³)	α (gradi)	$\alpha - \alpha_0$ (gradi)	l_1 (dm)	k_λ (gradi*dm ² /Kg)
0.2	28,71	24,51	1,8214	67,3
0.15	22,76	18,56	1,8214	67,84
0.1	16,49	12,29	1,8214	65,95
0.05	10,17	5,97	1,8214	65,24

Supponendo che le due grandezze $y = (\alpha - \alpha_0) / l_1$ ed $x = c$ siano legate da una relazione del tipo $y = B + Ax$, applicando le leggi del metodo dei minimi quadrati è possibile ottenere una stima del parametro $A = k_\lambda$; si fa notare che sono stati riportati in ascissa i valori di c in quanto affetti da un errore minimo (rispetto ai valori rappresentanti le ordinate).

Il seguente grafico mostra i valori sperimentali confrontati con la miglior retta interpolatrice.



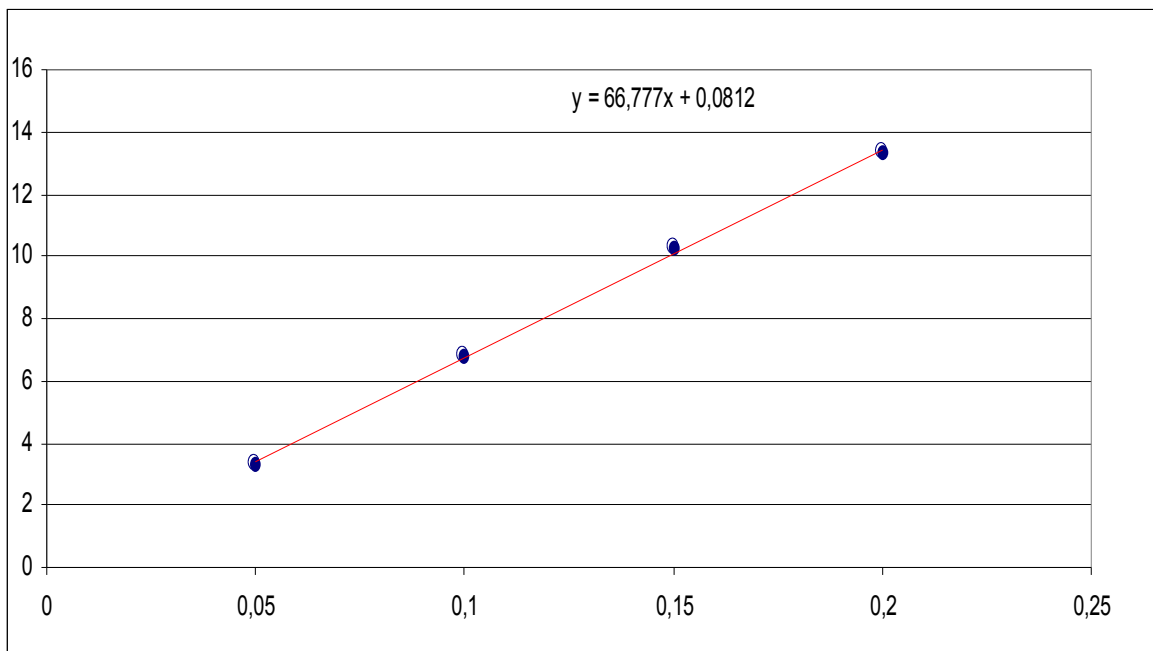
$$A = 67,96 \text{ gradi} \cdot \text{dm}^2 / \text{Kg}$$

$$\sigma_A = 0,93 \text{ gradi} \cdot \text{dm}^2 / \text{Kg}$$

Nella seguente tabella si mostra la serie di dati relativa alla determinazione del potere rotatorio specifico per varie soluzioni nel caso in cui si è usato il secondo tubo polarimetrico.

c (Kg/dm ³)	α (gradi)	$\alpha - \alpha_0$ (gradi)	l_2 (dm)	k_λ (gradi \cdot dm ² /Kg)
0.2	23,02	18,82	1,41546	66,48
0.15	18,75	14,55	1,41546	68,53
0.1	13,85	9,65	1,41546	65,8
0.05	8,9	4,7	1,41546	66,4

Analogamente a quanto fatto in precedenza ricostruisce il grafico di $(\alpha - \alpha_0)/l_2$ in funzione della concentrazione c



Applicando le leggi del metodo dei minimi quadrati, si trova

$$A = 66,78 \text{ gradi} \cdot \text{dm}^2/\text{Kg}$$

$$\sigma_A = 2.02 \text{ gradi} \cdot \text{dm}^2/\text{Kg}$$

Avendo due misure per il valore di k_λ derivate da due serie differenti di dati, si è calcolata la media pesata :

$$k_\lambda = 67.75 \pm 0,85 \text{ gradi} \cdot \text{dm}^2/\text{Kg}$$

Ricordando che in laboratorio si è utilizzata una lampada al sodio ($\lambda=5893 \text{ \AA}$) è possibile verificare la compatibilità del valore sperimentale k_λ con il valore accettato $k_{\lambda \text{ exp}} = 66,40 \text{ gradi} \cdot \text{dm}^2/\text{Kg}$;si calcola il numero di deviazioni standard per cui k_λ differisce da $k_{\lambda \text{ exp}}$

$$t = |k_\lambda - k_{\lambda \text{ exp}}| / \sigma = 1.59$$

Dalla tabella dell'integrale normale degli errori si trova che la probabilità di ottenere un risultato che differisce da $k_{\lambda \text{ exp}}$ per t o più deviazioni standard è:

$$P(\text{al di fuori di } t\sigma) = 1 - P(\text{entro } t\sigma) = 11.18\%$$

Il risultato ottenuto può dunque essere ritenuto accettabile anche se la percentuale ad esso legato è piuttosto

bassa.

La difficoltà a trovare un buon accordo tra il risultato atteso e quello sperimentale è certamente dovuta sia all'incertezza legate alla scelta dell'angolo di equipenombra, sia dell'angolo corrispondente alla estinzione del fascio di luce; poiché gli errori introdotti in questa maniera sono dell'ordine di qualche per cento risulta plausibile che le misure siano affette da apprezzabili errori sistematici.

Si sottolinea infine che la difficoltà a raggiungere una situazione di omogeneità nella soluzione e la tendenza da parte dello zucchero a decantare nel tubo polarimetrico ha reso sicuramente più imprecisi i dati.

Misure di fometria

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla determinazione della posizione dei piani focali e dei piani principali di due lenti delle quali una convergente ed una divergente.

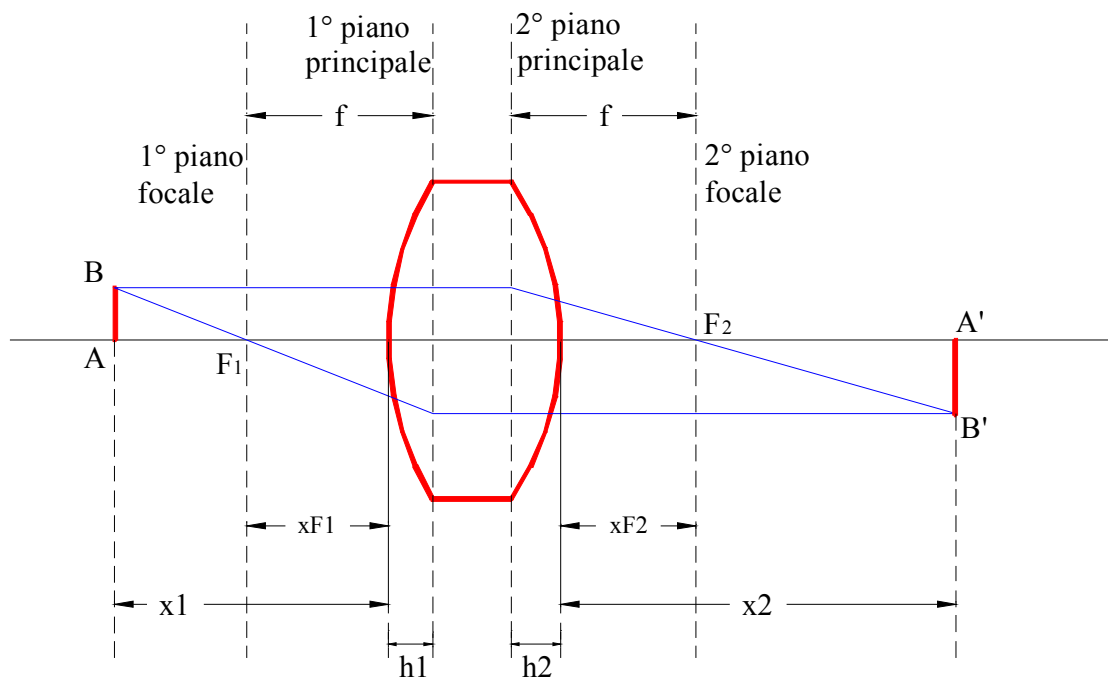
Materiale

Sferometro	(precisione:0.01mm)
Calibro	(precisione:0.01mm)
Scala graduata	(precisione:0.5mm)
Lenti	

Procedura sperimentale

In primo luogo occorre stabilire se le lenti da utilizzare vadano considerate lenti sottili o lenti spesse; viene convenzionalmente stabilito che una lente è sottile quando lo spessore S è inferiore al 5% del più piccolo dei due raggi di curvatura.

Il seguente disegno mostra la schematizzazione di una lente spessa biconvessa in cui vengono riportate le posizioni qualitative dei piani cardinali e la costruzione dell'immagine $A'B'$ dell'oggetto AB :



Per ciascuna delle due lenti si determina la distanza focale utilizzando il metodo dei punti coniugati, il metodo dell'ingrandimento ed il metodo di Bessel.

I tre metodi utilizzati vengono esposti per il caso in cui si lavora con lenti spesse; tuttavia si riducono alla trattazione delle lenti sottili imponendo che le quantità h_1 , h_2 si annullino e trasformando di conseguenza i sistemi di equazioni utilizzati.

- **Metodo dei punti coniugati:** il metodo consiste nel determinare le coordinate di tre coppie di punti coniugati in modo da poter scrivere (utilizzando la relazione di Newton per punti coniugati nel sistema dei piani principali) le tre equazioni

$$\begin{aligned} [x_1-(f+h_1)][x_2-(f+h_2)]&=f^2 \\ [x_1'-(f+h_1)][x_2'-(f+h_2)]&=f^2 \\ [x_1''-(f+h_1)][x_2''-(f+h_2)]&=f^2 \end{aligned}$$

che hanno come soluzione:

$$f = [(x_1 - x_1')(x_2 - b)(b - x_2') / (x_2 - x_2')]^{1/2};$$

$$a = f + h_1 \quad b = f + h_2$$

dove

$$a = x_1 - f^2 / (x_2 - b) \quad b = (Ax_2 - Bx_2'') / (A - B)$$

$$A = (x_1 - x_1') / (x_1^2 - x_2'') \quad B = (x_2 - x_2') / (x_2^2 - x_2'').$$

Poiché nel caso di lenti spesse i valori a e b sono simili ad f e le coordinate dei piani principali piccole paragonate ad f, i valori h_1, h_2 sono affetti da errori notevoli; per eludere questo problema è opportuno usare altre relazioni che diano h_1, h_2 affetti da errori meno elevati:

$$\begin{aligned} h_1 &= S R_1 / (S(n-1) - n(R_1 - R_2)) \\ h_2 &= S R_2 / (S(n-1) - n(R_1 - R_2)) \end{aligned}$$

dove n indica il rapporto fra indici di rifrazioni n_2 / n_1 ed è in relazione a f mediante l'equazione

$$1 / f = (n - 1) [1 / R_1 - 1 / R_2 + (n - 1) S / (n R_1 R_2)]$$

ovvero

$$n^2(R_2 - R_1 + S) + n(R_1 - R_2 - 2S - R_1 R_2 / f) + S = 0$$

- **Metodo dell'ingrandimento:** il metodo consiste nel misurare gli ingrandimenti G e G' subiti dall'oggetto rispettivamente nelle posizioni x_1 e x_1' .

Utilizzando le relazioni che legano l'ingrandimento alle distanze misurate si possono scrivere le seguenti equazioni :

$$\begin{aligned} G &= -f / (x_1 - a) \\ G' &= -f / (x_1' - a) \end{aligned}$$

dove

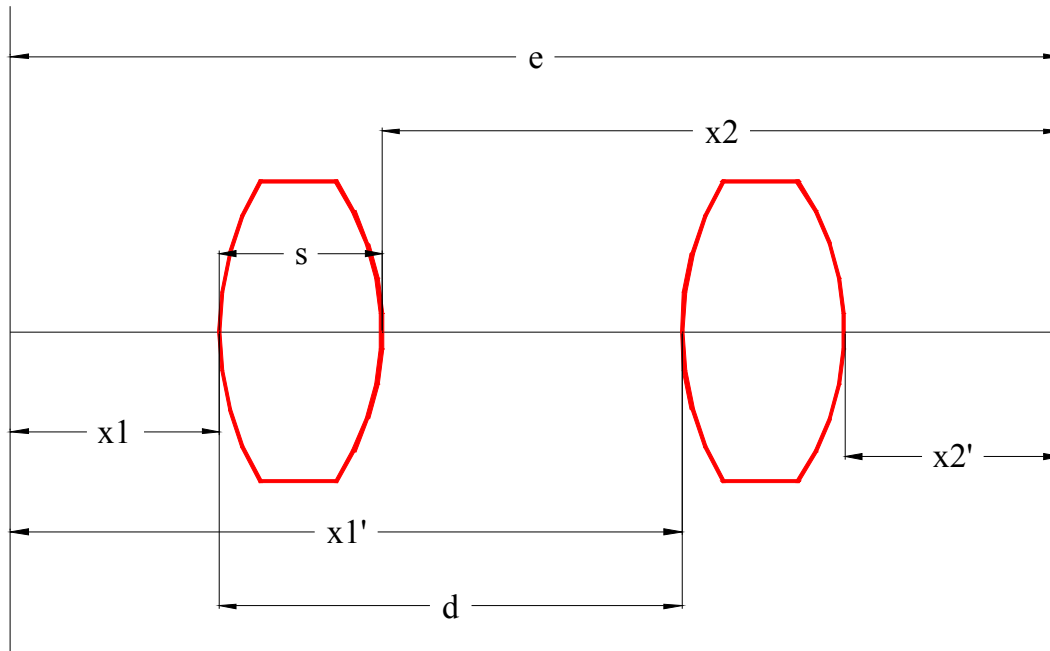
$$a = f + h_1 \quad b = f + h_2.$$

La soluzione è data da

$$\begin{aligned} a &= (x_1' G' - x_1 G) / (G' - G) \\ f &= -(x_1 - a) G \end{aligned}$$

mentre h_1 ed h_2 sono dati dalle stesse formule usate nel metodo precedente.

- **Metodo di Bessel:** il metodo consiste nel misurare due diversi valori della distanza e tra sorgente e schermo.



Come mostra la figura soprastante è possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + S &= e & x_1' + x_2' + S &= e \\ x_1' - x_1 &= d & x_2' - x_2 &= d \end{aligned}$$

osservando anche lo schema della lente spessa, dalla simmetria dei punti coniugati si ha inoltre:

$$x_1' - h_1 = x_2 - h_2 \quad x_2' - h_2 = x_1 - h_1.$$

Usando le relazioni precedenti si ha

$$x_1 = (e - d - S - h_2 + h_1) / 2 \quad x_2 = (e + d - S + h_2 - h_1) / 2$$

Inserendo tali valori nell'equazione dei punti coniugati

$$(x_1 - h_1)(x_2 - h_2) / [(x_1 - h_1) + (x_2 - h_2)] = f$$

si ottiene

$$\begin{aligned} f &= [(e - \Delta)^2 - d^2] / [4(e - \Delta)] \\ f &= [(e' - \Delta)^2 - d'^2] / [4(e' - \Delta)] \end{aligned}$$

dove $\Delta = S + h_1 + h_2$.

Dal sistema di equazioni sopra riportato si ricava la quantità Δ corrispondente alle soluzioni dell'equazione

$$(e - e')\Delta^2 + (d^2 - d'^2 + e'^2 - e^2)\Delta + (d'^2e - d^2e' + ee'(e - e')) = 0$$

e quindi per sostituzione f.

Le stesse formule usate nei metodi precedente danno il valore h_1 ed h_2 .

LENTE CONVERGENTE

Essendo la lente esaminata di tipo piano-convessa occorre determinare un solo raggio di curvatura.

In laboratorio per misurare il raggio di curvatura della faccia di una lente si utilizza uno sferometro, quindi è necessario avere innanzitutto una stima della costante strumentale L, indicante la distanza tra le punte di appoggio dello strumento, misura ottenuta con un calibro di precisione.

L	35,	35,	35,	35,	35,4
(mm)	6	4	6	6	

$$L = 35,52 \pm 0,02 \text{ mm}$$

Tramite lo sferometro si misura lo spessore h della porzione di lente delimitata dalle tre punte dello strumento.

h	5,	5,	5,	5,	5,7
(mm)	8	9	8	8	

$$h = 5,8 \pm 0,01 \text{ mm}$$

Il raggio di curvatura è dato dalla formula (calcolata nei valori medi di L ed h)

$$R = \frac{L^2}{6h} + \frac{h}{2} = 39,15 \text{ mm}$$

mentre la relativa deviazione standard è ricavabile con le leggi di propagazione degli errori e risulta essere

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{2L}{6h}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(-\frac{L^2}{6h^2} + \frac{1}{2}\right)^2 \sigma_h^2} = 0,07 \text{ mm}$$

Utilizzando un calibro di precisione si misura lo spessore S della lente.

S	11,0	11,0	11,0	11,0	11,08
(mm)	9	8	9	8	

$$S = 11,084 \pm 0,001 \text{ mm.}$$

A questo punto, è possibile affermare che la lente è da considerarsi spessa, poiché

$$S / R = 11,084 / 39,15 = 28,31\%.$$

Metodo dell'ingrandimento

Per la lente piano convessa misurando un ingrandimento G e la distanza dell'oggetto dall'immagine x_1 è possibile determinare f, n ed h_2 tramite le leggi esposte precedentemente.

La seguente tabella riporta i dati raccolti in laboratorio.

G	x_1 (mm)	R_1	R_2	f (mm)	$\delta f/f$	n	h_1 (mm)	h_2 (mm)
-1. 8	114	39.1 5	∞	73.29	2.27 %	1.53 4	0	-7.22

-2. 1	104.1	39.1 5	∞	70.52	2.22 %	1.55 5	0	-7.13
-3. 7	91	39.1 5	∞	71.64	2.11 %	1.54 6	0	-7.17
-2. 4	103.7	39.1 5	∞	73.2	2.19 %	1.53 5	0	-7.22
-1. 5	181.4	∞	-39.15	72.56	2.33 %	1.53 9	-7.2	0
-2. 3	228.8	∞	-39.15	69.33	2.2% %	1.56 5	-7.08	0
-1. 6	179.7	∞	-39.15	69.11	2.31 %	1.56 6	-7.08	0
-1	140.8	∞	-39.15	70.4	2.5% %	1.55 6	-7.12	0

I dati relativi ai valori della distanza focale evidenziano una forte fluttuazione dovuta alla pesante incertezza relativa sia alla misura di G stimata intorno al 3%, sia alla misura di x stimata intorno al 2%; l'incertezza su f è stata calcolata utilizzando la seguente formula:

$$\delta_f = \sqrt{\left(\frac{x_1}{(G+1)^2}\right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{G}{(G+1)}\right)^2 \sigma_{x_1}^2}$$

Il valore di f_{best} si ottiene calcolando la media pesata, dal momento che ogni f ha un errore diverso;

$$f_{\text{best}} = 71.6 \pm 0.6 \text{ mm}$$

Metodo dei punti coniugati

Per la lente piano convessa misurando due copie di punti coniugati è possibile determinare f, n ed h_1 tramite le leggi espone precedentemente.

La seguente tabella riporta i dati raccolti in laboratorio (i valori sono in millimetri).

1°coppia punti		2°coppia punti		R ₁	R ₂	f	$\delta f/f$	n	h ₁	h ₂
166	127,2	227	105,4	∞	-39.15	72,1	2.59 %	1,54 3	0	-7,18
165	126	115,1	182	∞	-39.15	69,6 9	2.45 %	1,56 2	0	-7,1
142	138	195	109,5	39.1 5	∞	70,2 8	2.39 %	1,55 7	-7,12	0
128,6	161	205	109,8	39.1 5	∞	71,5 1	2.41 %	1,54 7	-7,16	0

l'incertezza su f è stata calcolata utilizzando la seguente formula, nella quale è stato posto un errore percentuale del 2% sulle distanze coniugate:

$$\delta_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1'}\right)^2 \sigma_{x_1'}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2'}\right)^2 \sigma_{x_2'}^2}$$

Il valore di f_{best} si ottiene calcolando la media pesata, dal momento che ogni f ha un errore diverso;

$$\mathbf{f_{\text{best}} = 70.9 \pm 0.3 \text{ mm};}$$

Metodo di Bessel

Per la lente piano convessa misurando per due diverse configurazioni del sistema ottico la coppia e, d è possibile determinare f, n ed h_1 tramite le leggi esposte precedentemente.

e (mm)	d (mm)	e' (mm)	d' (mm)	f (mm)	df/f	n	h₁ (mm)
470	276,1	408,5	204,53	70,9325 9	5.41 %	1,55193 2	-7,14206
340	136,1	400	213,2	-69,4226 9	5.25 %	1,56393 8	-7,08724
550	377,45	350	146,8	69,5939 9	5.3%	1,56254 9	-7,09354

L'incertezza su f è stata calcolata utilizzando la seguente formula, nella quale l'errore su e coincide con la precisione della scala graduata, mentre l'errore su d è del 2%:

$$\delta_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial e}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e'}\right)^2 \sigma_{e'}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d'}\right)^2 \sigma_{d'}^2}$$

Il valore di f_{best} si ottiene calcolando la media pesata, dal momento che ogni f ha un errore diverso;

$$\mathbf{f_{\text{best}} = 70 \pm 2 \text{ mm};}$$

Avendo tre valori per f derivati da tre differenti metodi si è calcolata la media pesata :

$$f_{\text{best}} = 71.02 \text{ mm}$$

$$\delta_f = 0.27 \text{ mm}$$

$$\mathbf{f_{\text{best}} = 71 \pm 0.3 \text{ mm}}$$

n_{best} e h_{best} sono stati calcolati da f_{best} ed il loro errore è stato ricavato dalla propagazione degli errori:

$$n_{\text{best}} = \frac{R}{f_{\text{best}}} + 1 = 1.551 \quad \delta_n = \sqrt{\left(-\frac{R_1}{f^2}\right)^2 \sigma_f^2 + \left(\frac{1}{f}\right)^2 \sigma_{R_1}^2} = 0.003$$

$$h_{best} = -\frac{S}{n_{best}} = -7.15 \quad \delta_h = \sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{S}{n^2}\right)^2 \sigma_n^2} = 0.01 \text{ mm.}$$

$$n_{best} = 1.551 \pm 0.003$$

$$h_{best} = -7.15 \pm 0.01 \text{ mm.}$$

LENTE DIVERGENTE

Seguendo quanto si è fatto nella trattazione della precedente lente si misura nuovamente con lo sferometro la quantità h (relativamente alla lente piano convessa);

h	3,4	3,4	3,4	3,4	3,42
(mm)	2	1	2	2	

$$h = 3,418 \pm 0,004 \text{ mm}$$

R_2 è dato dalla formula (calcolata nei valori medi di L , precedentemente trovato ed h)

$$R = \frac{L^2}{6h} + \frac{h}{2} = 63.23 \text{ mm}$$

mentre la relativa deviazione standard è ricavabile con le leggi di propagazione degli errori e risulta essere

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{2L}{6h}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(-\frac{L^2}{6h^2} + \frac{1}{2}\right)^2 \sigma_h^2} = 0.1 \text{ mm}$$

Utilizzando un calibro di precisione si misura lo spessore S della lente.

S	5	5	5,0	5	5,01
(mm)			1		

$$S = 5,004 \pm 0,001 \text{ mm}$$

Anche la lente piano-convessa è da considerarsi spessa, poiché

$$S / r = 5.004 / R_2 = 7.9 \%$$

Per misurare la distanza focale f_2 della seconda lente, di tipo piano-concava, si usa un opportuno sistema ottico caratterizzato da una distanza focale F positiva dato dall'accoppiamento della lente piano-convessa esaminata prima e dalla lente piano-concava da esaminare.

La distanza focale F è data da

$$1 / F = (n - 1)(1 / R_1 - 1 / R_2 + (n - 1)(s_1 + s_2) / (nR_1R_2))$$

dove R_1 è il raggio della lente piano-convessa ed R_2 è il raggio della lente piano-concava.

Poiché $1 / f_1 = (n - 1) / R_1$ e $1 / f_2 = - (n - 1) / R_2$ risolvendo in f_2 si ha

$$f_2 = \frac{F(nf_1 - (S_1 + S_2))}{n(f_1 - F)}$$

I metodi usati per studiare il sistema ottico sono gli stessi esposti precedentemente.

Metodo dell'ingrandimento

Misurando due ingrandimento G, G' e le relative distanze dell'oggetto dall'immagine x, x' è possibile ottenere F, n, h_1, h_2 ;

G	x (mm)	G'	x' (mm)	F (mm)	δ F/F	n (mm)	h₁ (mm)	h₂ (mm)
-0,7	355	-1	295	140	14,72 %	1,589	13,19	-21,31
-1,5	250,1	-1,2	276	155,4	37,91 %	1,536	13,81	-22,3
-0,8	344	-1,1	288	164,27	16,27 %	1,511	14,12	-22,81
-0,6	400	-1,4	257	150,15	6,13 %	1,589	13,19	-21,31

l'incertezza su F è stata calcolata utilizzando la seguente formula, dove l'errore percentuale di G e G' è il 3% e quello di x e x' è il 2%:

$$\delta_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial G}\right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial G'}\right)^2 \sigma_{G'}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 \sigma_{x'}^2}$$

Il valore di F_{best} si ottiene calcolando la media pesata, dal momento che ogni F ha un errore diverso;

$$F_{best} = 149.98 \text{ mm}$$

$$\delta_F = 7.94 \text{ mm}$$

$$F_{best} = 150 \pm 8 \text{ mm}$$

Metodo dei punti coniugati

Misurando tre copie di punti coniugati è possibile ottenere F, n, h_1, h_2 .
(Nella seguente tabella tutte le quantità sono espresse in mm).

x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_1''	x_2''	F	$\delta F/F$	n	h_1	h_2
24	386,	21	507,	32	281,	150,0		1,55	13,6056	
5	8	3	1	1	5	7	24,5 %	3	5	-21,97
32	302,	25	408,	21	567,	157,0	33,93	1,53	13,8704	
6	8	5	5	7	8	6	%	1	3	-22,4
35	248,	19	541,	29	288,		20,95	1,55	13,5585	
5	1	8	7	6	1	148,9	%	7	9	-21,9

L'incertezza su F è stata calcolata utilizzando la seguente formula, dove l'errore sulle distanze è del 2%:

$$\delta_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1'}\right)^2 \sigma_{x_1'}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2'}\right)^2 \sigma_{x_2'}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1''}\right)^2 \sigma_{x_1''}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2''}\right)^2 \sigma_{x_2''}^2}$$

Il valore di F_{best} si ottiene calcolando la media pesata, dal momento che ogni F ha un errore diverso;

$$F_{\text{best}} = 150.66 \text{ mm}$$

$$\delta_F = 21.72 \text{ mm}$$

$$F_{\text{best}} = 151 \pm 22 \text{ mm}$$

Metodo di Bessel

Misurando per due diverse configurazioni del sistema ottico la coppia di valori e,d è possibile ottenere F, n, h_1 , h_2 .

e (mm)	d (mm)	e' (mm)	d' (mm)	F (mm)	$\delta F/F$	n (mm)	h_1 (mm)	h_2 (mm)
713,5	246,9	683,4	194,6	156,47	6,5	1,533	13,85	-22,36
709	170,5	695	136,9	167,49	9,09	1,502	14,24	-22,99
685,1	236	649,7	170	159,11	4,16	1,525	13,94	-22,52
703,1	274,4	686,3	248,9	149,31	15	1,556	13,57	-21,92
709,8	263,6	675,6	207,3	153,54	6,4	1,542	13,74	-22,19
715	191	698,1	154	167,78	6,8	1,501	14,25	-23,01

L'incertezza su F è stata calcolata utilizzando la seguente formula, nella quale l'errore su e coincide con la precisione della scala graduata, mentre l'errore su d è del 2%:

$$\delta_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial e}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e'}\right)^2 \sigma_{e'}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d'}\right)^2 \sigma_{d'}^2}$$

Il valore di F_{best} si ottiene calcolando la media pesata, dal momento che ogni F ha un errore diverso;

$$F_{\text{best}} = 159.11 \text{ mm}$$

$$\delta_F = 4.19 \text{ mm}$$

$$\mathbf{F_{best} = 159 \pm 4 \text{ mm}}$$

Avendo tre valori per la quantità F derivati da tre differenti metodi si è calcolata la media pesata :

$$\mathbf{F_{best} = 157 \pm 4 \text{ mm}}$$

La distanza focale della lente divergente che compone il sistema ottico è data da

$$f_2 = \frac{F(nf_1 - (S_1 + S_2))}{n(f_1 - F)} = -110.171 \text{ mm}$$

$$\delta_f = \sqrt{\left(\frac{nf_1 - FS}{n(f_1 - F)}\right)^2 \sigma_F^2 + \left(\frac{F(S - nF)}{n(f_1 - F)}\right)^2 \sigma_{f_1}^2 + \left(-\frac{F}{n(f_1 - F)}\right)^2 \sigma_S^2 + \left(\frac{FS}{n^2(f_1 - F)}\right)^2 \sigma_n^2} = 2.311 \text{ mm}$$

$$\mathbf{f_{2best} = -110 \pm 2 \text{ mm}}$$

Da questa stima finale di f_2 è possibile ora calcolare i valori n , h_1 :

$$n_{best} = 1 - R_2 / f_{2best} = 1.5748$$

$$\delta_n = \sqrt{\left(\frac{R_2}{f_2^2}\right)^2 \sigma_{f_2}^2 + \left(-\frac{1}{f_2}\right)^2 \sigma_{R_2}^2} = 0.01$$

$$h_{best} = -\frac{S}{n_{best}} = -3.18 \text{ mm}$$

$$\delta_h = \sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_S^2 + \left(\frac{S}{n^2}\right)^2 \sigma_n^2} = 0.02 \text{ mm.}$$

$$\mathbf{n_{best} = 1.57 \pm 0.01}$$

$$\mathbf{h_{best} = -3.18 \pm 0.02 \text{ mm.}}$$

Velocità della luce

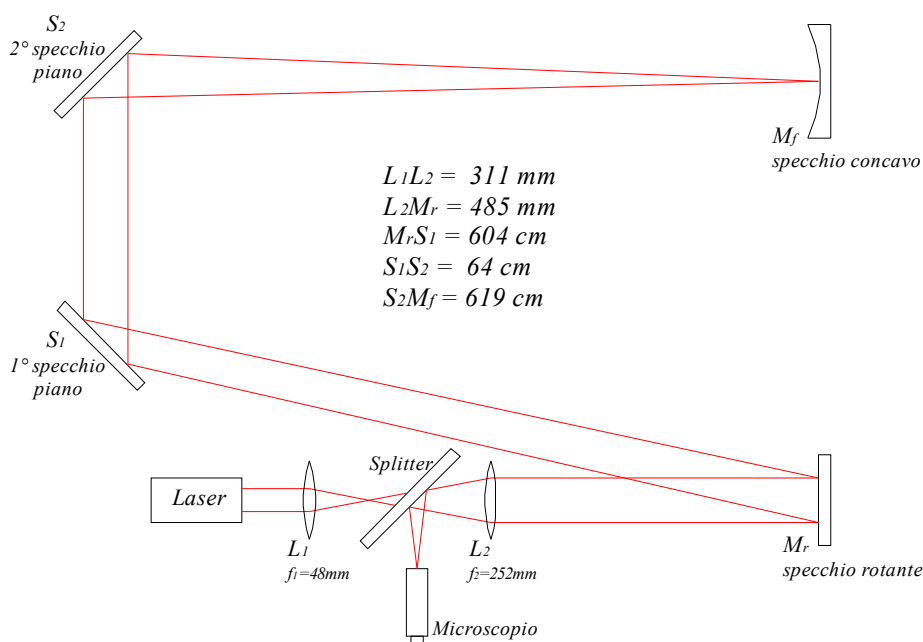
Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla determinazione della velocità della luce utilizzando il metodo di Foucault.

Procedura sperimentale

Nell'esperienza effettuato in laboratorio viene utilizzato un dispositivo simile a quello impiegato da Foucault, opportunamente modificato per essere adattato ad uno spazio ridotto.

La seguente figura mostra le principali componenti dello strumento e le dimensioni che lo caratterizzano.



Come sorgente luminosa si utilizza un laser in quanto tale sorgente è caratterizzata dall'emissione di un fascio di luce che possiede elevati caratteri di direzionalità, collimazione e brillantezza.

Il raggio di luce prodotto dal laser attraversa uno specchio semiriflettente (splitter) inclinato di 45° rispetto alla direzione del raggio e con la superficie semiriflettente rivolta dalla parte opposta rispetto alla sorgente luminosa. Tramite uno specchio rotante (M_r) il raggio viene riflesso in modo tale che, dopo aver percorso una distanza di quasi 13 metri, venga nuovamente riflesso lungo lo stesso percorso da uno specchio concavo (M_f). Per focalizzare il raggio laser sulla superficie di tale specchio si è fatto ricorso ad un sistema di due lenti sottili convergenti L_1 e L_2 , di distanza focale $f_1 = 48 \text{ mm}$ e $f_2 = 252 \text{ mm}$, sistemate rispettivamente prima e dopo lo splitter; la posizione di tali lenti rispetto allo splitter è determinata in base alla legge dei punti coniugati.

In questo modo il raggio incide di nuovo sullo specchio rotante dopo che quest'ultimo ha compiuto

una rotazione di un certo angolo, che è legato sia alla velocità angolare dello specchio stesso, sia alla velocità della luce.

Poiché nel percorso di ritorno il raggio incontra la superficie semiriflettente dello splitter viene deviato su un reticolo e, tramite un microscopio, è possibile misurare lo spostamento subito dal raggio luminoso per effetto della rotazione dello specchio.

Per misurare tale spostamento si prende nota della posizione della macchia luminosa sul reticolo in una situazione nella quale lo specchio ruota con velocità angolare iniziale ω_0 e, variando successivamente la velocità angolare, si misura la nuova posizione della macchia luminosa.

La velocità della luce è data infine da:

$$c = \frac{4AD^2(\omega - \omega_0)}{(D + B)\Delta s}$$

dove

$\omega = 2\pi f$ è la velocità angolare finale dello specchio rotante,

ω_0 quella iniziale,

$A = 263$ mm è la distanza tra le due lenti meno la distanza focale della prima lente,

$D = 12.87$ m è la distanza tra lo specchio rotante e lo specchio concavo,

$B = 485$ mm è la distanza tra la seconda lente e lo specchio rotante,

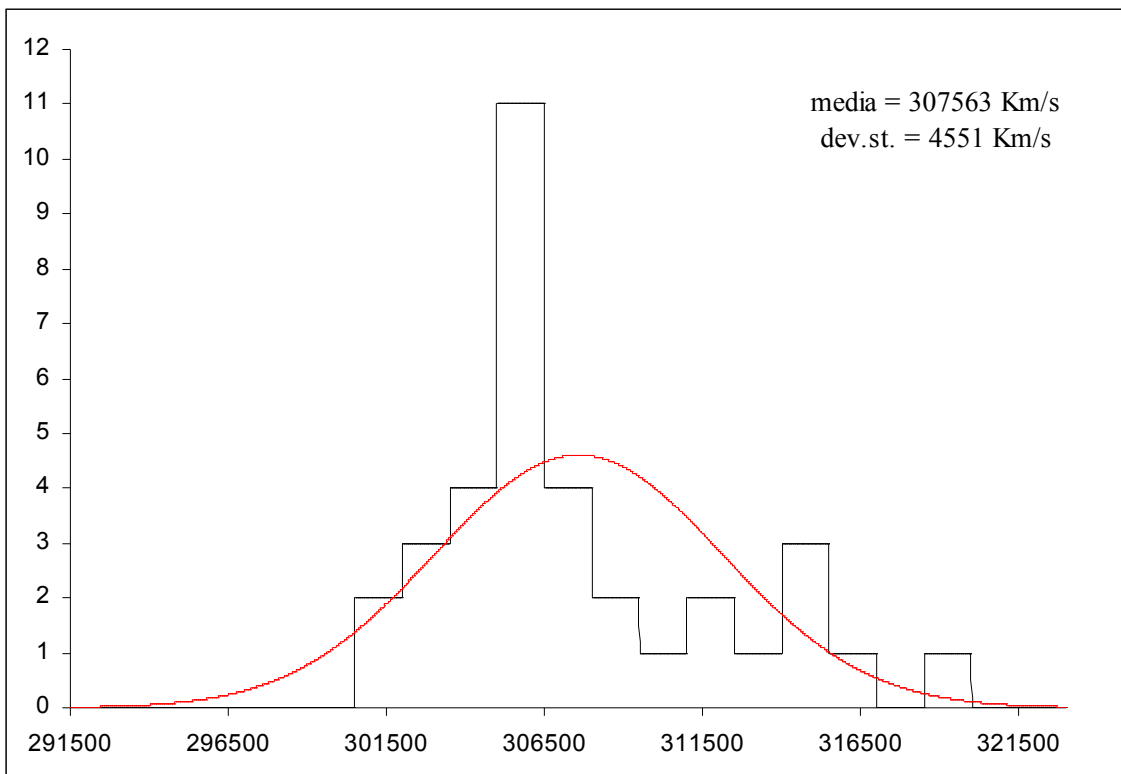
Δs è lo spostamento della macchia luminosa osservato nell'oculare del microscopio.

Nella seguente tabella sono riportati i dati raccolti:

f₀ (giri/s)	f (giri/s)	s₀ (mm)	s (mm)	c (Km/s)
151	945	11,81	12,02	309963
7	1489	11,78	12,16	319722
6	1502	11,775	12,16 5	314467
8	1492	11,78	12,17	311945
6	1491	11,78	12,17	312155
7	1492	11,78	12,16 5	316209
7	1509	11,765	12,16 5	307835
5	1504	11,77	12,16	315098
6	1506	11,78	12,17	315308
6	1495	11,78	12,17	312996
-1499	1499	11,365	12,17	305312
-1496	1503	11,365	12,16 5	307323
-1497	1482	11,36	12,16	305273
-1490	1490	11,355	12,16	303479
-1511	1505	11,36	12,17	305249
-1513	1504	11,36	12,16	309167
-1494	1505	11,37	12,17	307323
-1483	1504	11,37	12,17	306093
-1486	1504	11,375	12,17	308327
-1515	1511	11,36	12,17	306261

f₀ (giri/s)	f (giri/s)	s₀ (mm)	s (mm)	c (Km/s)
1527	-1517	12,23	11,41	304326
1523	-1519	12,23	11,41	304126
1503	-1520	12,22	11,41	305958
1512	-1518	12,23	11,41	302926
1502	-1524	12,225	11,40 5	302526
1519	-1510	12,23	11,40 5	300991
1524	-1523	12,23	11,41	304626
1504	-1528	12,22	11,41	306868
1488	-1530	12,22	11,41	305452
1516	-1528	12,23	11,41	304326
-9	-1517	11,82	11,41 5	305249
-6	-1528	11,83	11,41 5	300659
-6	-1535	11,89	11,48	305726
-8	-1537	11,89	11,48	305726
-10	-1539	11,89	11,48	305726

Nel grafico che segue è riportato l'istogramma delle misure raccolte e la gaussiana interpolante:



I valori ottenuti per la media e la deviazione standard sono:

$$c_{\text{medio}} = 307563 \text{ Km/s}$$

$$\sigma_c = 4551 \text{ Km/s}$$

da cui
$$c = 307600 \pm 770 \text{ Km/s}$$

Il risultato dista 10.1 deviazioni standard dal valore accettato $c_{\text{vero}} = 299792 \text{ Km/s}$ e chiaramente la probabilità di ottenere un simile valore è bassissima.

Per cercare di capire come si possa essere giunti ad un risultato sperimentale tanto cattivo (la media di c si discosta da quella vera del 2.6%) si osserva in primo luogo che tutte le misure raccolte rappresentano una sovrastima del valore accettato di c e dunque risulta evidente la presenza di errori sistematici; in pratica, come si può osservare nell'istogramma delle misure, si è ottenuta una distribuzione gaussiana traslata verso destra rispetto al valore vero di c .

Il primo passo per cercare di individuare quanto gli errori sistematici introdotti nella procedura sperimentale abbiano influito, è quello di sviluppare una formula dalla quale si possa stimare il contributo con cui ciascuna grandezza in gioco contribuisce all'incertezza di c .

Una stima massima dell'errore percentuale di c è data da

$$\frac{dc}{c} = \frac{dA}{A} + \frac{B}{(D+B)} \frac{dB}{B} + \left(2 - \frac{D}{(D+B)} \right) \frac{dD}{D} + \frac{d(\Delta\omega)}{\Delta\omega} + \frac{d(\Delta s)}{\Delta s}.$$

Le misure di lunghezza che compaiono nella formula per il calcolo di c introducono un errore trascurabile perciò risulta che l'incertezza su c deve essere introdotta principalmente dalla lettura della deviazione dello spot luminoso sul micrometro o dall'inefficienza del contagiri del motore elettrico.

La precedente formula può dunque venire approssimata con la seguente espressione

$$\frac{dc}{c} = \frac{d(\Delta\omega)}{\Delta\omega} + \frac{d(\Delta s)}{\Delta s}.$$

Per valutare i singoli termini della precedente formula si procede come segue.

Si considera che l'errore del contagiri sia unicamente dovuto alla precisione strumentale ($\sigma_{\omega} = 1$ giro/sec) dunque si trova che il contagiri può introdurre un errore dato da

$$\frac{d\Delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{\omega}}{\Delta\omega};$$

poiché come noto l'errore per $\Delta\omega = (\omega_0 - \omega)$ è dato da $d\Delta\omega = \sigma_{\Delta\omega} = (\sigma_{\omega_0}^2 + \sigma_{\omega}^2)^{1/2} = \sqrt{2}\sigma_{\omega}$ questo contributo oscilla tra 1.12% e 0.3%.

Con lo stesso ragionamento si trova che il micrometro può introdurre un errore dato da

$$\frac{d(\Delta s)}{\Delta s} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{\Delta s}}{\Delta s}$$

oscillante tra il 2.6% e lo 1.2% .

E' quindi evidente che l'errore maggiore sull'incertezza di c è dato dalla misura di Δs poiché una piccola imperfezione della vite micrometrica (quindi una piccola deviazione sul valore di Δs) può provocare una notevole deviazione nel risultato, mentre al contrario bisognerebbe ipotizzare un funzionamento del frequenzimetro alquanto inefficiente per spiegare un simile errore.

Tale deviazione potrebbe dunque essere provocata dalla vite micrometrica del microscopio che in questo caso tenderebbe a spostare sistematicamente i valori di c a destra del valore accettato.

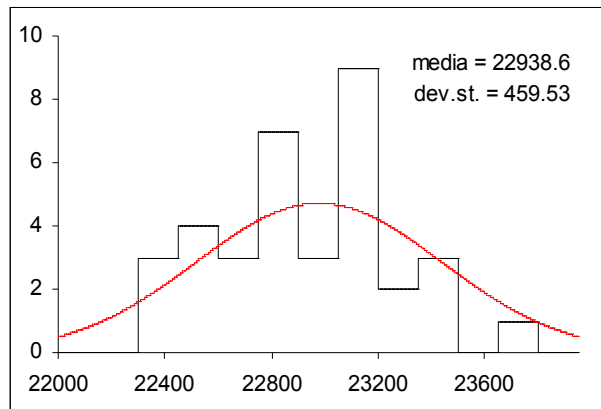
Per cercare di quantificare l'errore sistematico insito nelle misure si è fatto un tipo di ragionamento che, per motivi di chiarezza, viene esposto diviso in diversi passi:

1) si suppone che il coefficiente $\frac{4AD^2}{(D+B)} = 13.04754914 \cdot 10^{-6} \text{ Km}^2$ sia privo di errore ;

2) utilizzando il valore vero di c (299792 Km/s) si ricava che il valore vero per $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ è dato da

$$c / \frac{4AD^2}{(D+B)} = 22.97689 \cdot 10^9 \text{ (Km} \cdot \text{s)}^{-1} ;$$

- 3) si stima che gli l'errori casuali su $\Delta\omega$ e su $\Delta s'$ siano dati dalla media fra il limite superiore e limite inferiore delle incertezza che gravano sulle due quantità e sono rispettivamente 0.71% e 1.9% ;
- 4) l'errore percentuale di $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ è dato dalla somma in quadratura degli errori casuali di $\Delta\omega$ e su Δs e vale 2.03%;
- 5) si generano 35 numeri secondo una distribuzione gaussiana centrata sul valore vero di $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ con deviazione pari all'errore trovato nel precedente passo (l'istogramma riportato a lato mostra questa distribuzione gaussiana);
- 6) ad ogni valore della distribuzione di $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ viene aggiunto un errore percentuale costante ;
- 7) si moltiplica ogni valore di $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ per il coefficiente $\frac{4AD^2}{(D+B)}$ in modo da ottenere una distribuzione per i valori di c ;
- 8) si calcola la media dei valori di c e la si confronta con quella ottenuta dalla serie originale dei dati (valore originale $c = 307600 \text{ Km/s}$);
- 9) se i due risultati sono approssimativamente uguali si conclude il procedimento affermando che l'errore sistematico cercato è dato in buona approssimazione dall'errore introdotto su $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ nel punto 6; in caso contrario si riparte dal punto 6 utilizzando una nuova stima per l'errore percentuale costante.



Sostanzialmente, il procedimento illustrato, rappresenta il tentativo di portarsi, tramite una simulazione, in una condizione in cui si possa lavorare con la certezza di aver eliminato ogni possibile fonte di errori sistematici; in questo modo, dovendo considerare solamente errori casuali ed indipendenti, ci si aspetta che i valori raccolti seguano una distribuzione gaussiana.

Una volta che è stata ottenuta tale distribuzione è possibile quantificare gli errori sistematici osservando la traslazione della gaussiana teorica in relazione alla gaussiana sperimentale, cioè a livello operativo, si valuta la distanza che separa la media teorica dalla media sperimentale e si cerca quell'errore sistematico che porta la prima a coincidere con la seconda .

Attraverso questo procedimento si è ottenuto un errore sistematico del 2.8%.

Per ottenere dai dati sperimentali una nuova stima del valore della velocità della luce, è stato sottratto l'errore sistematico al rapporto $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ misurato in laboratorio e si è moltiplicato i valori così ottenuti per il coefficiente $\frac{4AD^2}{(D+B)}$.

I risultati ottenuti da questo procedimento sono:

$$c_{\text{medio}} = 298951 \text{ Km/s}$$

$$\sigma_c = 4423 \text{ Km/s}$$

da cui

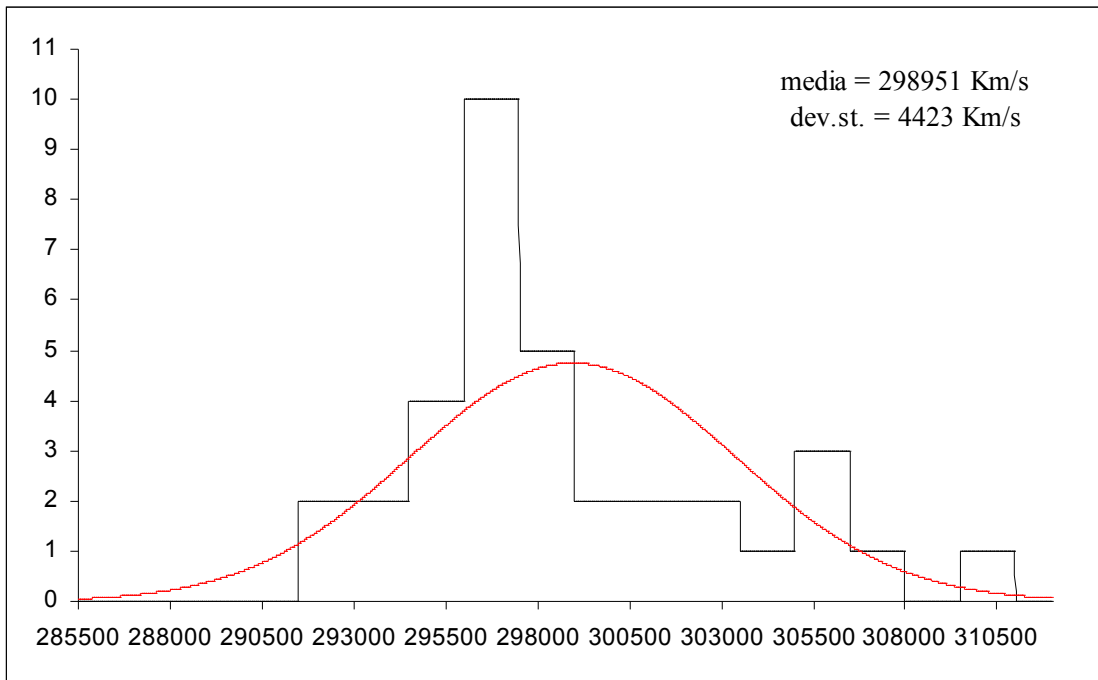
$$c = 299000 \pm 750 \text{ Km/s}$$

E' possibile ora studiare il livello di confidenza tra la miglior stima di c ottenuta sperimentalmente e il valore accettato ($c_{\text{vero}} = 299792 \text{ m/s}$):

$$t = \frac{|299000 - 299792|}{750} = 1.06;$$

la probabilità che una misura cada al di fuori di 1.06 o più deviazioni standard è circa 28.91%.

Il seguente istogramma mostra la distribuzione dei valori di c così ottenuti:



Conclusion

Sono state eseguite in laboratorio 35 misure della velocità della luce attraverso il metodo di Foucault, è stata calcolata la miglior stima di c e il relativo errore e si è verificato che il valore di c sperimentale non è compatibile col valore di c accettato, inoltre il fatto che tutte le misure di laboratorio sono sovrastimate porta a concludere che esiste un errore sistematico. Dopo aver quantificato l'errore indotto da $\Delta\omega$ e Δs si è supposto che l'errore sistematico sia stato introdotto dalla vite micrometrica poiché una cattiva misura del valore di Δs influisce maggiormente sulla misura di c . In seguito per quantificare l'errore sistematico, partendo dal presupposto che non si può essere sicuri se esso sia dovuto dalla vite micrometrica o dal frequenzimetro, si è eseguita una simulazione numerica, partendo dal valore vero della velocità della luce, producendo 35 misure del rapporto $\Delta\omega/\Delta s$ affetto da errore casuale. Introducendo in seguito un errore sistematico su queste misure virtuali in maniera da rendere la media di esse pressoché uguale alla media ottenuta in laboratorio, si è ottenuto per tale errore sistematico un valore del 2.8%.

Spettrometro a prisma

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla determinazione dell'indice di rifrazione del vetro Flint relativo all'aria in funzione della lunghezza d'onda e la verifica della legge di dispersione secondo la formula di Cauchy.

Apparato strumentale

Lampada a vapori di mercurio (spettro di emissione riassunto in tabella)

Prisma in vetro Flint (indice di rifrazione incognito)

Goniometro (precisione 1')

Colore	λ (nm)
Giallo1	579.1
Giallo2	577.0
Verde	546.1
Azzurro	491.6
Indaco	435.8
Violetto1	407.7
Violetto2	404.7

Tabella 1. Lunghezze d'onda

Procedura sperimentale

Per la determinazione dell'indice di rifrazione è stata utilizzata una lampada a vapori di mercurio, in quanto questo elemento è caratterizzato da uno spettro di emissione con righe intense e ben separate.

Per analizzare i raggi emergenti è stato adoperato uno spettrometro a prisma costituito da un prisma posto su due piattaforme girevoli, un collimatore (con fenditura) fisso ed un cannocchiale solidale con una piattaforma, che attraverso un goniometro consente di misurare gli angoli di deviazione dei raggi luminosi.

L'indice di rifrazione di un raggio luminoso con una determinata lunghezza d'onda (nota) è data dalla relazione:

$$n(\lambda) = \frac{\sin[(\alpha + \delta_m) / 2]}{\sin(\alpha / 2)} \quad (1)$$

dove α è l'angolo al vertice del prisma e δ_m è l'angolo di minima deviazione dei raggi luminosi.

Poiché la misura della angolo α non era nota a priori si è dovuto effettuare una stima di tale grandezza.

Per la determinazione di $n(\lambda)$ è dunque necessario misurare α e δ_m .

Misura dell'angolo α

Si fissa il cannocchiale in modo da formare un angolo acuto con il collimatore e successivamente si ruota il prisma fino a vedere l'immagine della fenditura riflessa verso il cannocchiale; dopo aver preso nota della posizione angolare del prisma (θ_1). Viene fatta quindi ruotare la piattaforma su cui è posto il prisma finché

la luce viene riflessa verso il cannocchiale dalla seconda faccia del prisma e si misura la nuova posizione angolare del prisma (θ_2).

L'angolo α è dato dalla relazione: $\alpha = 180^\circ - (\theta_2 - \theta_1)$

θ_1	θ_2	$\Delta\theta$	α
285°10'	165°13'	120°2'	59°58'
280°47'	160°45'	120°2'	59°58'
166°18'	286°19'	120°1'	59°59'
156°58'	277°	120°2'	59°58'
286°17'	166°19'	119°58'	60°2'

Tabella 2. Misura dell'angolo α

I nonii con cui sono stati misurati gli angoli consentono una precisione di 1' quindi la miglior stima di α è

$$\alpha = 59^\circ 59' \pm 1,4'$$

dove l'incertezza è stata calcolata tramite la propagazione degli errori.

Misura di δ_m

Si osserva con il cannocchiale l'immagine della fenditura rifratta dal prisma, scegliendo di volta in volta una differente riga dello spettro, si inizia quindi a ruotare il prisma inseguendo con il cannocchiale la riga dello spettro presa in esame finché la riga non inverte il senso del moto si prende nota della posizione angolare δ_1 (che dipende dalla lunghezza d'onda).

Infine, tolto il prisma dal supporto, si inquadra nel cannocchiale la posizione della fenditura (δ_0 taratura del goniometro). L'angolo δ_m è dato da

$$\delta_m = \delta_1(\lambda) - \delta_0 \quad (3).$$

Colori	Osservatori	$\delta_1(\lambda)$	δ_0	$\delta_m(\lambda)$	$n(\lambda)$	dn/n	$\bar{n}(\lambda)$	σ_n
Giallo1	OSS1	295°50'	236°10'	59°40'	1.7294	1.52%	1,73	0.015
	OSS2	295°51'	236°7'	59°44'	1.7299	1.51%		
	OSS3	295°50'	236°10'	59°40'	1.7294	1.52%		
Giallo2	OSS1	295°52'	236°10'	59°42'	1.7297	1.52%	1,73	0.015
	OSS2	295°53'	236°7'	59°46'	1.7300	1.51%		
	OSS3	295°52'	236°10'	59°42'	1.7297	1.52%		
Verde	OSS1	296°25'	236°10'	60°15'	1.7345	1.42%	1,735	0.014
	OSS2	296°25'	236°7'	60°18'	1.7349	1.41%		
	OSS3	296°26'	236°10'	60°16'	1.7346	1.41%		
Azzurro	OSS1	297°43'	236°10'	61°33'	1.7457	0.8%	1,746	0.008
	OSS2	297°41'	236°7'	61°34'	1.7459	0.79%		
	OSS3	297°40'	236°10'	61°30'	1.7453	0.83%		
Indaco	OSS1	299°41'	236°10'	63°31'	1.7622	0.61%	1,763	0.007
	OSS2	299°42'	236°7'	63°35'	1.7628	0.66%		
	OSS3	299°45'	236°10'	63°35'	1.7627	0.66%		
Violetto1	OSS1	301°10'	236°10'	65°	1.7743	1.36%	1,775	0.014
	OSS2	301°10'	236°7'	65°3'	1.7747	1.38%		
	OSS3	301°15'	236°10'	65°5'	1.7750	1.39%		
Violetto2	OSS1	301°22'	236°10'	65°12'	1.7759	1.41%	1,776	0.011
	OSS2	301°22'	236°7'	65°15'	1.7763	1.42%		
	OSS3	301°21'	236°10'	65°11'	1.7758	1.41%		

Tabella 3. Valori osservati

Per ognuna delle lunghezze d'onda sono state effettuate 3 misure dell'indice di rifrazione e ne è stato calcolato l'errore percentuale massimo tramite la seguente formula:

$$\frac{dn}{n} = \frac{\partial n}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{n} \cdot d\alpha + \frac{\partial n}{\partial \delta_m} \cdot \frac{1}{n} \cdot d\delta_m$$

dove per valutare $d\delta_m$ si è considerato che l'osservatore introduce un errore di un primo di grado che si aggiunge all'errore strumentale presente in ogni misura angolare.

Su queste tre misure e il loro errore è stato applicato il metodo delle medie pesate ottenendo la nuova stima e la nuova incertezza riportate rispettivamente nella penultima e nell'ultima colonna a destra.

Stima dei parametri di Cauchy

A questo punto è possibile verificare (calcolando l'indice di correlazione r) la validità della formula di Cauchy

$$n^2(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (4)$$

e calcolare i parametri di Cauchy A e B tramite le formule della regressione lineare. Come ben noto dalle formule del metodo dei minimi quadrati si ha:

$$A = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{\Delta}$$

$$B = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\Delta}$$

Dove è stato posto:

$$\Delta = N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2$$

il coefficiente di correlazione lineare è dato da:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2]^{1/2}}$$

Avendo assunto le medie di n come miglior valori per l'indice di rifrazione, il coefficiente di correlazione e le stime per A e per B sono stati calcolati a partire da questi valori trovando:

$$A = 2.834$$

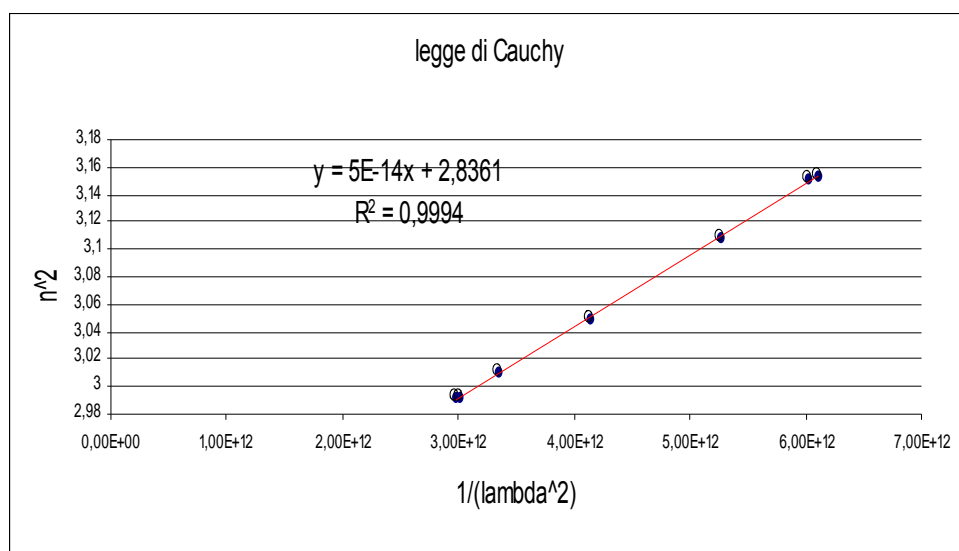
$$B = 52121 \text{ nm}^2$$

$$\sigma_A = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_B = 592.5 \text{ nm}^2$$

$$r = 0.99921 \text{ (???0.9997???)}$$

Nel grafico che segue sono riassunti i valori trovati interpolati tramite la legge di Cauchy.



Col coefficiente di correlazione è possibile calcolare qual è la probabilità che 7 misure che non siano legate da un andamento di tipo lineare diano un indice di correlazione maggiore o uguale a quello trovato (indicato con r_0 in questo caso):

$$P(|r| \geq r_0) < 0.1\%$$

La probabilità è molto esigua non vi è dunque motivo di dubitare della correttezza della legge di Cauchy che resta quindi verificata.

Spettrometro a reticolo

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla determinazione delle lunghezze d'onda delle componenti di un fascio luminoso emesso da una lampada a vapori di elio.

Materiale

Spettrometro a reticolo (sensibilità 1')

Lampada a vapori di sodio

Lampada a vapori di elio

Procedura sperimentale

Per la descrizione dello spettrometro e la sua regolazione e messa fuoco iniziale si veda la relazione dell'esperienza dello spettrometro a prisma.

- Posizionamento del reticolo

Il primo passo dell'esperienza consiste nel sistemare il reticolo perpendicolarmente al fascio luminoso, in modo da avere una distribuzione simmetrica dei massimi di intensità luminosa.

Osservando il decimo picco di intensità luminosa, si è proceduto per passi successivi fino a giungere a una precisione di mezzo primo di grado nella determinazione della condizione di perpendicolarità.

Queste sono le misure effettuate:

$$\begin{array}{l} 1^\circ \text{ passo} \left\{ \begin{array}{l} \text{destra } \phi = 36^\circ 28' \\ \text{sinistra } \phi = 35^\circ 45' \end{array} \right\} \\ 2^\circ \text{ passo} \left\{ \begin{array}{l} \text{destra } \phi = 36^\circ 50' \\ \text{sinistra } \phi = 35^\circ 31' \end{array} \right\} \\ 3^\circ \text{ passo} \left\{ \begin{array}{l} \text{destra } \phi = 36^\circ 09' \\ \text{sinistra } \phi = 36^\circ 01' \end{array} \right\} \\ 4^\circ \text{ passo} \left\{ \begin{array}{l} \text{destra } \phi = 36^\circ 06' \\ \text{sinistra } \phi = 36^\circ 07' \end{array} \right\} \end{array}$$

- Determinazione di δ

Successivamente, utilizzando una lampada al sodio (lunghezza d'onda nota $\lambda = 5890 \text{ \AA}$), si determina il passo del reticolo δ , indicante la distanza fra i centri di due fenditure successive; la formula usata è:

$$\delta = \frac{k\lambda}{\sin\phi}$$
 dove k è l'intero corrispondente al picco di intensità osservato e ϕ è l'angolo di osservazione.

Vengono riportati qui di seguito i dati raccolti:

k	ϕ	δ (mm)
1	36°	$9.9927 \cdot 10^{-3}$
0	07'	
7	24° 22'	$9.9933 \cdot 10^{-3}$
8	28° 07'	$9.9985 \cdot 10^{-3}$

$$\bar{\delta} = (9.995 \pm 0.003) \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

- Determinazione delle lunghezze d'onda della lampada a elio

Utilizzando la lampada a elio e la stima del passo del reticolo prima ottenuta, si prendono le misure delle posizioni angolari dei massimi di intensità luminosa sia a destra che a sinistra della posizione di riferimento (posizione in cui il fascio luminoso non subisce deviazione).

I colori sufficientemente luminosi che si è potuto osservare sono sette: porpora, rosso, giallo, verde, azzurro1, azzurro2 e indaco/viola.

Queste le misurazioni effettuate:

Colore	Direzione	K	ϕ	λ (Å)
Porpora (7065)	Destra	3	12° 17'	7088
		2	8°10'	7099
		1	4°06'	7146
	Sinistra	1	4°00'	6972
		2	8°05'	7027
		3	12° 12'	7040

$$\lambda = 7062 \pm 25 \text{ Å}$$

Colore	Direzione	K	ϕ	λ (Å)
Rosso (6678)	Destra	4	15°33'	6699
		3	11° 34'	6680
		2	7°44'	6725
		1	3°51'	6711
	Sinistra	1	3°44'	6595
		2	7°39'	6653
		3	11° 32'	6661
		4	15° 29'	6671

$$\lambda = 6674 \pm 14 \text{ Å}$$

Color e	Direzion e	K	ϕ	λ (Å)	
Giallo (5875)	Destra	1	36°	5882	
		0	03'		
		9	31°	5882	
			59'		
		8	28°	5878	
			04'		
		7	24°	5891	
			22'		
		6	20°	5875	
			39'		
		5	17°	5878	
			06'		
		4	13°	5883	
		37'			
	3	10°	5881		
		10'			
	2	6°46'	5888		
	1	3°23'	5899		
		Sinistra	1	3°22'	5869
				2	6°45'
			3	10°	5871
				09'	
			4	13°	5861
				34'	
			5	17°	5861
				03'	
			6	20°	5865
				37'	
			7	24°	5872
			17'		
		8	28°	5875	
			03'		
		9	31°	5868	
			54'		
		1	35°	5861	
		0	54'		

$$\lambda = 5875.7 \pm 2.3 \text{ \AA}$$

Color e	Direzion e	K	ϕ	λ (Å)
----------------	-------------------	----------	--------	---------------

Verde (5016)	Destra	5	14° 33'	5022
		4	11° 35'	5017
		3	8°41'	5030
		2	5°49'	5065
		1	2°53'	5028
	Sinistra	1	2°51'	4969
		2	5°44'	4992
		3	8°39'	5010
		4	11° 33'	5003
		5	14° 30'	5005

$$\lambda = 5014 \pm 8 \text{ \AA}$$

Colore	Direzione	K	ϕ	λ (Å)
Azzurro 1 (4921)	Destra	4	11° 23'	4932
		3	8°33'	4953
		2	5°40'	4935
		1	2°51'	4970
	Sinistra	1	2°48'	4882
		2	5°38'	4905
		3	8°27'	4895
		4	11° 20'	4910

$$\lambda = 4923 \pm 11 \text{ \AA}$$

Colore	Direzione	K	ϕ	λ (Å)
Azzurro 2 (4713)	Destra	4	10° 54'	4725
		3	8°12'	4752
		2	5°26'	4732
		1	2°44'	4766
	Sinistra	1	2°41'	4679
		2	5°22'	4674
		3	8°07'	4704
		4	10° 50'	4696

$$\lambda = 4716 \pm 12 \text{ \AA}$$

Colore	Direzione	K	ϕ	λ (Å)
	e			

Indaco/viola a (4471)	Destra	4	10° 21'	4489
		3	7°46'	4502
		2	5°09'	4486
		1	2°35'	4505
	Sinistra	1	2°33'	4447
		2	5°03'	4399
		3	7°41'	4454
		4	10° 17'	4460

$$\lambda = 4468 \pm 12 \text{ \AA}$$

Si può notare che per ogni lunghezza d'onda i dati trovati per la deviazione a destra sono tutti sovrastimati mentre quelli a sinistra sono sottostimati: questo fenomeno è causato dalla non perfetta perpendicolarità tra il fascio luminoso e il reticolo. Considerando le osservazioni fatte in una sola direzione è possibile quantificare come un piccolo errore nel posizionamento del reticolo possa influenzare la misura di λ . Supponendo che la precisione con cui è stata raggiunta la perpendicolarità tra il fascio luminoso e il reticolo sia di 0.5' allora per $\Phi = 8^\circ$, $K=2$ e $\lambda=7065$ (seconda riga porpora dell'elio) si avrà un errore percentuale $d\Phi/\Phi \cong 0.1\%$, che produce un errore percentuale sulla lunghezza d'onda pari a

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\Phi \cdot \cos \Phi}{\sin \Phi} \cdot \frac{d\Phi}{\Phi} = 5.2\%$$

quindi un errore anche molto piccolo sull'angolo di osservazione può influenzare molto la misura di λ . L'effetto di questa deviazione viene quindi limitato dalle misure eseguite nelle due direzioni

Infine per verificare la bontà delle misure effettuate è possibile misurare il grado di accordo tra le misure trovate in laboratorio e i valori veri. Nella tabella che segue vengono riassunti la distanza tra i valori medi trovati e i valori veri e il livello di confidenza.

Colore	$\lambda_{\text{vero}} (\text{\AA})$	$\lambda_{\text{sp}} (\text{\AA})$	$\sigma_{\bar{\lambda}} (\text{\AA})$	t	P(fuori $t\sigma$)
Porpora	7065	7062	25	0.12	90.45%
Rosso	6678	6674	14	0.29	77.18%
Giallo	5875	5875.7	2.3	0.3	76.42%
Verde	5016	5014	8	0.25	80.26%
Azzurro 1	4921	4923	11	0.18	85.72%
Azzurro 2	4713	4716	12	0.25	80.26%
Indaco	4471	4468	12	0.25	80.26%

Come si può notare dalle elevate probabilità ottenute, l'accordo tra le misure sperimentali e i valori veri è molto buono.

Interferometro di Michelson

Scopo dell'esperienza

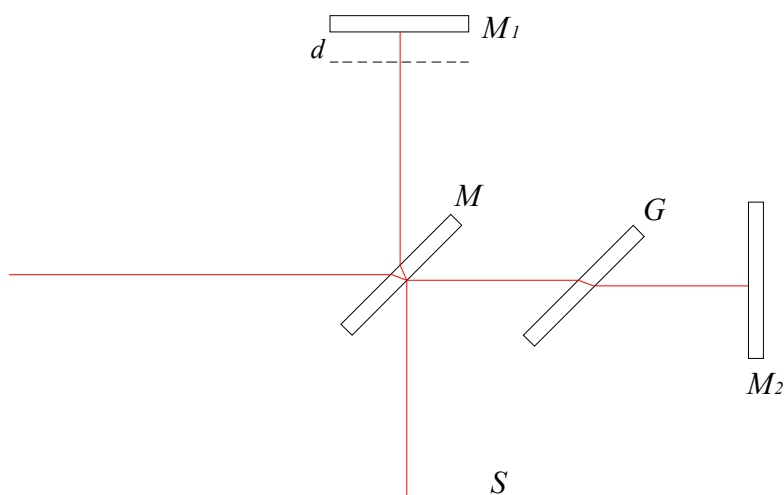
L'esperienza è finalizzata alla misura delle seguenti quantità:

- Lunghezza d'onda di un fascio di luce monocromatica He-Ne;
- Lunghezza dei pacchetti d'onda di una luce non monocromatica;
- Separazione tra le due righe del doppietto della luce gialla del sodio;
- L'indice di rifrazione dell'aria a pressione atmosferica.

Descrizione dell'apparato strumentale

Il principio di funzionamento dell'interferometro di Michelson è la scomposizione, tramite una superficie semiriflettente, di un singolo fascio luminoso in due fasci tra loro coerenti; successivamente tramite specchi, i due fasci vengono mandati su uno schermo dove è possibile osservare il fenomeno dell'interferenza.

Nel seguente disegno è rappresentato schematicamente l'interferometro.



L'interferometro di Michelson è costituito da due specchi piani M_2 , M_1 , il primo fisso ed il secondo mobile, da una lastra di vetro M avente una faccia semiriflettente e da una seconda lastra di vetro G , dello stesso spessore di M . Un fascio di luce proveniente dalla sorgente attraversa la lastra M e incide sulla faccia semiriflettente dividendosi in una parte riflessa verso M_1 ed in una parte trasmessa verso M_2 .

Dopo essere stati riflessi dagli specchi i due raggi tornano verso M : quello proveniente da M_1 , parzialmente trasmesso, e quello proviene da M_2 , parzialmente riflesso arrivano sullo schermo; essi sono coerenti in quanto ottenuti da una singola sorgente per divisione di ampiezza e dunque danno luogo a figure di interferenza.

La lastra di compensazione G serve a rendere la differenza dei cammini ottici dei due raggi uguale a $d = d_1 - d_2$, cioè alla differenza tra la lunghezza dei due bracci dell'interferometro.

Se i due specchi M_1 , M_2 sono in condizione di perpendicolarità, l'effetto osservato è equivalente all'interferenza di onde luminose su lamine sottili; in particolare, nel caso considerato, si ha a che fare con una lamina d'aria di spessore $d = d_1 - d_2$.

Procedura sperimentale

Un primo passo della procedura sperimentale consiste nel porre i due specchi M_1 e M_2 ortogonali tra di loro inviando un fascio di luce laser opportunamente dilatato dall'effetto di una lente divergente; se i due specchi non sono ortogonali le due macchie luminose generate non si sovrappongono perfettamente e questa configurazione è evidenziata dalla presenza di spicchi falciiformi di intensità ridotta ai bordi dell'immagine; si può dunque agire sulle viti micrometriche per cambiare l'assetto del sistema fino alla scomparsa di tali spicchi.

- Misura della lunghezza d'onda della luce laser

Inviando un fascio di luce laser e spostando lo specchio mobile M_2 si osserva un alternarsi di massimi e minimi di intensità luminosa a causa della variazione del cammino ottico. Affinché una frangia luminosa prenda il posto di un'altra frangia luminosa lo specchio mobile deve essere spostato di una lunghezza

$$\Delta x = \frac{1}{n_a} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

a cui corrisponde una variazione di cammino ottico pari a λ (n_a indice di rifrazione dell'aria); si possono quindi contare N massimi corrispondenti ad uno spostamento D dello specchio mobile e ottenere λ in funzione del numero di massimi contati e dello spostamento misurato:

$$\lambda = \frac{2n_a D}{N}$$

è inoltre possibile quantificare l'incertezza sulla lunghezza d'onda usando le regole di propagazione degli errori e imponendo che la sola grandezza indipendente soggetta ad errore sia lo spostamento D (errore che può essere posto uguale all'incertezza strumentale del nonio dello specchio mobile $\sigma = 1\mu\text{m}$):

$$\sigma_\lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial D} \right) \cdot \sigma_D = \frac{2n_a}{N} \cdot \sigma_D.$$

Nella tabella sono raccolti i dati di laboratorio.

N	2n _a	Δx (m ⁻⁵)	λ (Å)	σ _λ (Å)
200	~2.	6.3	6300	±100
200	~2.	6.2	6200	±100
157	~2.	5.	6369	±127
192	~2.	6.	6250	±104
188	~2.	6.	6382	±106
159	~2.	5.	6289	±125

Eseguendo la media sui valori di λ e calcolando la deviazione standard e la deviazione standard della media si giunge alla stima di λ

$$\lambda_{\text{best}} = 6298 \pm 28 \text{ \AA} \quad \sigma_{\lambda} = 69 \text{ \AA}$$

conoscendo il valore accettato per la lunghezza d'onda del laser (6328 Å) si possono confrontare i due valori e valutare il livello di confidenza:

$$t = \frac{|6298 - 6328|}{28} = 1.07$$

$$P(\text{fuori } 1.07\sigma) \approx 28.9\%$$

Ponendo il limite tra accettabilità e non accettabilità al 5% si può ritenere la misura della lunghezza d'onda buona.

Poiché per ogni valore λ osservato è stata già valutata un'incertezza si può procedere a valutare il miglior valore di λ col metodo delle medie pesate. In realtà questo metodo è anche il più corretto da utilizzare dal momento che per le varie misurazioni sono stati contati un numero di massimi differente (e visto che contando più massimi diminuisce l'errore) ogni set di dati ha un peso differente. Col procedimento delle medie pesate si trova:

$$\lambda_{\text{best}} = 6292 \pm 44 \text{ \AA}$$

$$t = \frac{|6292 - 6238|}{44} = 0.82$$

$$P(\text{fuori } 0.82\sigma) = 41.22\%$$

L'accordo con il valore accettato è reso così ancor più evidente.

- Indice di rifrazione dell'aria

Per la misura dell'indice di rifrazione è necessaria una cameretta cilindrica che permette al raggio luminoso di attraversare una regione di spazio in cui sia stato praticato il vuoto. Successivamente s'immette, attraverso una valvola a spillo, dell'aria nella cameretta, finché non si raggiunge nuovamente la pressione atmosferica. Durante questo processo (quello di immissione di aria nella cameretta) accade che viene alterato (con continuità) il cammino ottico percorso dal raggio luminoso. Tale variazione è espressa da

$$\Delta S = 2(n_a - 1)d$$

dove d è la lunghezza della cameretta. La relazione che lega il conteggio delle frange in un punto dello schermo alla variazione di cammino ottico, è data da

$$2(n_a-1)d=N_2\lambda$$

Nella tabella che segue sono riassunti i dati relativi all'indice di rifrazione dell'aria.

d (cm)	N₂	λ (Å)	n_a
5	42	6328	1.00026
5	43	6328	1.00027
5	42	6328	1.00026

È stato raccolto un numero esiguo di dati poiché per questa esperienza non si assiste ad un vero sparpagliamento dei valori.

Dai valori riportati in tabella si ottiene la stima per l'indice di rifrazione dell'aria:

$$n_{\text{best}}=1.000263 \pm 5.7 \cdot 10^{-6} \quad \sigma_n = \tilde{1}10^{-5}.$$

In tale procedura, però, si è supposta nota la lunghezza d'onda del raggio laser e si è assunto per essa il valore trovato nella prima parte dell'esperienza.

Una procedura più coerente è quella di impostare un sistema del tipo:

$$\begin{cases} 2 \cdot (n_a - 1)d = N_2 \cdot \lambda \\ 2n_a \cdot \Delta x = N_1 \cdot \lambda \end{cases}$$

procedendo in questo modo non viene più presa come nota la lunghezza d'onda della luce laser nell'esperimento per il calcolo dell'indice di rifrazione e, viceversa, non viene assunto come noto n_a nell'esperimento per il calcolo di λ .

Risolvendo il sistema lineare sopra riportato si ottiene:

$$\lambda = \frac{2d \cdot \Delta x}{N_1 d - N_2 \Delta x}$$

$$n_a = \frac{N_1 d}{N_1 d - N_2 \Delta x}$$

nella tabella che segue sono riportati i risultati calcolati attraverso questa nuova procedura.

Δx (m ⁻⁵)	N ₁	N ₂	λ (Å)	n _a
6.3	200	42	6302	1.000265
6.2	200	42	6202	1.00026
5.0	157	42	6371	1.000268
6.0	192	42	6252	1.000263
6.0	188	42	6385	1.000268
5.0	159	42	6291	1.000264
6.3	200	42	6302	1.000265
6.2	200	42	6202	1.00026
5.0	157	42	6371	1.000268
6.0	192	42	6252	1.000263
6.0	188	42	6385	1.000268
5.0	159	42	6291	1.000264
6.3	200	43	6302	1.000271
6.2	200	43	6202	1.000267
5.0	157	43	6371	1.000274
6.0	192	43	6252	1.000269
6.0	188	43	6385	1.000275
5.0	159	43	6291	1.000271

Da questi valori sono state nuovamente calcolate le migliori stime per n_a e λ .

$$\lambda_{\text{best}} = 6300 \pm 18 \text{ \AA} \quad \sigma_{\lambda} = 70 \text{ \AA}$$

$$t = \frac{|6300 - 6328|}{28} = 1.55$$

$$P(\text{fuori } 1\sigma) \approx 12.11\%$$

$$n_{a \text{ best}} = 1.000267 \pm 0.000001 \quad \sigma_n = 0.000004.$$

Per la lunghezza d'onda della luce laser si ha ancora un buon accordo tra il valore sperimentale e quello atteso.

- Misura della lunghezza dei treni d'onda di una sorgente non monocromatica

Qualora si facesse pervenire all'interferometro un fascio di luce non monocromatica (es. una lampada ad incandescenza) la figura di interferenza sullo schermo sarebbe ben differente dal caso della luce laser. La ragione di questa diversità di fenomeni risiede nel fatto che l'onda elettromagnetica del fascio laser è composto da un treno di lunghezza infinito e può essere pensato come una sinusoide che si propaga nel tempo e nello spazio con caratteristiche costanti; se si utilizza invece una lampada ad incandescenza la luce emessa è costituita da treni di lunghezza definita (dell'ordine del micron o delle decine di micron). Quando la distanza tra i due specchi dell'interferometro è minore della lunghezza del treno d'onda avviene che un certo treno d'onda interferisce (attraverso i processi di riflessione e trasmissione all'interno dell'interferometro) con se stessa, e così si può osservare una figura di interferenza sullo schermo; se, invece la distanza tra i due specchi è maggiore della lunghezza dei treni d'onda, allora sullo schermo si sovrappongono due treni diversi e, in quanto tali, non più coerenti dato che la fase cambia casualmente da un treno ad un altro (questo segue dal processo con cui vengono generate le onde elettromagnetiche), e poiché, come ben noto, per osservare il fenomeno dell'interferenza è necessario operare con fasci di luce coerenti, in questo secondo caso si osserva che lo schermo è uniformemente illuminato. Pertanto partendo da uno stato di luminosità uniforme e facendo diminuire la distanza tra i due specchi fino ad ottenere una

figura di interferenza molto netta, e poi proseguendo fino ad ottenere un nuovo stato di luminosità uniforme, lo specchio mobile si sposta di una lunghezza pari alla lunghezza dei treni d'onda; per cui indicando con L_p la lunghezza del treno d'onda si ha che vale la semplice relazione $L_p = \Delta x$.

Se poi si stanno trattando onde quasi monocromatiche (ottenibili ad esempio con dei filtri colorati) vale la formula:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{v_0} \approx \frac{\lambda_0}{L_p}$$

Il significato di questa relazione è che si stanno usando onde monocromatiche di lunghezza d'onda media λ_0 con ampiezza spettrale definita da $\Delta\lambda/\lambda_0$; la lunghezza del treno d'onda è data da

$$L_p = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

Nella tabella che segue sono raccolti i dati inerenti all'immissione di luce bianca e al caso di luce colorata con dei filtri.

Radiazione	1 ^a cond. uniformità	2 ^a cond. uniformità	L_p
Luce bianca	8.99 mm	8.91 mm	16 μm
	8.9 mm	8.99 mm	18 μm
Luce rossa	8.97 mm	8.90 mm	14 μm
	8.9 mm	8.96 mm	12 μm
Luce azzurra	8.88 mm	8.98 mm	20 μm
	8.88 mm	8.99 mm	22 μm

I risultati per la luce colorata sembrano in contrasto con i risultati prevedibili dalla formula per L_p ; infatti la luce rossa è caratterizzata da una lunghezza d'onda più lunga, tuttavia la lunghezza del treno d'onde è più corto rispetto a quelle della luce bianca e luce azzurra.

In realtà non si può dire che se la lunghezza d'onda è maggiore allora anche la lunghezza L_p deve essere maggiore poiché non si hanno informazioni riguardo la larghezza spettrale del treno d'onde (grandezza che dipende dalle caratteristiche del filtro); d'altro canto non è neppure possibile fare una previsione circa la larghezza spettrale poiché non si hanno informazioni neppure riguardo la lunghezza d'onda media del pacchetto.

Si può solamente osservare che mentre da un lato è vero che teoricamente all'aumentare della lunghezza d'onda aumenta la lunghezza del treno d'onda, d'altra parte si verifica (per la luce azzurra e rossa) che anche l'ampiezza spettrale $\Delta\lambda$ aumenta con la lunghezza d'onda, determinando una diminuzione di L_p .

- Misura della separazione tra le righe del doppietto del sodio

Lo spettro di emissione del sodio comprende due righe gialle molto intense distanziate di 6 Å ($\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$). Quando si invia la luce emessa dalla lampada al sodio all'interferometro di Michelson si può osservare una figura di interferenza molto intensa se i massimi di luminosità della prima riga coincidono con i massimi della seconda, mentre si osserva una situazione di luminosità pressoché uniforme se i massimi della prima riga coincidono con i minimi della seconda.

Si può dimostrare che per passare da una situazione in cui le frange di interferenza sono molto marcate a una situazione di luminosità uniforme bisogna incrementare la differenza di cammino ottico (attraverso lo specchio mobile) di una quantità

$$\Delta = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{[2(\lambda_2 - \lambda_1)]}$$

In laboratorio è stato misurato lo spostamento necessario per passare da una condizione di uniformità alla successiva m-esima condizione di uniformità; lo spostamento necessario per passare da una condizione di uniformità a quella successiva è due volte il calcolato sopra, per cui operando in questo modo si trova che la separazione tra le due righe del sodio è data da:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{m\lambda_1\lambda_2}{2\Delta x} \approx \frac{m\lambda^2}{2\Delta x}$$

in cui compare un fattore due invece di un fattore di divisione quattro, che si avrebbe lavorando sulle alternanze di figure di interferenza e condizioni di uniformità; λ è il valore medio delle lunghezze d'onda delle due righe gialle del sodio ($\lambda = 5893 \text{ \AA}$).

Ricordando che l'errore strumentale introdotto dal micrometro dello specchio mobile è di $1 \mu\text{m}$ si può quantificare l'incertezza su $\Delta\lambda$ attraverso le regole della propagazione degli errori:

$$\sigma_{\Delta\lambda} = \frac{m\lambda^2}{2\Delta x^2} \cdot \sigma_{\Delta x}$$

Δx (mm)	m	$\Delta\lambda \text{ m}^{-10}$	$\sigma_{\Delta\lambda} \text{ m}^{-10}$
0.866	3	6.015	0.007
1.06	4	6.55	0.006
0.862	3	6.043	0.007

Si può infine calcolare attraverso le regole delle medie pesate la miglior stima per $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda_{\text{best}} = 6.240 \pm 0.004 \text{ \AA}$$

Misure di campi magnetostatici

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla misura del campo di induzione magnetica nel piano mediano delle espansioni polari di un elettromagnete utilizzando il metodo di Felici. In particolare si determina la caratteristica $B(I)$ dell'elettromagnete e l'andamento del campo magnetico di fuga.

Apparato strumentale

Elettromagnete con struttura a H (dimensioni: altezza 26 ± 0.5 cm, larghezza 36 ± 0.5 cm, profondità 50 ± 0.5 cm, spessore giogo 4 ± 0.5 cm, larghezza giogo 13 ± 0.5 cm, traferro 31 ± 0.5 mm; numero di spire per bobina $N = 324$)

Sonda (bobina rotante) (precisione 1 Gauss)

Generatore

Amperometro (precisione: 0.01 A)

Procedura sperimentale

Per la determinazione della caratteristica dell'elettromagnete viene misurato, per mezzo della sonda, il campo di induzione magnetica nel centro delle espansioni polari al variare dell'intensità di corrente. Il principio di funzionamento della sonda si basa sulla legge di Felici che deriva direttamente dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz. Quando il campo magnetico concatenato con la bobina varia, in essa fluisce una corrente i

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

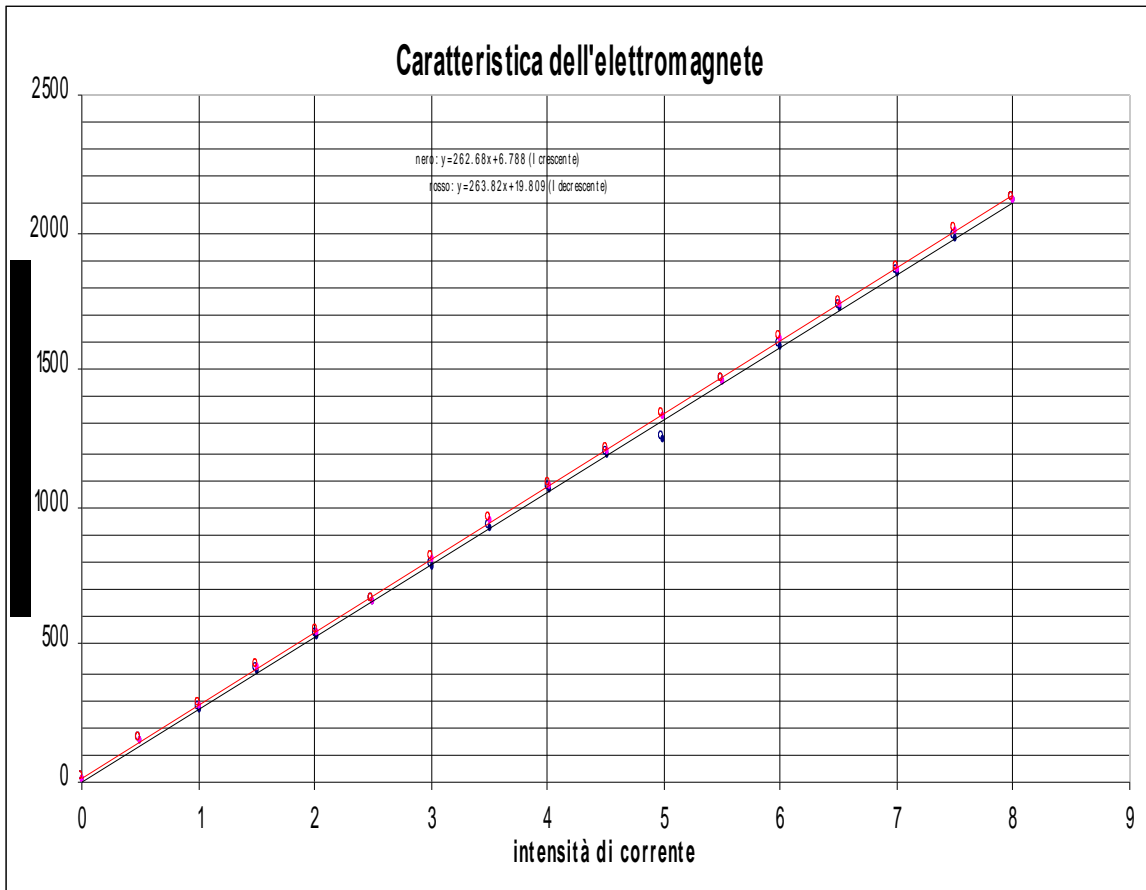
quindi nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 in cui la bobina viene capovolta, essa è attraversata da una carica q data da

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_2}^{\Phi_1} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Il valore del campo magnetico è ottenuto tramite un flussometro che elabora il valore della corrente indotta.

Nelle misure effettuate prima si aumenta l'intensità di corrente nelle bobine dell'elettromagnete fino al valore massimo consentito; successivamente si varia la corrente dal valore massimo allo zero.

In tabella sono riportate nella seconda e nella terza colonna i valori di B rispettivamente per I crescente e decrescente.



I (A)	B↑ (Gauss)	B↓ (Gauss)
0	19	21
0.5	149	156
1	268	283
1.5	402	416
2.01	531	543
2.5	660	663
3	793	820
3.5	926	952
4.01	1061	1081
4.5	1190	1212
4.99	1256	1332
5.5	1457	1460
6	1587	1610
6.5	1725	1737
7	1855	1863
7.5	1986	2005
8	2115	2125

Si osserva che la caratteristica dell'elettromagnete ha un andamento lineare. Tramite il metodo dei minimi quadrati ($y = A + Bx$) sono stati ottenuti i seguenti risultati:

I crescente:

- $A = 6.788$ Gauss
- $B = 262.676$ Gauss/A
- $\sigma_A = 8.023$ Gauss
- $\sigma_B = 1.71$ Gauss/A
- $r = 0.9997$

I decrescente:

- $A = 19.809$ Gauss
- $B = 263.818$ Gauss/A
- $\sigma_A = 3.405$ Gauss
- $\sigma_B = 0.726$ Gauss/A
- $r = 0.9999$

Il coefficiente di proporzionalità k' ($B = k'I$) ricavato tramite la legge approssimata di Hopkinson è:

$$k' = \mu_0 N / h = 262.678 \text{ gauss/A} \quad \text{dove } h \text{ è l'apertura del tra ferro}$$

mentre i valori di k ottenuti sperimentalmente sono:

$$k \uparrow = 262.7 \pm 1.7 \text{ Gauss/A (I crescente)}$$

$$k \downarrow = 263.8 \pm 0.7 \text{ Gauss/A (I decrescente)}$$

Benché entrambi i risultati siano confrontabili con il valore ottenuto dalla legge di Hopkinson, quello ricavato per I decrescente è leggermente sovrastimato a causa della presenza di una magnetizzazione residua dell'elettromagnete.

I valori di k riportati sopra sono però valori approssimati: infatti la legge di Hopkinson non tiene conto della riluttanza del ferro. Questo problema può essere superato usando le leggi dei circuiti magnetici per le quali si ha:

$$\Phi(B) \left[\frac{h}{\mu_0 S_p} + \frac{L_p}{\mu_0 \mu_r S_p} + \frac{L_g}{2\mu_0 \mu_r S_g} \right] = NI$$

dove si è indicato con L_p e S_p la lunghezza e la sezione delle espansioni polari, mentre con L_g e S_g la lunghezza di una linea mediana passante nel giogo di ferro e la sezione del giogo stesso infine con μ_r è stata indicata la permeabilità relativa del ferro con cui è stato costruito l'elettromagnete per questo coefficiente è stato valutato il valore attraverso dei grafici specifici e si assume che valga circa 1.3610^4 .

Per la riluttanza del ferro è stato trovato:

$$\frac{L_p}{\mu_0 \mu_r S_p} + \frac{L_g}{2\mu_0 \mu_r S_g} = 1749.9 H^{-1}$$

dove l'incertezza è stata calcolata con le consuete regole della propagazione degli errori.

Per il traferro è stata invece trovata:

$$\frac{h}{\mu_0 S_p} = 379523.32 \pm 6121 H^{-1}$$

Quindi il nuovo valore di k è dato da:

$$k = \frac{N}{\left[\frac{h}{\mu_0 S_p} + \frac{L_p}{\mu_0 \mu_r S_p} + \frac{L_g}{2\mu_0 \mu_r S_g} \right] \cdot S_p} = 261.15 \frac{\text{Gauss}}{A}$$

Il valore di k ottenuto sperimentalmente si avvicina di più a quello ricavato dall'approssimazione di Hopkinson, mentre il valore che si ottiene con la relazione non approssimata è leggermente discorde. In particolare si osserva che il valore sperimentale è sovrastimato; ciò può essere spiegato considerando che la caratteristica dell'elettromagnete dipende oltre che dalla corrente I che lo stimola ad un dato momento anche dalla cosiddetta storia del materiale di cui è costituito.

Misura del campo di fuga.

Come noto l'ipotesi che il campo magnetico si estenda unicamente sulla sezione delle espansioni polari del traferro vale solo nell'approssimazione in cui l'altezza h del traferro stesso sia piccola rispetto alle dimensioni trasversali del magnete. Il campo infatti si estende oltre tale superficie e decresce rapidamente allontanandosi dal centro del traferro.

L'andamento di B è descritto da una formula semiempirica del tipo

$$B(x) = B_0 / [1 + e^S]$$

dove B₀ rappresenta il campo magnetico al centro del traferro mentre per S vale la relazione :

$$S = c_0 + c_1[x - (L_g + \delta)]/h + c_2[x - (L_g + \delta)]^2/h^2 + c_3[x - (L_g + \delta)]^3/h^3$$

Dove x è la distanza tra il centro del traferro e il punto in cui si vuole calcolare il campo, L_g la larghezza delle espansioni polari e δ un parametro variabile tra 0.6h e 0.7h.

Nella descrizione di un campo di fuga è molto utile introdurre il concetto di lunghezza fisica definita da:

$$L_{fx} = (1/B_0) \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$$

la lunghezza fisica definisce un magnete ideale di dimensione L_{fx} lungo l'asse delle x tale che il campo di induzione magnetica vale B₀ per x compreso nella lunghezza fisica e 0 all'esterno.

Analogamente si introduce la sezione fisica definita da

$$S_f = (1/B_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$$

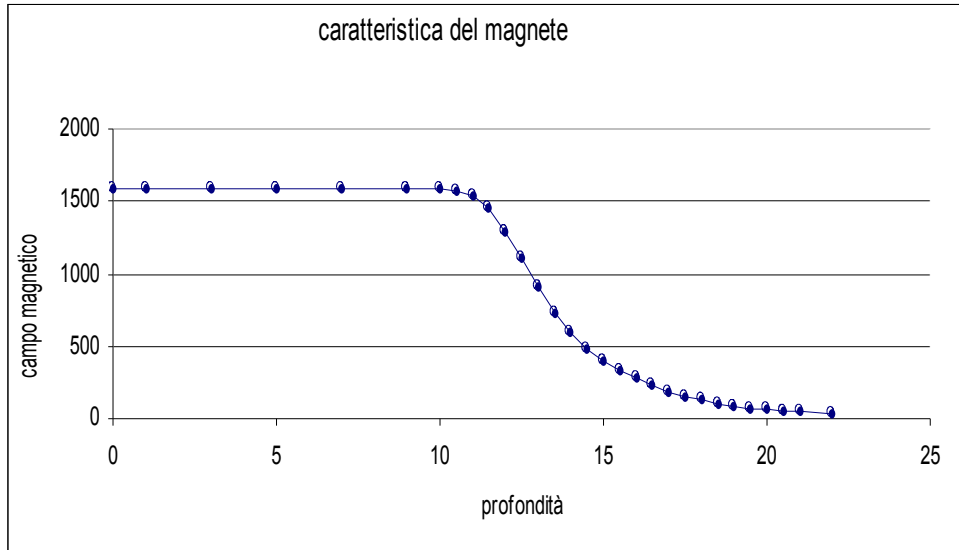
in laboratorio si è proceduto nella misura del campo magnetico in posizioni via via più esterne in un quadrante del traferro per poter misurare le lunghezze fisiche (per espansioni polari rettangolari) e della relativa sezione fisica.

Nella tabella che segue sono stati raccolti i valori di B in un quadrante dell'elettromagnete

Profondità \ Larghezza	0	2	4	6	7.5	8.5	9.5	10.5
0	159 5	159 1	159 5	156 0	131 5	899	580	374
1	159 0	159 3	159 4	156 0	131 6	901	580	374
3	158 8	159 5	159 5	156 1	131 7	900	581	374
5	159 4	159 3	159 4	156 4	131 8	901	579	374
7	159 1	159 2	159 3	156 1	131 9	900	578	374
9	159 1	158 0	159 2	156 3	131 3	900	578	357
10	158 4	158 6	158 9	155 1	129 3	861	539	340
10,5	156 9	157 3	156 7	152 2	124 9	823	515	326
11	153 5	153 6	153 9	149 2	120 2	785	491	311
11,5	145 2	145 6	145 1	139 9	109 5	715	453	291
12	129 6	131 8	129 7	124 6	951	634	412	270
12,5	110 5	111 5	110 1	102 4	801	543	370	247
13	901	902	905	821	641	463	326	223
13,5	729	735	727	649	517	390	285	197
14	594	593	580	523	424	330	246	177
14,5	480	489	484	426	344	280	214	155
15	397	397	392	342	284	238	183	134
15,5	327	330	326	286	239	197	156	116
16	274	271	262	231	196	163	131	100
16,5	227	227	220	193	164	137	111	85
17	190	185	178	157	133	113	93	72
17,5	157	154	149	131	111	95	78	61
18	128	128	121	107	91	78	65	51
18,5	107	106	101	89	76	65	54	43
19	89	88	83	72	63	53	45	36
19,5	73	72	69	60	53	44	37	30
20	61	60	56	49	45	36	31	25
20,5	51	50	46	40	36	30	25	21
21	42	44	38	33	29	25	21	17
22	30	31	29	23	20	17	15	12

Dai dati è inoltre possibile dedurre che il magnete in questione è caratterizzato da un campo di fuga short tail: in questo caso il campo di fuga dovrebbe annullarsi ad una distanza dal bordo delle espansioni polari di circa 3-4 h (dove h rappresenta l'altezza del traferro). Per i dati inerenti la profondità si trova infatti che il bordo si trova a 12.5 cm dallo zero, 3-4 volte h corrisponde a circa 9.3-12.4 cm, e come si può notare a 22cm

dallo zero il valore del campo magnetico è già molto basso (è diminuito del 98.12% rispetto al valore dello zero).



L'integrale per il calcolo della lunghezza fisica fornisce un risultato del tipo:

$$L_{fx} = L_{gx} + (1.2-1.4)h$$

che per una fissata lunghezza del giogo si minimizza nel caso di campo short tail.

Nel caso di laboratorio si trova per la lunghezza fisica di larghezza (L_{fx}) e per la lunghezza fisica di profondità (L_{fy}):

$$L_{fx} = 13 + 1.23 \cdot 1 = 16.72 \text{cm};$$

$$L_{fy} = 50 + 1.23 \cdot 1 = 53.72 \text{cm}.$$

L'errore sulle dimensioni fisiche si calcola dalla propagazione delle incertezze trovando:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{gx}^2 + (1.2\sigma_h^2)} = 0.5 \text{cm}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{gy}^2 + (1.2\sigma_h^2)} = 0.5 \text{cm}$$

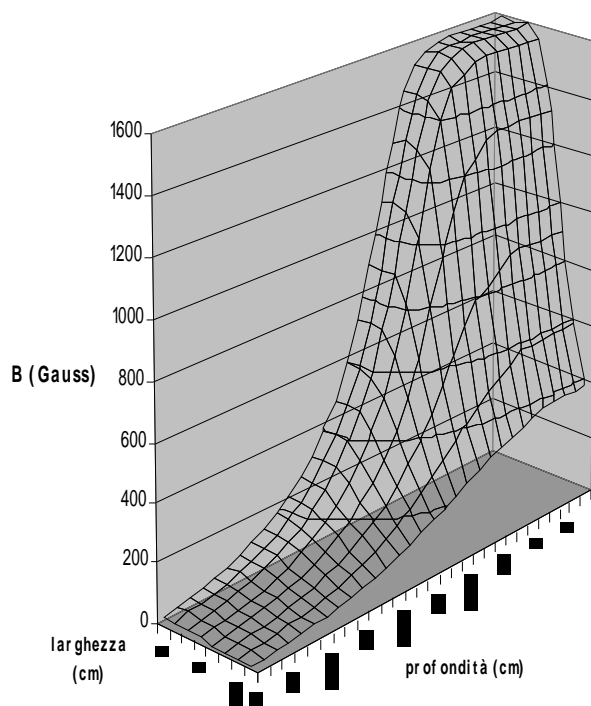
nota (da togliere): tutto questo discorso è stato fatto dalla deduzione non quantificata che il campo è short tail e assumendo a priori l'1.2 che compare nel calcolo delle dimensioni fisiche; forse va rivista.

Si può infine calcolare la sezione fisica e la sua incertezza trovando:

$$S_f = 898 \pm 28 \text{ cm}^2$$

Nel grafico che segue viene rappresentato l'andamento del campo magnetico nelle due variabili e sono inoltre riportate delle linee di isocampo.

Campo di fuga



Pendolo di rotazione

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla misura della frequenza, del coefficiente di smorzamento e alla determinazione della curva di risonanza.

Apparato strumentale

Pendolo di rotazione con scala graduata (precisione: 0.1);
generatore di corrente continua (precisione: 0.01 A);
motore elettrico con biella;
cronometro (precisione: 1/100 s);
smorzatore (elettrocalamita);

Descrizione dei moti oscillatori

- Oscillazioni libere

Il pendolo è costituito da un disco che, se allontanato dalla posizione di equilibrio, subisce ad opera di una molla un momento di richiamo

$$\tau_1 = -k_1\theta \quad (\text{dove } k_1 \text{ è la costante elastica della molla e } \theta \text{ è lo spostamento angolare}).$$

L'equazione del moto è:

$$\mathbf{I} \frac{d^2\theta}{dt^2} + k_1\theta = 0 \quad (\text{dove } I \text{ è il momento d'inerzia) la cui soluzione è:}$$
$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{con } \omega_0 = (k_1/I)^{1/2}$$

- Oscillazioni forzate

Quando si aziona il motore, la biella agisce sulla molla con un momento

$$\tau_2 = k_1 (\Delta\theta/2) \sin(\omega t) = k_2 \sin(\omega t) \quad (\text{dove } \omega \text{ è la velocità angolare del motore});$$

si ha in questo caso un moto oscillatorio forzato la cui equazione del moto è:

$$\mathbf{I} \frac{d^2\theta}{dt^2} + k_1\theta = k_2 \sin(\omega t) \quad \text{la cui soluzione è data da:}$$
$$\theta = A \sin(\omega_0 t + \phi) + B \sin(\omega t) \quad (\text{dove } A \text{ e } \phi \text{ sono determinati dalle condizioni iniziali, mentre si ha}$$
$$B = k_2 / [I(\omega_0^2 - \omega^2)])$$

In pratica però sono presenti attriti, perciò si ha $A = A_0 e^{-\gamma t}$, e quindi, in condizioni stazionarie l'equazione del moto diviene:

$$\theta = [k_2 \sin(\omega t)] / [I(\omega_0^2 - \omega^2)] \text{ da cui:}$$

$$\text{- se } \omega \ll \omega_0 \text{ si ha } \theta = (\Delta\theta/2)\sin(\omega t)$$

$$\text{- se } \omega \gg \omega_0 \text{ si ha } \theta = k_2 \sin(\omega t - \pi) / I\omega^2 \text{ cioè lo spostamento è in ritardo di } \pi \text{ rispetto}$$

alla forza e l'ampiezza è molto contenuta

$$\text{- se } \omega \rightarrow \omega_0 \text{ l'ampiezza tende a crescere indefinitamente (il sistema entra in risonanza).}$$

- Oscillazioni smorzate

Quando invece l'elettrocalamita è attraversata da una certa intensità di corrente continua, il disco è sottoposto a un momento frenante dovuto alle correnti parassite che circolano nella parte del disco che si trova nel traferro dell'elettrocalamita

$\tau_3 = -(\alpha/3) B^2 (R_2^3 - R_1^3) d\theta/dt = -k_3 d\theta/dt$ (dove R_1 e R_2 sono i raggi del disco, B è il campo di induzione magnetica nel traferro e α è un coefficiente di proporzionalità che dipende dalla resistività del materiale che costituisce il disco);

si ha in questo caso un moto oscillatorio smorzato la cui equazione del moto è:

$$d^2\theta/dt^2 + 2\gamma d\theta/dt + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{con } \gamma = k_3/2I \text{ e } \omega_0^2 = k_1/I$$

si possono avere tre tipi di moto al variare di $\Delta = \gamma^2 - \omega_0^2$:

10) Moto sovrasmorzato ($\Delta > 0$): $\theta = A e^{-(\gamma+\delta)t} + B e^{-(\gamma-\delta)t}$ con $\delta = \Delta^{1/2}$ (moto aperiodico)

11) Smorzamento critico ($\Delta = 0$): $\theta = e^{-\gamma t} [A + Bt]$ (moto aperiodico critico)

12) Moto sottosmorzato ($\Delta < 0$): $\theta = A e^{-\gamma t} \sin(\delta t + \phi)$ (oscillazioni smorzate con frequenza $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$).

- Oscillazioni forzate con smorzamento

Infine, quando sono in funzione sia il motore che l'elettrocalamita, si ha un moto oscillatorio forzato con smorzamento, la cui equazione è:

$I d^2\theta/dt^2 + k_3 d\theta/dt + k_1\theta = k_2 \sin(\omega t)$ la cui soluzione in condizioni stazionarie è data da:

$$\theta = (k_2 / I) [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{-1/2} \sin(\omega t + \phi)$$

in questo caso l'ampiezza non può diventare infinita e per $\omega = \omega_0$ si ha:

$$\theta_{\text{ris}} = k_2 / (2I\gamma\omega_0)$$

Procedura sperimentale

-Determinazione della frequenza naturale:

Si misura con un cronometro il tempo impiegato dal pendolo per il compimento di un numero N di oscillazioni complete, la frequenza è data da $\nu = 1/T = N/\Delta t$. I dati raccolti sono relativi a 15 oscillazioni con ampiezza 7

Δt (s)	29.4	29.44	29.4	29.38	29.45	29.44	29.29	29.33	29.43	29.41
----------------	------	-------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

$$\overline{\Delta t} = 29.4 \pm 0.05 \text{ s}$$

$$\nu = 0.5102 \text{ Hz}$$

$$\sigma_\nu = \frac{\partial \nu}{\partial \Delta t} \sigma_{\Delta t} = \frac{N}{\Delta t^2} \sigma_{\Delta t} = 0.0009 \text{ Hz}$$

Per valutare se il periodo di oscillazione varia in funzione dell'ampiezza, sono state raccolte le seguenti misure con ampiezza 18

Δt (s)	29.3	29.35	29.32	29.29	29.32	29.36	29.31	29.28	29.38	29.26
----------------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

$$\overline{\Delta t} = 29.32 \pm 0.04 \text{ s}$$

$$\nu = 0.5116 \text{ Hz}$$

$$\sigma_\nu = \frac{\partial \nu}{\partial \Delta t} \sigma_{\Delta t} = \frac{N}{\Delta t^2} \sigma_{\Delta t} = 0.0007 \text{ Hz}$$

Avendo due stime per la frequenza naturale, è possibile calcolarne la media pesata per ottenere il valore

migliore:

$$\nu = 0.5111 \pm 0.0005 \text{ Hz}$$

-Determinazione del coefficiente di smorzamento

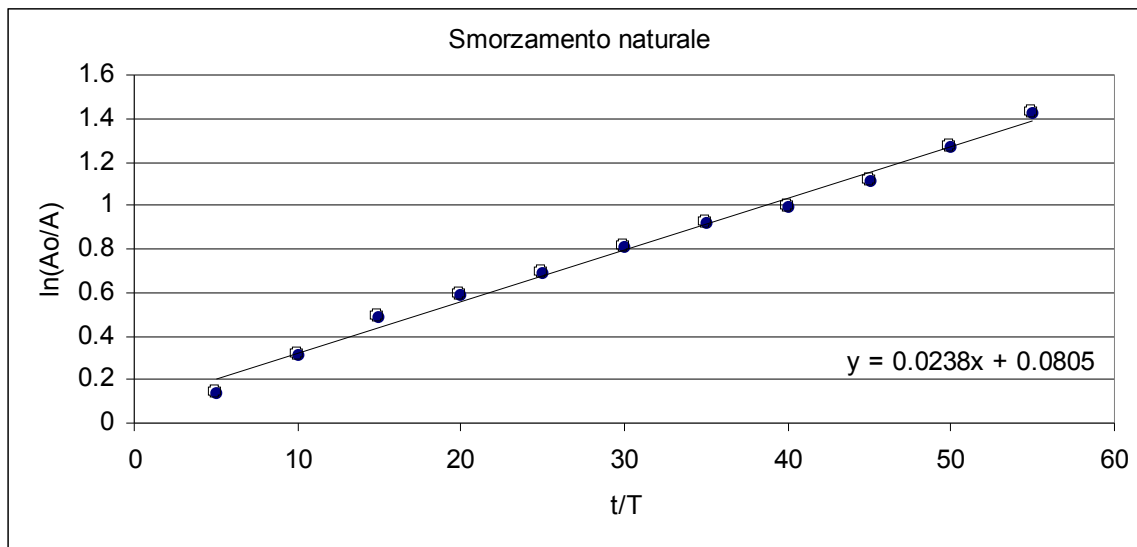
Si determina inizialmente il coefficiente di smorzamento dovuto all'attrito dell'aria, del perno, del campo magnetico terrestre e del campo magnetico residuo dell'elettrocalamita.

Trattandosi di un moto debolmente smorzato, si è misurata l'ampiezza massima di oscillazione ogni cinque periodi.

Dalla soluzione dell'equazione che descrive il moto sottosmorzato si nota che l'ampiezza decresce in modo esponenziale, quindi, dalla pendenza della retta ($y = A + Bx$) che si ottiene graficando $\ln[A_0/A(t)]$ in funzione del tempo, si ricava con il metodo dei minimi quadrati il coefficiente di smorzamento γ .

(Ampiezza iniziale $A_0 = 17$)

t/T	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
A	14.8	12.4	10.4	9.4	8.5	7.6	6.8	6.3	5.6	4.8	4.1



Sono stati trovati i seguenti valori:

$$A = 0.08 \pm 0.02$$

$$B = 0.0238 \pm 0.0007$$

Il coefficiente angolare B della retta che interpola i dati risulta essere $\gamma T = \gamma/\nu$; quindi il coefficiente di smorzamento è dato da $B\nu$ e applicando le consuete regole di propagazione degli errori è

possibile determinare l'incertezza del coefficiente di smorzamento γ :

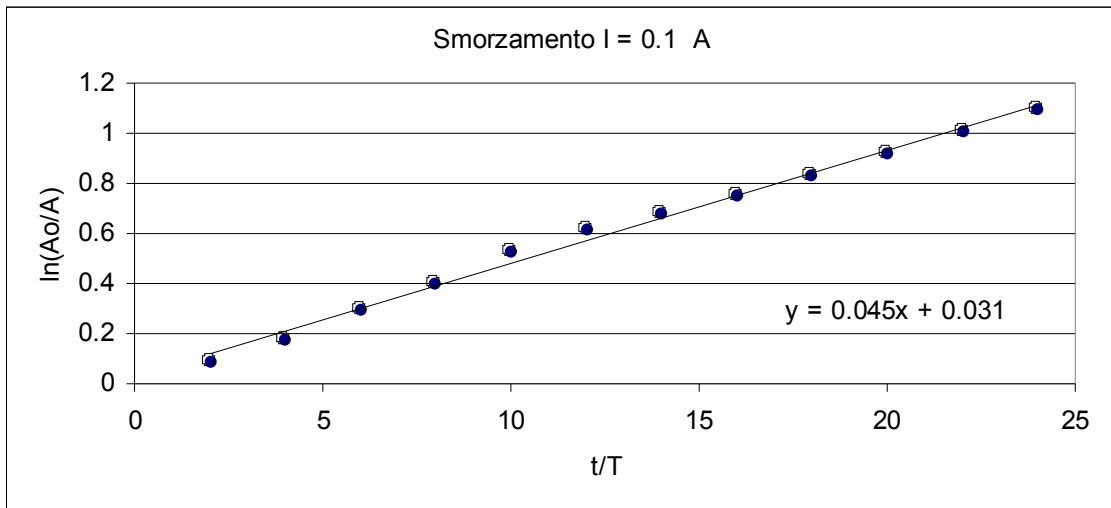
$$\sigma_\gamma = ((B\sigma_v)^2 + (v\sigma_B)^2)^{1/2}$$

$$\gamma_{\text{best}} = 0.0122 \pm 0.0004 \text{ s}^{-1}$$

Successivamente si effettuano nuove misure, seguendo lo stesso procedimento adottato per lo smorzamento naturale, facendo passare una determinata intensità di corrente attraverso le bobine dell'elettrocalamita ottenendo così un momento frenante, prestando attenzione affinché il moto sia ancora sottosmorzato. In tutte le serie di dati è stata presa come ampiezza iniziale $A_0 = 17$.

I = 0.1 A

t/T	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
A	15.6	14.2	12.6	11.4	10	9.2	8.6	8	7.4	6.8	6.2	5.7



Sono stati trovati i seguenti valori:

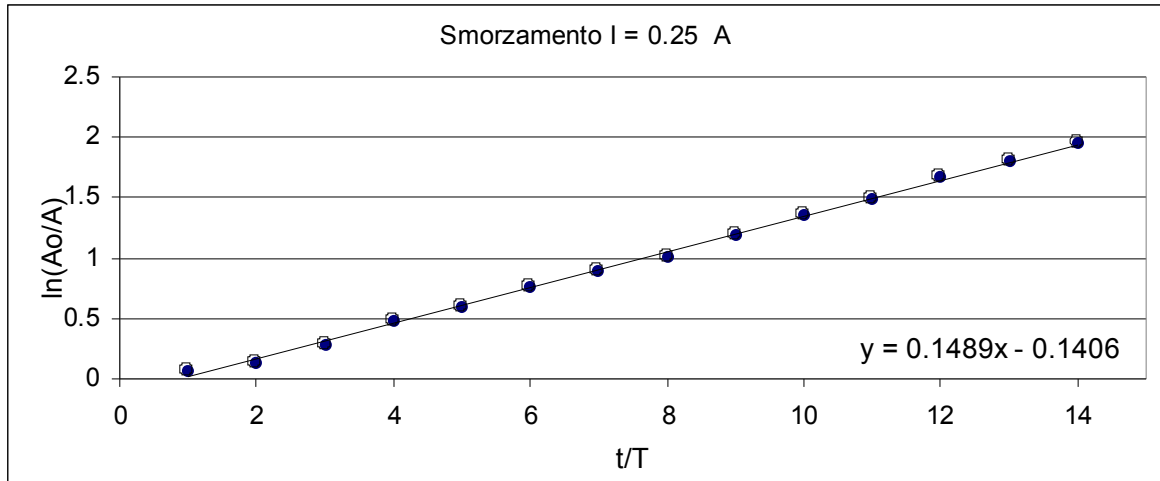
$$A = 0.031 \pm 0.017$$

$$B = 0.045 \pm 0.0012$$

$$\gamma_{\text{best}} = 0.0229 \pm 0.0006 \text{ s}^{-1}$$

I=0.25 A

t/T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	15.9	14.8	12.8	10.6	9.4	8.	7.	6.2	5.2	4.4	3.8	3.2	2.8	2.4



Sono stati trovati i seguenti valori:

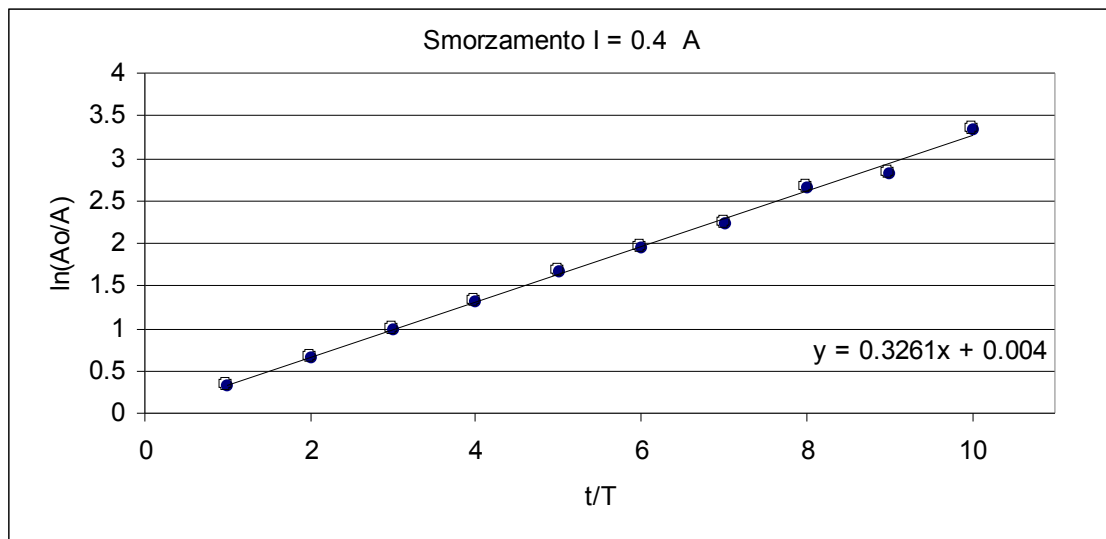
$$A = -0.14 \pm 0.014$$

$$B = 0.1489 \pm 0.0016$$

$$\gamma_{\text{best}} = 0.0761 \pm 0.0008 \text{ s}^{-1}$$

I = 0.4 A

t/T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	12.2	8.8	6.4	4.6	3.2	2.4	1.8	1.2	1	0.6



Sono stati trovati i seguenti valori:

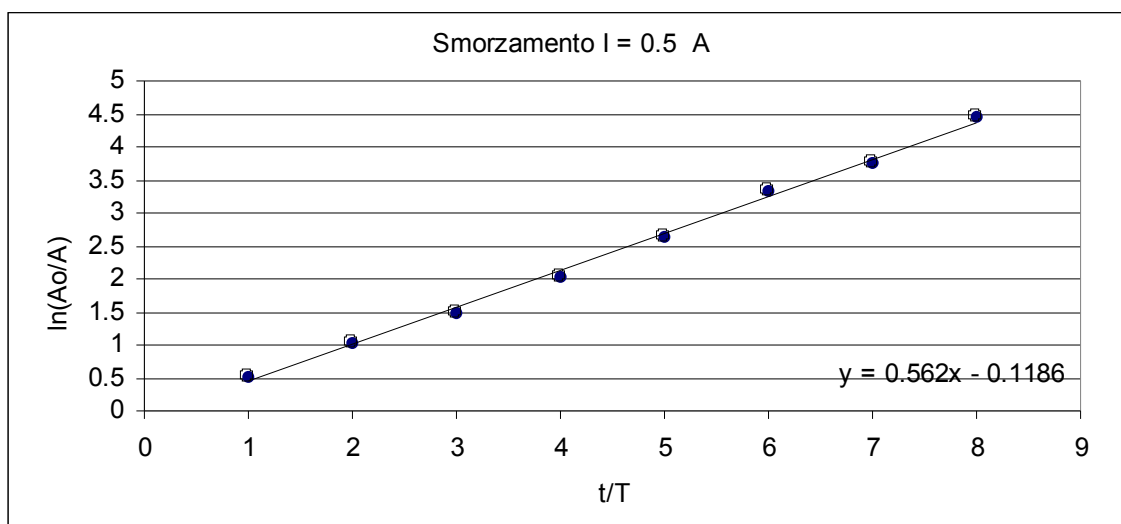
$$A = 0.004 \pm 0.035$$

$$B = 0.326 \pm 0.006$$

$$\gamma_{\text{best}} = 0.167 \pm 0.003 \text{ s}^{-1}$$

I = 0.5 A

t/T	1	2	3	4	5	6	7	8
A	10.2	6.	3.8	2.2	1.2	0.6	0.4	0.2



Sono stati trovati i seguenti valori:

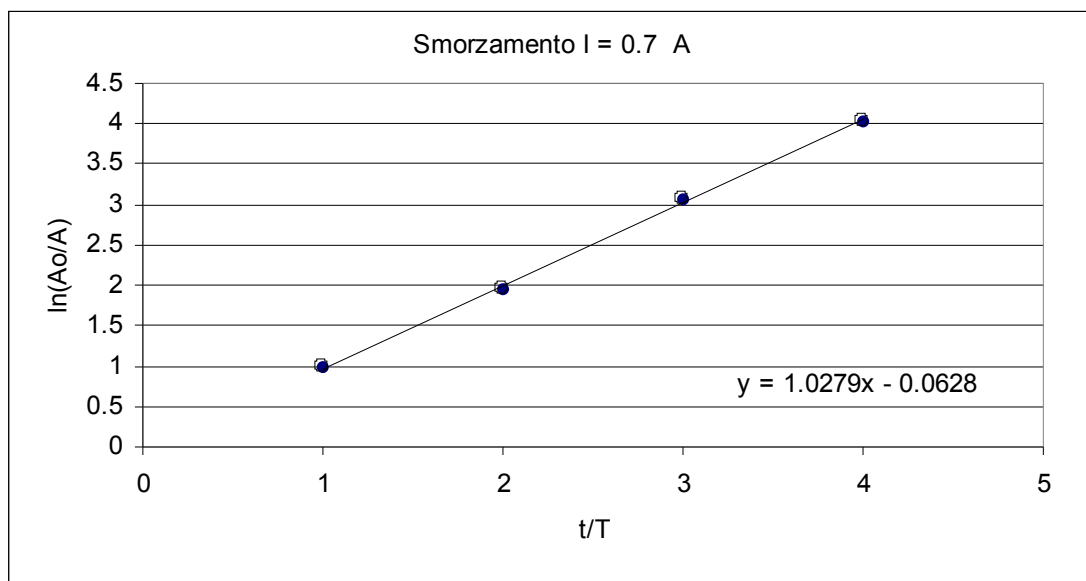
$$A = -0.118 \pm 0.06$$

$$B = 0.562 \pm 0.012$$

$$\gamma_{\text{best}} = 0.287 \pm 0.006 \text{ s}^{-1}$$

$$I = 0.7 \text{ A}$$

t/T	1	2	3	4
A	6.4	2.4	0.8	0.3



Sono stati trovati i seguenti valori:

$$A = -0.06 \pm 0.04$$

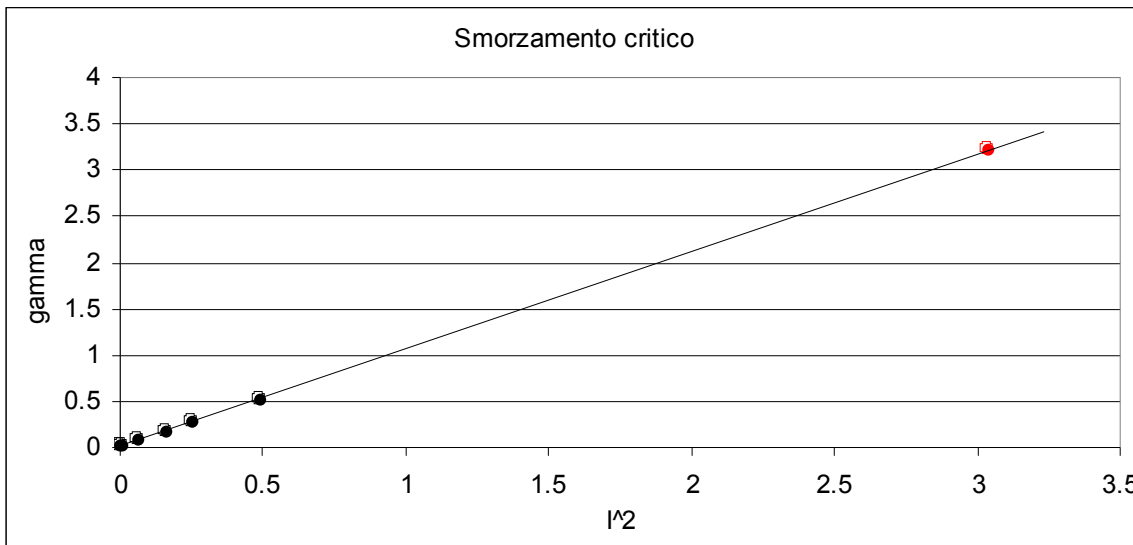
$$B = 1.028 \pm 0.017$$

$$\gamma_{\text{best}} = 0.525 \pm 0.009 \text{ s}^{-1}$$

-Smorzamento critico

Il seguente grafico rappresenta il coefficiente di smorzamento γ in funzione dell'intensità di corrente al quadrato.

γ (s ⁻¹)	σ_γ	σ_γ/γ %	I^2 (A ²)
0.012 2	0.000 4	3.28	0
0.022 9	0.000 6	2.62	0.01
0.076 1	0.000 8	1.05	0.062 5
0.167	0.003	1.8	0.16
0.287	0.006	2.09	0.25
0.525	0.009	1.71	0.49



Si determina quindi, estrapolando dai dati raccolti, il valore I_c dell'intensità di corrente per cui si ha la condizione di smorzamento critico ($\gamma^2 = \omega_0^2$).

Dato che i valori misurati hanno differenti incertezze note, tramite il metodo di adattamento pesato ad una retta, si ottiene la migliore stima per il coefficiente angolare e l'intercetta.

Le formule usate sono:

$$A = \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta}$$

$$B = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\Delta}$$

$$\Delta = \sum w \sum wx^2 - (\sum wx)^2$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum w}{\Delta}}$$

$$w_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}$$

I valori ottenuti sono:

$$A = 0.0122 \text{ s}^{-1} \quad \sigma_A = 0.0003$$

$$B = 1.026 \text{ s}^{-1} \text{A}^{-2} \quad \sigma_B = 0.009$$

Per calcolare il valore di I_c ed il relativo errore si osserva che:

$$I_c = \sqrt{\frac{\gamma_c - A}{B}} \quad \sigma_{I_c} = \sqrt{\frac{1}{4B(\gamma_c - A)} \left[\sigma_{\gamma_c}^2 + \sigma_A^2 + \frac{((\gamma_c - A)\sigma_B)^2}{B^2} \right]}$$

sapendo che $\gamma_c = \omega_0 = 2\pi\nu$, dove ν è la frequenza naturale calcolata in precedenza si ottiene:

$$I_{c \text{ best}} = 1.765 \pm 0.008 \text{ A}$$

- Fattore di qualità

La perdita relativa di energia in un periodo è data da:

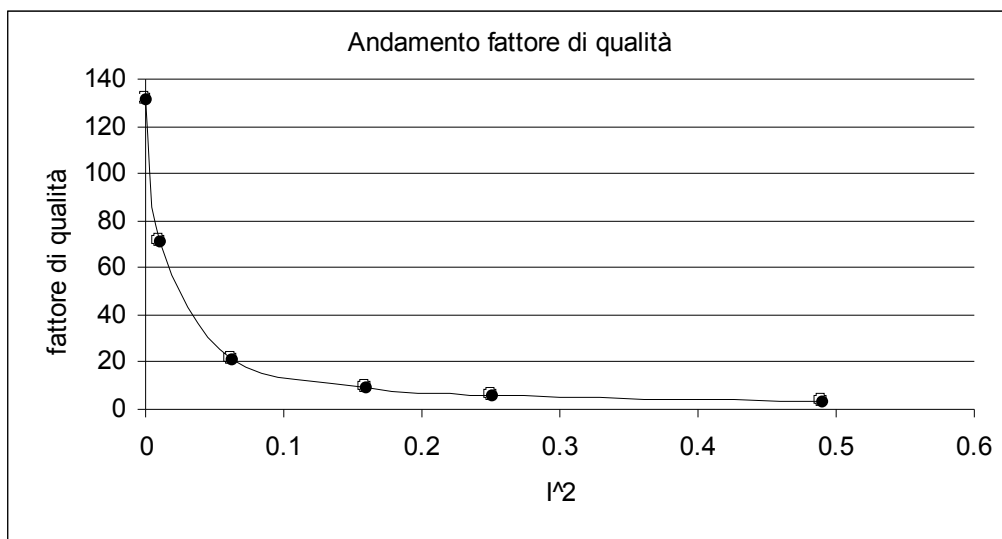
$$-\left(\frac{dE}{E}\right)_{T_0} = 2\gamma T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} 2\gamma = \frac{2\pi}{Q}$$

La quantità Q è definita fattore di qualità del sistema considerato ed indica il rapporto tra l'energia istantanea del sistema e l'energia dissipata durante un periodo.

Dal momento che γ è legato quadraticamente all'intensità di corrente I tramite la relazione ricavata precedentemente si ottiene

$$Q = \omega_0 / 2\gamma = \pi\nu / (A + BI^2)$$

I (A)	0.	0.1	0.25	0.4	0.5	0.7
Q	131.61 2	71.49 1	21.03 7	9.10 4	5.97 6	3.118



Si osserva che maggiore è il fattore di qualità maggiore è il tempo di oscillazione del pendolo.

Infatti a Q grandi corrispondono intensità di corrente minori e quindi minori sono i coefficienti di smorzamento.

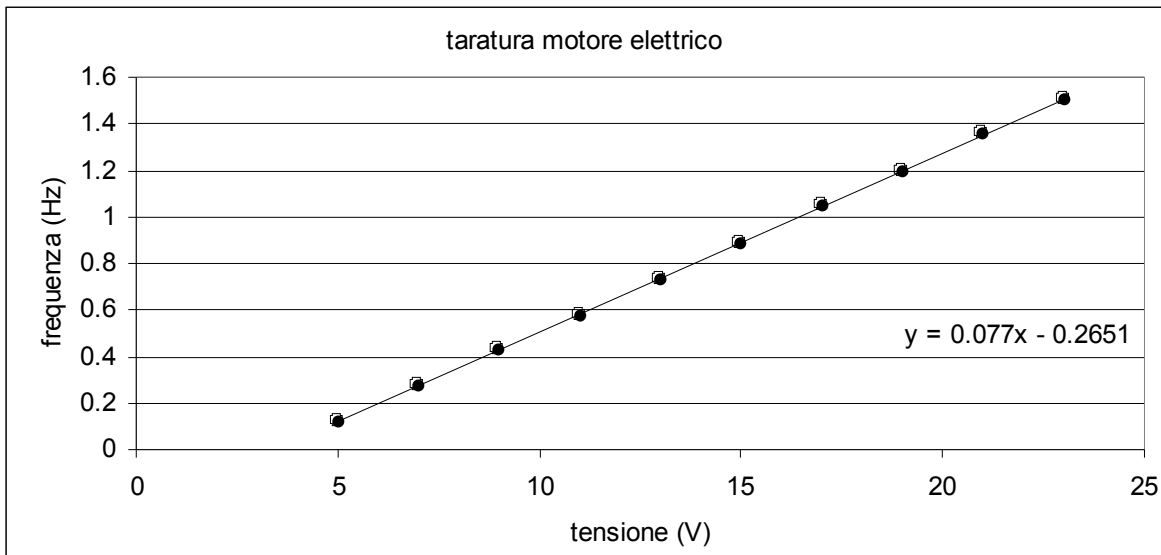
-Taratura del motore elettrico

Per determinare agevolmente le curve di risonanza, è opportuno effettuare preliminarmente una taratura del motore elettrico, in modo da conoscere la relazione che lega la frequenza di rotazione alla tensione di eccitazione.

Per fare questo si cronometra il tempo necessario alla biella per compiere N giri quando la tensione ha un certo valore prefissato, ripetendo la misura variando il valore della tensione; la frequenza di rotazione del motore è data da:

$$v_m = N/\Delta t_m$$

V (V)	N° giri	Δt (s)	v (s ⁻¹)
5	15	122.4 9	0.1225
7	15	54.57	0.2749
9	15	34.8	0.431
11	15	25.86	0.58
13	15	20.5	0.7315
15	15	16.91	0.887
17	15	14.34	1.046
19	15	12.54	1.1962
21	15	11.05	1.3575
23	15	9.95	1.5075



Si può notare che la retta di taratura non passa per l'origine; questo si può giustificare col fatto che per piccoli voltaggi il motore non si muove a causa di attriti statici. Di conseguenza il fit lineare è significativo solo per tensioni abbastanza alte.

-Determinazione delle curve di risonanza

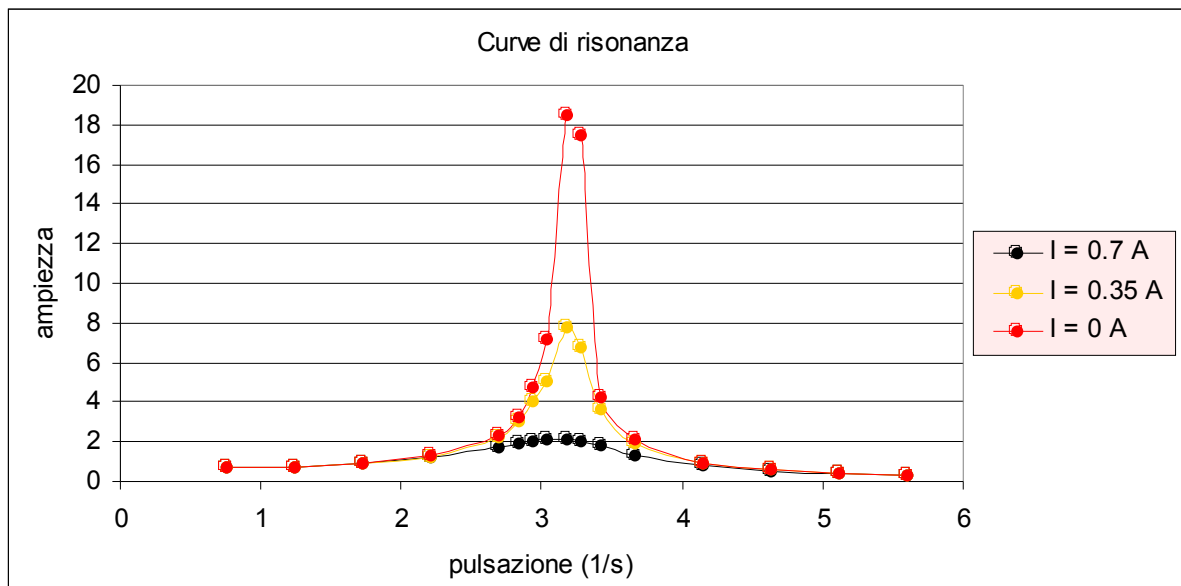
La determinazione delle curve di risonanza è stata fatta per tre diversi valori dell'intensità di corrente, cioè per tre diversi valori del coefficiente di smorzamento γ .

Nel variare la velocità del motore si è sempre seguito un procedimento che consiste nel passare gradualmente da condizioni di energia meccanica minore a condizioni di energia maggiore, in modo da ridurre l'ampiezza dei battimenti del sistema e diminuire di conseguenza i tempi di stabilizzazione delle oscillazioni.

Nelle seguenti tabelle sono riportate, per tre differenti valori della corrente nell'elettrocalamite, le ampiezze di oscillazione al variare della velocità angolare del motore; i dati vengono poi riportati in un grafico che mostra le tre curve di risonanza.

	ω	0.7544	1.2384	1.7225	2.2065	2.6905	2.8358	2.9326	3.0294
I (A)									
0.7		0.7	0.75	0.9	1.2	1.7	1.95	2.05	2.15
0.35		0.7	0.75	0.95	1.25	2.2	3	4	5.1
0		0.7	0.75	0.95	1.3	2.35	3.25	4.7	7.15

	ω	3.1746	3.2714	3.4166	3.6587	4.1427	4.6267	5.1108	5.5948
I (A)									
0.7		2.15	2.05	1.8	1.35	0.85	0.55	0.4	0.3
0.35		7.8	6.8	3.65	1.95	0.95	0.6	0.4	0.3
0		18.5	17.5	4.25	2.1	0.95	0.6	0.45	0.3



Si vede che la curva relativa al moto non smorzato dall'elettrocalamita è aperta: l'ampiezza di oscillazione, infatti, tende a valori infiniti quando la velocità angolare del motore tende al valore della pulsazione naturale del pendolo, come osservato nelle considerazioni iniziali sulle caratteristiche del moto oscillatorio.

Quando invece è presente un coefficiente di smorzamento sufficientemente elevato è possibile misurare l'ampiezza di oscillazione in situazione di risonanza:

$$\theta_{\text{ris}} = k_2 / (2I\gamma\omega_0) = k_2 Q / (I \omega_0^2)$$

Da questa relazione si deduce che più grande è il fattore di qualità Q, maggiore è l'ampiezza di oscillazione. Inoltre si ha :

$$\Delta\omega / \omega_0 = 1 / Q$$

dove $\Delta\omega$ è la larghezza a metà altezza della curva di risonanza.

Il calcolo è stato effettuato solo per le curve caratterizzate da uno smorzamento apprezzabile, infatti per $I = 0$ A l'altezza della curva non è valutabile. Osservando direttamente i grafici sono stati trovati i seguenti risultati:

$$Q (I = 0.35) = 6.69$$

$$Q(I = 0.7) = 1.53.$$

Questi risultati, benché siano dello stesso ordine di grandezza, sono notevolmente sottostimati rispetto ai valori trovati tramite il primo procedimento; tuttavia si è propensi a valutare come migliori i risultati ottenuti tramite il primo procedimento dato che i valori ottenuti dalle curve di risonanza possono essere soggetti a grandi imprecisioni dovute al fatto che il grafico non permette una accurata estrapolazione.

Circuiti in corrente alternata

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla misura di impedenze in circuiti alimentati in corrente alternata, all'osservazione di come queste variano in funzione della frequenza, e alla misura dell'angolo di sfasamento con il metodo dei fasori e il metodo dell'ellisse.

Apparato strumentale

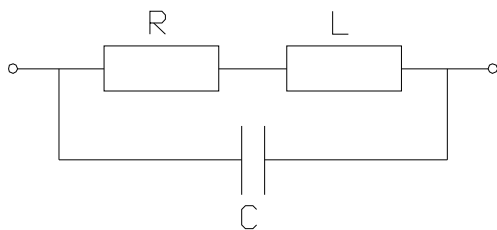
Circuito con induttanza, condensatore, resistenza;
Generatore di corrente alternata (precisione 10^{-3} V);
Tester (precisione 10^{-5} A);
Oscilloscopio.

Procedura sperimentale

Considerando circuiti contenenti, oltre al generatore, un solo elemento per volta, si misura la tensione efficace ai capi di questo e la corrente efficace che lo attraversa; il valore dell'impedenza è fornito dal rapporto fra tensione e corrente.

- Resistore

Per un resistore alimentato in corrente alternata l'impedenza, nel caso ideale, è costantemente uguale al valore R della resistenza. Nel caso reale, quando si opera a frequenze elevate, compaiono effetti capacitivi e induttivi, e il resistore si può schematizzare in questo modo:



L'impedenza complessa in questo caso ha l'espressione:

$$Z^* = \frac{\{R + j\omega[L(1 - (\omega/\omega_0)^2) - R^2C]\}}{[1 - (\omega/\omega_0)^2] + (\omega RC)^2} \quad \text{dove } \omega_0 = (LC)^{-1/2}$$

e il suo modulo vale:

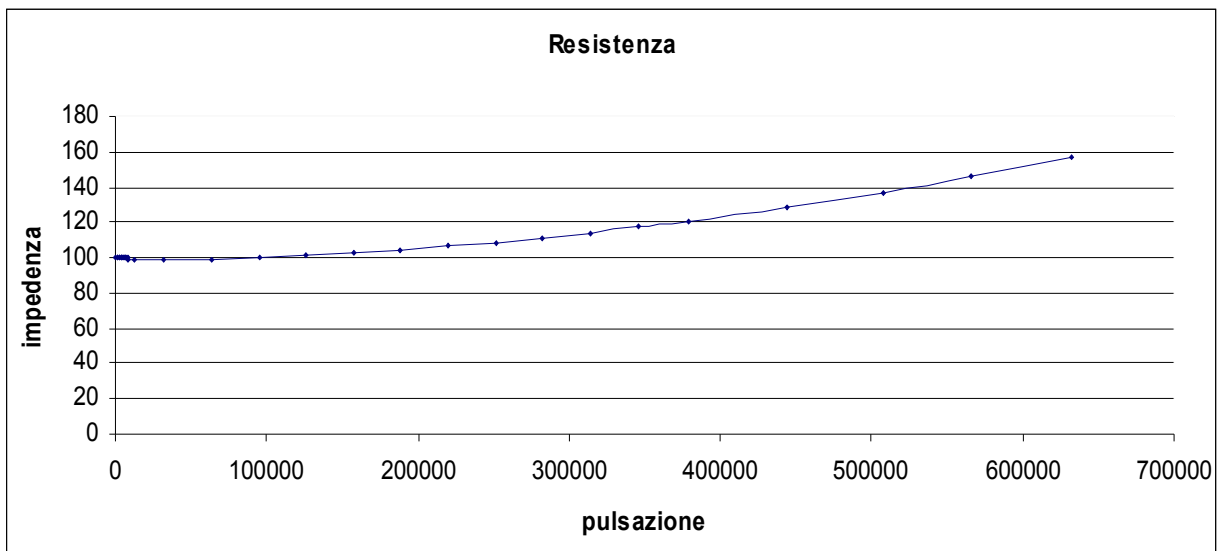
$$Z = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2[L(1 - (\omega/\omega_0)^2) - R^2C]^2}}{[1 - (\omega/\omega_0)^2] + (\omega RC)^2}$$

Si nota quindi che il comportamento del resistore dipende dai valori non conosciuti di L e C, e varia in funzione della pulsazione.

Questi sono i dati raccolti:

v (Hz)	ω (s⁻¹)	V_{eff} (V)	I_{eff} (mA)	Z (Ω)
50.93	320.002628	3.475	34.77	99.97
151.2	950.017618	3.479	34.74	100.14
251.8	1582.10606	3.480	34.83	99.91
349.1	2193.45999	3.480	34.82	99.94
452.3	2841.88471	3.481	34.84	99.91
551.2	3463.29174	3.471	34.75	99.97
652.2	4097.89346	3.470	34.75	99.85
750	4712.38898	3.468	34.75	99.80
849.4	5336.9376	3.466	34.74	99.77
955.4	6002.95524	3.464	34.74	99.71
1049	6591.06139	3.462	34.74	99.65
1151	7231.94629	3.460	34.74	99.60
1252	7866.548	3.458	34.75	99.51

1352	8494.8665 4	3.455	34.75	99.42
2012	12641.768 8	3.443	34.73	99.13
5010	31478.758 4	3.425	34.68	98.76
10100	63460.171 6	3.431	34.51	99.42
15200	95504.416 7	3.430	34.21	100.2 6
20020	125789.37	3.426	33.80	101.3 6
25070	157519.45 6	3.421	33.27	102.8 2
30010	188558.39 1	3.416	32.65	104.6 2
35040	220162.81 3	3.401	31.95	106.4 5
40020	251453.07 6	3.390	31.19	108.6 9
45020	282869.00 3	3.381	30.35	111.4
50060	314536.25 6	3.367	29.46	114.2 9
55040	345826.51 9	3.350	28.55	117.3 4
60240	378499.08 3	3.327	27.55	120.7 6
70750	444535.36	3.286	25.55	128.7 6
80720	507178.71 8	3.243	23.63	137.2 4
90110	566177.82 8	3.181	21.75	146.2 5
10060 0	632088.44 2	3.148	20.06	156.9 3

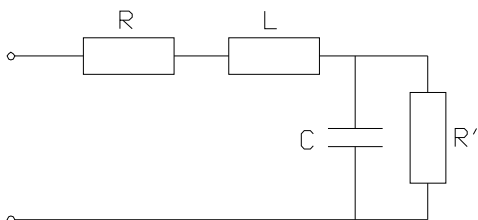


Si osserva che l'impedenza aumenta con la pulsazione. Inoltre, teoricamente, ci si aspetta, per questo tipo di configurazione, che esista un valore di risonanza per il quale l'impedenza è massima. Tuttavia le caratteristiche strutturali del resistore sono tali per cui il valore di risonanza si ha per frequenze molto elevate e solitamente non utilizzate.

In un intervallo molto ampio di frequenze ($\nu = 0 \div 30$ KHz), contenente anche quelle usate nel seguito dell'esperienza, si può ritenere valida l'approssimazione di Z costante.

- Condensatore

Per un condensatore alimentato in corrente alternata l'impedenza, nel caso ideale, varia con la pulsazione secondo la legge $Z = 1/\omega C$. Invece un condensatore reale può essere schematizzato con la seguente rappresentazione equivalente:



Nell'esperienza di laboratorio, R e L possono essere trascurati, dal momento che i loro effetti divengono importanti per frequenze superiori a qualche decina di MHz.

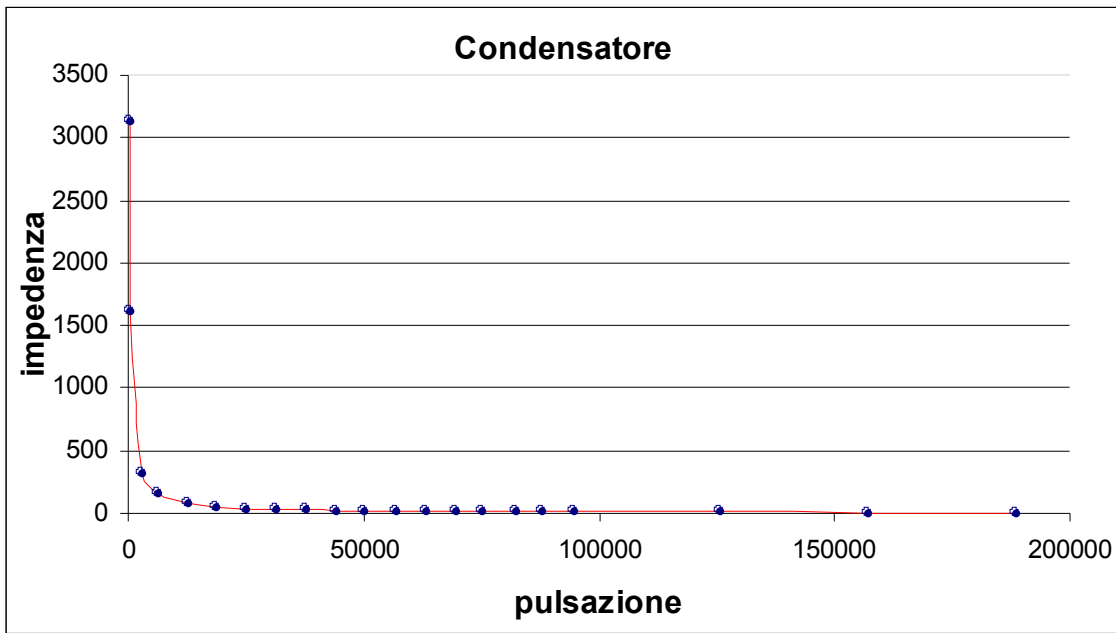
Quindi l'impedenza totale è data dal parallelo fra C e R' , che rappresenta la resistenza dovuta alle

perdite del dielettrico:

$$Z = \frac{1/R' - j\omega C}{1/R'^2 + \omega^2 C^2}$$

Si presentano i dati raccolti:

v (Hz)	ω (s⁻¹)	V_{eff} (V)	I_{eff} (mA)	C (μF)	Z (Ω)
51.8	325.468999	5.29	1.69	0.981	3130
100	628.318531	4.48	2.78	0.987	1610
500	3141.59265	4.43	13.82	0.993	320
1000	6283.18531	4.25	26.51	0.993	160
2003	12585.2202	3.711	46.5	0.996	79.8
3000	18849.5559	3.157	59.5	0.999	53
3994	25095.0421	2.688	67.5	1.001	39.8
5002	31428.4929	2.309	72.6	1.001	31.8
6000	37699.1118	2.013	75.6	0.996	26.6
7009	44038.8458	1.775	77.8	0.995	22.8
8005	50296.8984	1.586	79.2	0.993	20
9026	56712.0306	1.429	80.3	0.991	17.8
10040	63083.1805	1.298	80.9	0.988	16
11100	69743.3569	1.195	81.4	0.977	14.7
11990	75335.3918	1.104	81.7	0.989	13.5
13100	82309.7275	1.022	82	0.975	12.5
14020	88090.258	0.953	82.1	0.978	11.6
15090	94813.2663	0.888	82.1	0.975	10.8
20000	125663.706	0.675	81.7	0.963	8.26
25000	157079.633	0.541	80.6	0.948	6.7
30040	188746.887	0.450	79.1	0.931	5.7



Nel grafico sono stati interpolati i dati sperimentali tramite la funzione che descrive il comportamento dell'impedenza di un condensatore ideale; si osserva la quasi totale corrispondenza tra i dati e la curva ideale.

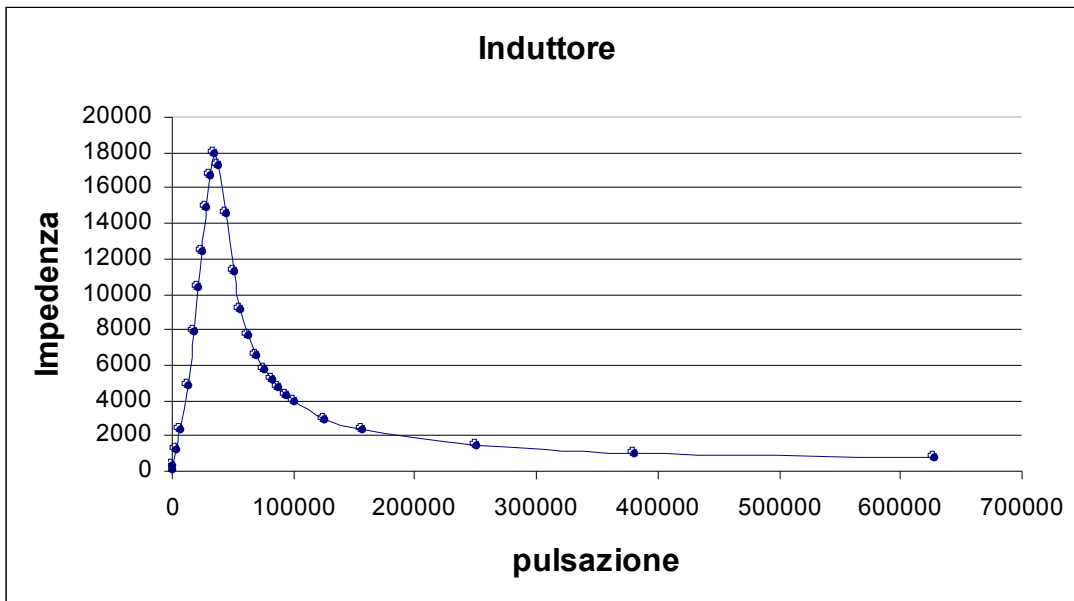
- Induttore

Per un induttore alimentato in corrente alternata l'impedenza, nel caso ideale, varia con la pulsazione secondo la legge $Z = \omega L$. Invece un induttore reale può essere schematizzato ancora con la stessa rappresentazione data per il resistore reale, in cui ora R comprende la resistenza del filo e le perdite del dielettrico..

Questi sono i dati raccolti:

ν (Hz)	ω (s ⁻¹)	V_{eff} (V)	I_{eff} (mA)	Z (Ω)
50	314.159265	4.09	26.09	156.7
100.1	628.946849	4.33	14.81	292.4
499.2	3136.56611	4.46	3.52	1267
1000	6283.18531	4.46	1.84	2424
2000	12566.3706	4.47	0.93	4806
2997	18830.7064	4.48	0.57	7859
3516	22091.6795	4.48	0.43	10410

4000	25132.741 2	4.49	0.36	12472
4501	28280.617 1	4.49	0.3	14966
5008	31466.192	4.5	0.27	16667
5448	34230.793 6	4.5	0.25	18000
6004	37724.244 6	4.5	0.26	17307
7032	44183.359 1	4.51	0.31	14548
8004	50290.615 2	4.51	0.4	11275
8974	56385.304 9	4.51	0.49	9204
10000	62831.853 1	4.51	0.59	7644
11070	69554.861 4	4.51	0.69	6536
12000	75398.223 7	4.51	0.78	5782
13000	81681.409	4.51	0.87	5184
14000	87964.594 3	4.51	0.96	4698
15010	94310.611 5	4.51	1.06	4255
16000	100530.96 5	4.5	1.15	3913
19980	125538.04 2	4.49	1.5	2993
25000	157079.63 3	4.45	1.92	2318
39950	251013.25 3	4.46	3.02	1477
60650	381075.18 9	4.18	4.14	1009.6
10000 0	628318.53 1	3.75	5.06	741



Ricordando l'espressione di Z:

$$Z = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 [L(1 - (\omega/\omega_0)^2) - R^2C]^2}}{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + (\omega RC)^2}$$

è possibile stimare i parametri R e C che caratterizzano l'induttore reale; infatti si ha:

$$Z \rightarrow R \quad \text{per } \omega \rightarrow 0$$

$$Z \rightarrow 1 / \omega C \quad \text{per } \omega \rightarrow \infty$$

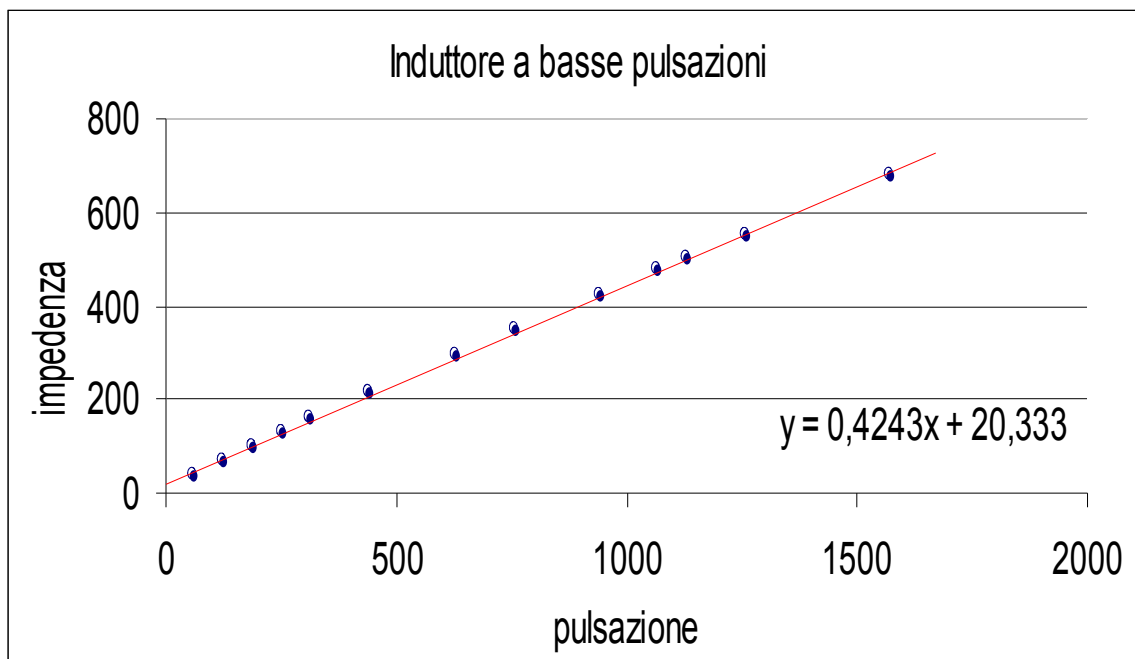
La stima del valore di C può essere ottenuta considerando un valore di ω molto alto; utilizzando quindi l'ultimo valore riportato in tabella si ottiene quindi

$$C = 1 / \omega Z = 2.14 \text{ nF.}$$

Per stimare il valore di R è stata fatta un'analisi del comportamento dell'induttore a basse frequenze, dove si ha un andamento lineare di Z.

Questi sono i dati raccolti

ν (Hz)	ω (s ⁻¹)	V_{eff} (V)	I_{eff} (mA)	Z (Ω)
9.6	60.318578 9	2.242	63	35
19.96	125.41237 9	3.3	47.3	69.7
30.07	188.93538 2	3.738	37.35	100
40.04	251.57874	3.969	30.47	129
50	314.15926 5	4.09	26.09	156.7
70.2	441.07960 9	4.23	19.9	212
100.1	628.94684 9	4.33	14.81	292
120.6	757.75214 8	4.36	12.57	347
150.1	943.10611 5	4.39	10.36	424
169.9	1067.5131 8	4.4	9.27	475
179.9	1130.3450 4	4.41	8.81	500.5
200.1	1257.2653 8	4.42	8	552
250	1570.7963 3	4.43	6.52	679



Tramite regressione lineare si ottiene la retta ($Z = A + B\omega$) che descrive l'andamento del valore dell'impedenza, ottenendo i seguenti valori:

$$A = 20.33 \Omega$$

$$B = 0.424 \text{ H}$$

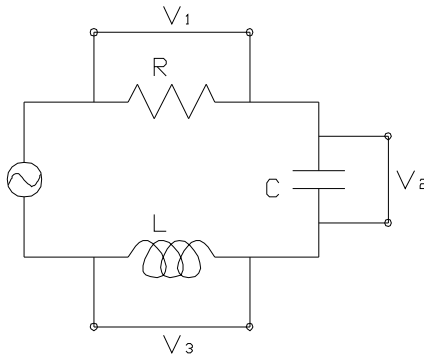
$$\sigma_A = 2.52 \Omega$$

$$\sigma_B = 0.003 \text{ H}$$

Si ottiene quindi per R il valore: $R = 20.33 \pm 2.52 \Omega$

- Circuito RLC

Si considera ora un circuito RLC in serie, in cui gli elementi R e C sono trattati in modo ideale mentre L è trattato come reale.



Si vuole misurare l'angolo di sfasamento tra la tensione ai capi del generatore e l'intensità di corrente nel circuito; con il metodo dei fasori.

Per il circuito considerato esistono due frequenze di risonanza per le quali, dal momento che sono soddisfatte le condizioni $C \gg c$ e $r^2 c \ll L$, valgono le seguenti approssimazioni:

$$\omega_1 = 1/(LC)^{1/2} = 1581 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1/(Lc)^{1/2} = 34179 \text{ rad/s}$$

Nelle misure effettuate in laboratorio si sono utilizzati valori di pulsazione compresi fra quelli di risonanza, quindi l'impedenza vista dal generatore non è mai puramente reale ed inoltre l'intensità di corrente è sfasata rispetto alla tensione.

Dato che l'induttore non è ideale, l'angolo di sfasamento tra la tensione ai suoi capi e la corrente che lo attraversa non è costantemente uguale a 90° , ma varia in funzione della frequenza secondo la relazione:

$$\Phi_L = \arctan \frac{\omega [L(1 - \omega^2 Lc) - r^2 c]}{r}$$

L'angolo di sfasamento totale fra la corrente e la tensione ai capi del generatore è dato dal rapporto fra la parte immaginaria e la parte reale di V_{tot} , dove V_{tot} rappresenta la somma dei fasori che caratterizzano le tensioni dei tre elementi del circuito.

$$\Phi = \arctan \frac{V_3 \sin \Phi_L - V_2}{V_3 \cos \Phi_L + V_1}$$

v (Hz)	ω (s ⁻¹)	V ₁ (V)	V ₂ (V)	V ₃ (V)	Φ_L (°)	Φ (°)
3000	18849.555 9	0.265	0.017	6.27	89.77799	87.35108
3101	19484.157 6	0.253	0.014	6.27	89.77859	87.46263
3202	20118.759 4	0.242	0.009	6.27	89.77852	87.56505
3306	20772.210 6	0.232	0.009	6.27	89.77771	87.6556
3410	21425.661 9	0.222	0.007	6.27	89.77611	87.74608
3501	21997.431 8	0.214	0.006	6.27	89.77401	87.81741
3607	22663.449 4	0.205	0.006	6.27	89.77069	87.8963
3702	23260.352	0.197	0.007	6.28	89.76681	87.96804
3806	23913.803 3	0.189	0.007	6.28	89.76145	88.03567
3908	24554.688 2	0.183	0.008	6.28	89.75491	88.08356
4000	25132.741 2	0.177	0.009	6.28	89.74773	88.13083
4104	25786.192 5	0.17	0.010	6.28	89.73787	88.18457
4204	26414.511	0.164	0.012	6.28	89.72627	88.22717
4300	27017.696 8	0.158	0.013	6.28	89.7127	88.2681
4409	27702.564	0.154	0.015	6.28	89.6936	88.28497
4504	28299.466 6	0.148	0.016	6.28	89.67277	88.31866

Si osserva come l'angolo di sfasamento relativo all'induttore rimanga pressoché costante al variare della frequenza, e che sia molto vicino al valore di 90°. Questo significa che il suo comportamento, per la banda di frequenze utilizzate, si avvicina molto al comportamento ideale. Inoltre si può notare che, dato che la tensione ai capi dell'induttore è molto maggiore delle altre due, l'angolo di sfasamento totale dipende principalmente dall'angolo di sfasamento dovuto all'induttore.

Un metodo alternativo per la misura dello sfasamento è il metodo dell'ellisse, che fa uso dell'oscilloscopio; si invia nel suo primo connettore (connettore relativo al comando delle placchette verticali) il segnale di tensione del generatore e nel secondo connettore (connettore relativo al comando delle placchette orizzontali) il segnale prelevato ai capi di uno dei tre elementi costituenti il circuito; poiché i segnali di tensione sono dati dalle formule

$$X=$$

$$Y=$$

la combinazione dei due segnali fa sì che il punto luminoso dello schermo disegni un'ellisse.

La distanza dei due punti di intersezione dell'ellisse con l'asse verticale rappresenta $2b$, mentre la proiezione dell'intera figura sull'asse verticale rappresenta due volte l'ampiezza massima del segnale verticale: il \sin

Ricordando che il resistore presenta ai suoi capi un segnale di tensione in fase con la corrente, mentre il condensatore e l'induttore hanno un segnale di tensione sfasato di $\pm \pi / 2$, dal valore di prima ottenuto è possibile misurare lo sfasamento tra la tensione e intensità di corrente.

Per l'intervallo di frequenza usato durante l'esperienza al contrario del resistore e del condensatore che possono essere considerati ideali l'induttore va trattato come elemento reale: non è più vero che l'induttore ha un segnale di tensione sfasato di $\pm \pi / 2$; l'angolo di sfasamento deve dunque essere trovato

$$V = Z * I$$
$$\text{Arg}(Z * I)$$

Determinazione del numero di Avogadro

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla determinazione del numero di Avogadro mediante l'utilizzo di una cella elettrolitica con soluzione di solfato di rame.

Apparato strumentale

Cella elettrolitica
Bilancia elettrodinamica (precisione: 1mg)
Bilancia di precisione (precisione: 1mg)
Amperometro (precisione: 1mA)
Generatore di corrente continua
Cronometro

Procedura sperimentale

- Taratura dell'amperometro

Si procede in primo luogo alla taratura dell'amperometro utilizzando la bilancia di Mettler.

Il funzionamento di tale bilancia è basato sul raggiungimento di una condizione di equilibrio fra la forza peso di un campione selezionato opportunamente e la forza magnetica che si esplica su una bobina immersa in un campo magnetico; con la bilancia di Mettler il valore della massa incognita è dato dalla somma di una massa m_1 , costituita dalla combinazione di pesi campioni, e di una massa m_2 letta sulla scala luminosa dello strumento.

Quando m_2 risulta essere nulla significa che l'equilibrio nella bilancia è stato raggiunto con il braccio posizionato orizzontalmente; questo comporta che, contrariamente alla situazione in cui l'equilibrio viene raggiunto in posizione non perfettamente orizzontale (cioè m_2 diversa da zero), non si esercitano forze aggiuntive dovute ad un'ulteriore spinta archimedeica o ad una variazione delle tensione superficiale causata dalla differente altezza di immersione nel mercurio degli adduttori.

Per quanto detto risulta chiaro che un metodo per verificare l'affidabilità di un amperometro collegato in serie con un generatore di corrente continua ed una bilancia elettrodinamica, consiste nell'imporre la condizione $m_2 = 0$ e confrontare l'amperaggio segnato con il valore desunto dalla formula

$$I^2 = m_1 g / k$$

dove k è il coefficiente noto del sistema delle bobine ($k = 20.78872 \text{ mN/A}^2$).

Variando la massa m_1 e modulando l'intensità di corrente in maniera da raggiungere la condizione di equilibrio con $m_2 = 0$ si è raccolta una serie di dati dalla quale, mediante regressione lineare, è stata estrapolata una retta

$$y = B x + A$$

dove si riporta I^2 in funzione di m_1 .

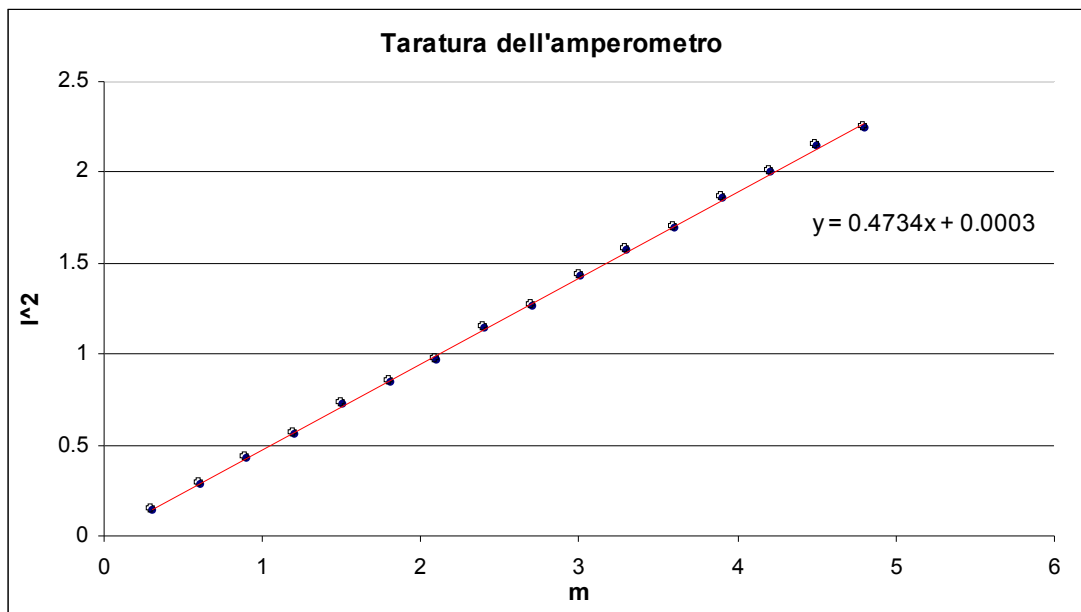
Il significato di questa operazione è determinare una retta che abbia la funzione di correggere la scala dell'amperometro: per conoscere l'intensità di corrente reale si legge il valore dall'amperometro e, utilizzando tale valore, si ricava il valore della massa dalla retta, e infine dalla relazione

$$I^2 = m_1 g / k$$

si ottiene il valore "vero" per l'intensità.

La seguente tabella riporta i dati raccolti per tarare l'amperometro.

m_1 (g)	I (A)	I^2 (A ²)
0.301	0.37	0.139876
0.601	0.53	0.288369
0.9	0.65	0.431649
1.201	0.75	0.564001
1.504	0.85	0.727609
1.802	0.91	0.842724
2.1	0.98	0.974169
2.4	1.06	1.142761
2.703	1.12	1.267876
3.001	1.19	1.430416
3.302	1.25	1.572516
3.599	1.30	1.695204
3.901	1.36	1.860496
4.204	1.41	2.002225
4.5	1.46	2.146225
4.8	1.49	2.244004



Eseguendo la regressione lineare si ottengono i parametri della retta correttiva:

$$y = B x + A$$

$$\begin{aligned}
 A &= 0.0003 \text{ A}^2 \\
 B &= 0.473439 \text{ A}^2/\text{g} \\
 \sigma_A &= 0.007214 \text{ A}^2 \\
 \sigma_B &= 0.002486 \text{ A}^2/\text{g} \\
 r &= 0.9998
 \end{aligned}$$

Si osserva come l'irrelevanza dell'intercetta denoti la precisione dell'amperometro.

- Determinazione del numero di Avogadro

A questo punto si è in grado di procedere con la seconda parte dell'esperimento ovvero la determinazione del numero di Avogadro.

Dopo aver fatto passare per un tempo prefissato un'intensità di corrente I attraverso i catodi del voltmetro si può ottenere mediante un facile integrale la quantità di carica che è fluita attraverso i catodi; supposta nota la carica dell'elettrone ($q_e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) si ha

$$N_A = \Delta q (P_m / \Delta m) / z q_e$$

dove Δq è la carica che attraversa i catodi, $P_m = 63.57$ è il peso molecolare del rame, $z = 2$ è il numero di cariche elettroniche trasportate da ciascun ione di rame e Δm la differenza di massa dei catodi che si misura dopo il passaggio di carica (differenza dovuta al fenomeno dell'elettrolisi).

Le seguenti tabelle riportano i dati raccolti in tre serie successive per la determinazione del numero di Avogadro;

	Massa iniziale (g)	Massa finale (g)	Δ Massa (g)	N_A	dN_A/N_A
$I_c=1.391 \text{ A}$ $I_f=1.394 \text{ A}$ $\Delta t=1999.87$ s $\Delta q=2781.8$ C	117.906	118.826	0.914	$6.038 \cdot 10^{23}$	0.63%
	117.288	118.203	0.915	$6.032 \cdot 10^{23}$	0.63%
	118.988	119.904	0.916	$6.025 \cdot 10^{23}$	0.63%
	118.083	119.002	0.919	$6.006 \cdot 10^{23}$	0.63%
	117.218	118.138	0.920	$5.999 \cdot 10^{23}$	0.63%

Massa iniziale (g)	Massa finale (g)	Δ Massa (g)	N_A	dN_A/N_A
-----------------------	---------------------	-----------------------	-------	------------

$I_c=1.442 \text{ A}$ $I_t=1.445 \text{ A}$ $\Delta t=2000.31$ s $\Delta q=2884.4$ C	118.052	119.003	0.951	$6.018 \cdot 10^{23}$	0.61%
	119.798	120.748	0.95	$6.024 \cdot 10^{23}$	0.61%
	118.843	119.795	0.952	$6.012 \cdot 10^{23}$	0.61%
	118.678	119.627	0.949	$6.030 \cdot 10^{23}$	0.61%
	118.035	118.986	0.951	$6.018 \cdot 10^{23}$	0.61%

	Massa iniziale (g)	Massa finale (g)	ΔMassa (g)	N_A	dN_A/N_A
$I_c=1.403 \text{ A}$ $I_t=1.406 \text{ A}$ $\Delta t=2000.34$ s $\Delta q=2806.5$ C	118.95	119.876	0.926	$6.013 \cdot 10^{23}$	0.62%
	120.693	121.62	0.927	$6.006 \cdot 10^{23}$	0.62%
	119.701	120.628	0.927	$6.006 \cdot 10^{23}$	0.62%
	119.573	120.498	0.925	$6.019 \cdot 10^{23}$	0.63%
	118.859	119.783	0.924	$6.026 \cdot 10^{23}$	0.63%

Nell'ultima colonna di ogni tabella è stato riportato l'errore percentuale massimo di ogni misura che deriva dalla propagazione degli errori, in modo da quantificare la precisione del metodo utilizzato per la singola misura.

Dal momento che si dispone di diverse misure di N_A , per ogni serie di dati si è calcolata la media di N_A ed il suo errore (deviazione standard della media) ottenendo i seguenti risultati:

$$N_{A \text{ best } 1} = (6.020 \pm 0.007) \cdot 10^{23}$$

$$N_{A \text{ best } 2} = (6.020 \pm 0.003) \cdot 10^{23}$$

$$N_{A \text{ best } 3} = (6.014 \pm 0.004) \cdot 10^{23}$$

Si precisa che le intensità di corrente riportate nelle tabelle ed usate nella formula per il calcolo del numero di Avogadro non sono quelle lette dal display del tester ma bensì quelle ricavate dalla retta correttiva precedentemente determinata (dove I_c è l'intensità corretta ed I_t è l'intensità letta dal tester).

Avendo ricavato tre valori per il numero di Avogadro è possibile farne una media pesata per ottenere la migliore stima:

$$N_{A \text{ wav}} = (6.018 \pm 0.003) \cdot 10^{23}$$

Per verificare la compatibilità del valore così ottenuto con il valore accettato si calcola il numero di deviazioni standard per cui $N_{A \text{ wav}}$ differisce da $N_{A \text{ exp}} = 6.022 \cdot 10^{23}$:

$$t = |N_{A \text{ wav}} - N_{A \text{ exp}}| / \sigma = 1.33$$

Dalla tabella dell'integrale normale degli errori si trova che la probabilità di ottenere un risultato che differisce da $N_{A \text{ exp}}$ per t o più deviazioni standard risulta essere circa 18.35%.

Si può affermare che il risultato ottenuto è compatibile con quello atteso al livello del 5%.

Galvanometro balistico

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla taratura di un galvanometro balistico tramite scarica di un condensatore di capacità nota, alla determinazione di capacità incognite di alcuni condensatori e allo studio della sensibilità dello strumento in rapporto alla resistenza posta nel circuito di scarica del condensatore.

Apparato strumentale

Galvanometro balistico	(precisione scala graduata = 1mm)
Generatore di tensione	(precisione = 0.1 V)
Condensatore di capacità nota	(C = 225 μ F)
Condensatori di capacità incognita	
Resistenze	
Interruttore	
Commutatore	

Procedura sperimentale

Il galvanometro balistico permette di misurare la carica che lo ha attraversato in un tempo piccolo rispetto al proprio periodo di oscillazione; infatti ciò che distingue un galvanometro balistico da un normale galvanometro a bobina mobile è l'elevato momento d'inerzia posseduto dall'equipaggio mobile che quindi inizia a muoversi quando l'intera carica da misurare è fluita.

In questa esperienza si è utilizzato un galvanometro a specchio di Deprez-D'Arsonval per il quale la relazione di proporzionalità tra la carica Q e l'angolo α è:

$$q_s = Q/\alpha \quad \text{dove la quantità } q_s \text{ è definita sensibilità balistica .}$$

Tuttavia, poiché si utilizza una scala graduata piana posta a distanza D dallo specchio, si definisce in questo caso la sensibilità balistica come rapporto tra Q e lo spostamento d dell'indice sulla scala:

$$q_s' = Q/d$$

Le due definizioni di sensibilità balistica sono legate dalla seguente relazione approssimata, valida per piccole ampiezze di oscillazione:

$$q_s' = q_s / 2D$$

- Periodo di oscillazione dell'equipaggio mobile

Per misurare il periodo di oscillazione dell'equipaggio mobile si scarica il condensatore sul galvanometro e si misura con un cronometro il tempo impiegato per compiere cinque oscillazioni complete.

Il periodo T_0 è dato da:

$$T_0 = \Delta t / N$$

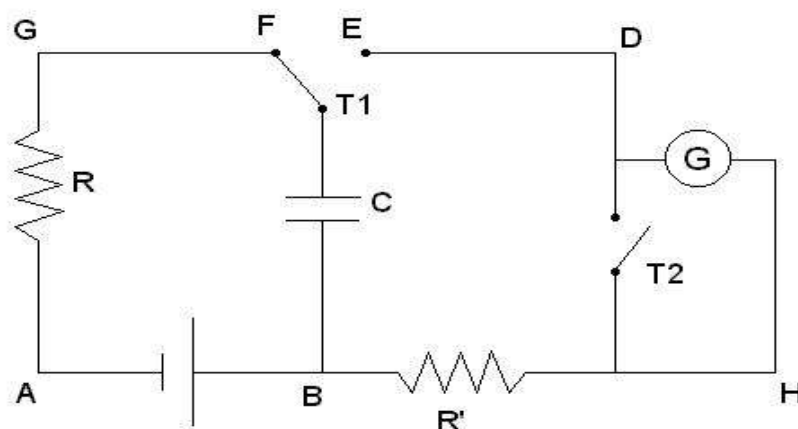
Δt (s)	60.76	60.79	60.98	60.92
T_0 (s)	12.15	12.15	12.19	12.18
	2	8	6	4

$$T_0 = 12.17 \pm 0.01 \text{ s}$$

- Taratura del galvanometro balistico

Si pone la scala graduata ad una distanza D (in questa esperienza $D = 69.5 \pm 0.2 \text{ cm}$) e si controlla che l'indice luminoso sia a fuoco, centrato nello zero e perpendicolare alla scala graduata.

Nell'esperienza si usa il seguente circuito



Chiudendo l'interruttore T_1 su F si carica il condensatore; la carica presente sulle sue armature è:

$$Q(t) = C\Delta V(1 - e^{-t/RC}) \quad (\text{dove } t = 0 \text{ corrisponde alla chiusura dell'interruttore})$$

Dato che la costante di tempo $\tau_1 = RC$ è dell'ordine di un decimo di secondo, dopo qualche secondo si ritiene che la carica del condensatore sia $Q = C\Delta V$.

Chiudendo l'interruttore T_1 su E il condensatore si scarica, e la corrente nel circuito BHDE varia secondo la legge:

$$I(t) = (\Delta V/R') e^{-t/R'C} \quad (\text{trascurando la resistenza interna del galvanometro})$$

Si può considerare che il segnale di corrente sia limitato nel tempo in quanto in un intervallo di tempo $\Delta t = 10 R'C = 10 \tau_2$, l'intensità di corrente si riduce a 0.01% del valore iniziale. Assumendo che $R' = 10^5 \Omega$ e $C = 100 \text{ nF}$, l'impulso di corrente dura 0.1 s, tempo breve rispetto al periodo di oscillazione dell'equipaggio mobile (circa 12 s), che inizia a muoversi quando praticamente tutta la carica lo ha attraversato.

L'interruttore T_2 rimane aperto durante la scarica del condensatore e durante il periodo di tempo impiegato dall'equipaggio mobile del galvanometro a compiere la prima oscillazione; in seguito viene chiuso in modo da smorzare, attraverso fenomeni di autoinduzione, le oscillazioni.

Caricando il condensatore per mezzo di valori di tensione differenti e successivamente facendolo scaricare si misura l'ampiezza d della prima oscillazione (tale valore è ottenuto dalla media delle deviazioni a destra e a sinistra scambiando la polarità del generatore).

In questa fase dell'esperienza si è utilizzato un condensatore di capacità $C = 225 \text{ nF}$.

ΔV (V)	d_{sin} (cm)	d_{dex} (cm)	d_{med} (cm)	q_s' ($10^{-7}C/cm$)
1	1.3	1.4	1.35	1.6667
2	2.8	2.8	2.8	1.6071
3	4.1	4.2	4.15	1.6265
4	5.5	5.5	5.5	1.6364
5	7	7	7	1.6071
6	8.4	8.4	8.4	1.6071
7	9.9	9.8	9.85	1.5989
8	11.2	11.2	11.2	1.6071
9	12.7	12.8	12.75	1.5882
10	14	14.2	14.1	1.5957
11	15.5	15.7	15.6	1.5865
12	16.8	17.0	16.9	1.5976

$$q_s' = (1.610 \pm 0.007) 10^{-7} C/cm$$

Si è preferito ottenere una stima di q_s' facendo la media fra tutti i valori riportati sulla tabella, in quanto si è ritenuto che non fossero soddisfatte le ipotesi che consentono di applicare il metodo dei minimi quadrati; infatti in tale procedura è essenziale che almeno una delle due grandezze in gioco nella legge fisica abbia incertezza trascurabile rispetto all'altra; in questo caso l'errore percentuale sulla carica oscillava tra il 10 % e circa l'1 %, mentre l'errore percentuale della deviazione d , considerando sia l'errore strumentale sia l'errore sperimentale (indotto dall'osservatore), varia tra circa il 15 % e l'1%.

- Misura di capacità incognite

Si sostituisce il condensatore di capacità nota usato per la taratura, con dei condensatori di capacità incognita. Tramite lo stesso procedimento si misurano le deviazioni dell'indice luminoso, e, utilizzando la stima della sensibilità balistica prima ottenuta, si calcola la carica fluita, e quindi la capacità del condensatore.

- 1° condensatore

ΔV (V)	d_{sin} (cm)	d_{dex} (cm)	d_{med} (cm)	C (nF)
3	1.7	1.8	1.75	93.92
6	3.6	3.8	3.7	99.28
9	5.5	5.6	5.55	99.28
12	7.4	7.5	7.45	99.95
15	9.3	9.3	9.3	99.82
18	11.2	11.1	11.15	99.73

$$C = 98.66 \pm 0.85 \text{ nF}$$

Si osserva la prima misura è discorde dalle altre; infatti essa dista dal valore medio 2.03 deviazioni:

la probabilità che una misura cada al di fuori di 2.03 deviazioni è 4.24 % per cui ci si dovrebbe aspettare che su 6 misure solo $\frac{1}{4}$ sia così discorde. Secondo il criterio di Chauvenet (considerando $\frac{1}{2}$ come limite di rigetto) la prima misura può essere rigettata.

Dopo il rigetto la nuova stima della capacità è:

$$C = 99.61 \pm 0.14 \text{ nF}$$

- 2° condensatore

ΔV (V)	d_{sin} (cm)	d_{dex} (cm)	d_{med} (cm)	C (nF)
2	2.6	2.9	2.75	221.3 7
4	5.6	5.7	5.65	227.4 1
6	8.4	8.6	8.5	228.0 8
8	11.1	11.4	11.25	226.4 1
10	14	14.6	14.3	230.2 3
12	16.9	17.4	17.15	230.1

Applicando il criterio di Chauvenet, si rigetta la prima misura, ottenendo:

$$C = 228.4 \pm 0.8 \text{ nF}$$

- 3° condensatore

ΔV (V)	d_{sin} (cm)	d_{dex} (cm)	d_{med} (cm)	C (nF)
5	9.7	9.9	9.8	315.5 6
6	11.7	11.9	11.8	316.6 3
7	13.6	13.9	13.75	316.2 5
8	15.7	15.9	15.8	317.9 7
9	17.6	17.8	17.7	316.6 3
10	19.6	19.8	19.7	317.1 7

$$C = 316.7 \pm 0.3 \text{ nF}$$

- 4° condensatore

ΔV (V)	d_{sin} (cm)	d_{dex} (cm)	d_{med} (cm)	C (nF)
1	2.9	3	2.95	474.9 5
2	6.3	6.5	6.25	515.2
3	9.6	9.7	9.65	517.8 8
4	12.7	12.9	12.8	515.2
5	16.1	16.2	16.15	520.0 3
6	19.3	19.5	19.4	520.5 7

Applicando il criterio di Chauvenet, si rigetta la prima misura, ottenendo:

$$C = 517.8 \pm 1.1 \text{ nF}$$

- 5° condensatore

ΔV (V)	d_{sin} (cm)	d_{dex} (cm)	d_{med} (cm)	C (nF)
1	4	4	4	644
1.5	6.5	6.6	6.55	703.0 3
2	8.6	8.8	8.7	700.3 5
2.5	10.8	11	10.9	701.9 6
3	13.1	13.2	13.15	705.7 2
3.5	15.2	15.4	15.3	703.8
4	17.5	17.8	17.65	710.4 1

Applicando il criterio di Chauvenet, si rigetta la prima misura, ottenendo:

$$C = 704.2 \pm 1.4 \text{ nF}$$

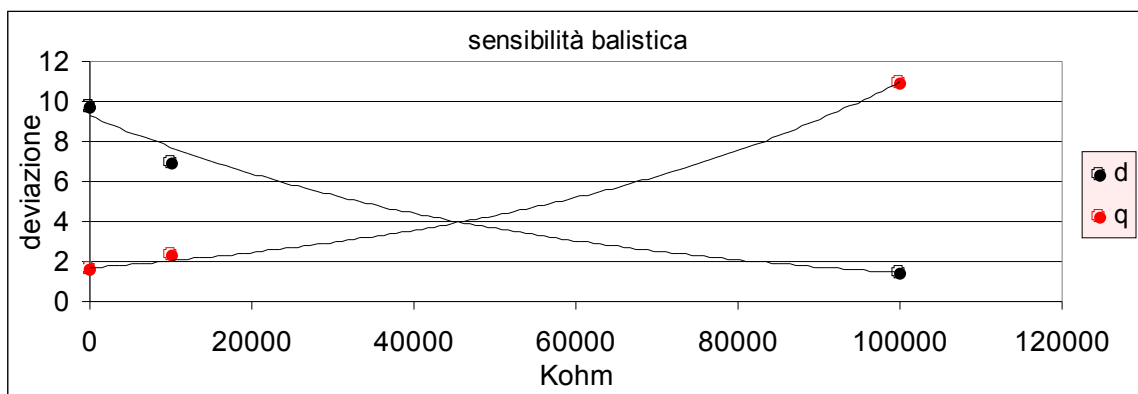
Come si può notare, in quasi tutte le serie di dati, la prima misura è decisamente discorde dalle altre, il che può essere in parte spiegato ricordando che minore è la deviazione del raggio luminoso maggiore è l'errore percentuale su d e di conseguenza minore è la significatività e la bontà della misura di C .

- Dipendenza della sensibilità balistica dalla resistenza di scarica

Si inserisce nel circuito un condensatore di capacità nota e, fissando una differenza di potenziale tale che lo spostamento dell'indice sia massimo, si varia la resistenza del circuito di scarica inserendo in serie ad R' diverse resistenze di valore noto.

Questi sono i dati raccolti con un condensatore di capacità $C = 225 \text{ nF}$.

R	d_{sin} (cm)	d_{dex} (cm)	d_{med} (cm)	q_s' (10^{-7} C/cm)
1.2 K Ω	9.7	9.8	9.75	1.615
100 K Ω	9.7	9.8	9.75	1.615
10 M Ω	6.9	7	6.95	2.266
100 M Ω	1.5	1.4	1.45	10.862



Inserendo nel circuito le resistenze riportate in tabella si ha un aumento della costante di tempo τ_2 , cioè aumenta il tempo durante il quale si scarica il condensatore. Perciò, per valori sufficientemente grandi di R , il tempo in cui la carica fluisce nel galvanometro non è più trascurabile rispetto al periodo di oscillazione dell'equipaggio mobile.

In pratica si ha che il galvanometro comincia a muoversi quando in esso non è ancora passata tutta la carica del condensatore; quindi viene a mancare la condizione necessaria per un funzionamento corretto dello strumento, che fornisce una misura di carica minore di quella reale.

Si può vedere in dettaglio il fenomeno scrivendo l'equazione di moto per l'equipaggio mobile; per quest'ultimo vale infatti:

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + K\vartheta = BNS \cdot i(t)$$

dove con I è indicato il momento di inerzia, K è la costante di proporzionalità per il momento torcente e il membro di destra da il contributo del momento applicato all'equipaggio mobile provocato dal campo B in cui è immerso. Per la corrente i(t) vale l'espressione della corrente in un circuito RC

$$i(t) = \frac{V}{R} \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Senza rappresentare tutti i passaggi si trova che la soluzione generale dell'equazione differenziale è data da:

$$\vartheta(t) = A \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{C}{I}} \cdot t + \varphi \right) + \frac{BNSVRC^2}{KR^2C^2 + 1} \cdot e^{\frac{-t}{RC}} ;$$

imponendo ora le condizioni che l'equipaggio mobile sia fermo nel punto di equilibrio per $t = 0$ si trovano le espressioni per A e φ :

$$A = \frac{BNSVC}{(KR^2C^2 + T)\omega} \cdot \sqrt{C^2 R^2 \omega^2 + 1} , \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-RC\omega).$$

Dal momento che nel grafico è riportato l'andamento della massima deviazione in funzione della resistenza R , per capire tale andamento bisogna trovare dalla soluzione dell'equazione di moto θ_{\max} , e questo può essere fatto semplicemente ponendo

$$\sqrt{\frac{C}{I}} \cdot t + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

per cui si ha un massimo della parte in seno dalla soluzione. Isolando t da quest'ultima relazione, sostituendo la condizione trovata e esplicitando φ nell'equazione, si ha finalmente:

$$\vartheta_{\max} = \frac{BNSVC}{(KR^2C^2 + I)\omega} \cdot \sqrt{C^2R^2\omega^2 + 1} + \frac{BNSVRC^2}{KR^2C^2 + I} \cdot e^{\frac{2 \cdot \arctg(-R\omega C) - \pi}{2\omega}}$$

Si verifica che θ_{\max} decresce come $1/R$ per $R \rightarrow \infty$ (andamento conforme a quello sperimentale riportato sul grafico), mentre per $R \rightarrow 0$ θ_{\max} tende ad un valore che dipende dalle caratteristiche interne del galvanometro.

Misura di resistenze elettriche

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla misura di alcune resistenze elettriche tramite i seguenti metodi:

- ponte di Wheatstone
- ponte a filo
- ponte di Kohlrausch

Apparato strumentale

Generatore di corrente continua e alternata

Galvanometro (precisione: 1 mA)

Resistenze variabili note (minima variazione 0.1 Ω)

Resistenze incognite

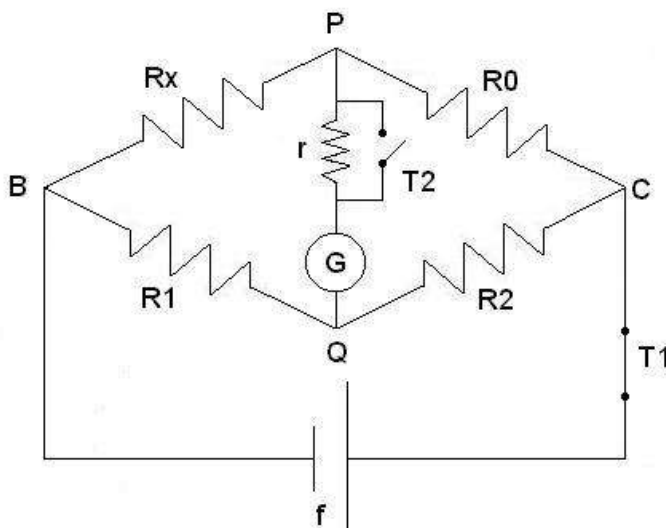
Ponte a filo

Cuffia

Procedura sperimentale

- Ponte di Wheatstone

Un metodo per misurare una resistenza incognita R_x è fornita dal Ponte di Wheatstone, cioè dal circuito sotto mostrato.



R_0 , R_1 e R_2 sono resistenze variabili di valori noti; fra i punti P e Q è collegato un galvanometro e fra i punti B e C un generatore di forza elettromotrice f .

Per la misura di R_x , si variano le tre resistenze aggiustandole su valori tali che la corrente nel galvanometro si annulli.

Indicando con i_1 la corrente che passa nel ramo BPC, e con i_2 la corrente che passa nel ramo BQC, poiché deve essere nulla la differenza di potenziale fra P e Q si deve avere:

$$i_1 R_x = i_2 R_1 \quad i_1 R_0 = i_2 R_2$$

da cui

$$i_2 / i_1 = R_x / R_1 = R_0 / R_2$$

e quindi

$$R_x = (R_1 / R_2) R_0$$

Nel caso il valore di R_x sia compreso negli estremi di variabilità di R_0 , è conveniente porre $R_1 = R_2$ in modo da avere $R_x = R_0$; altrimenti si sceglie un rapporto R_1 / R_2 prossimo all'unità per consentire di raggiungere il bilanciamento variando opportunamente R_0 .

Si osserva la presenza di una resistenza aggiuntiva r in serie al galvanometro; essa ha la funzione di proteggere tale strumento nel caso inizialmente i rami del ponte abbiano un notevole sbilanciamento. L'interruttore T_2 viene poi chiuso, escludendo la resistenza r , quando il valore di R_0 produce piccoli spostamenti dell'indice del galvanometro.

Qualora non si riesca a determinare con precisione la condizione di bilanciamento, una maggiore precisione è ottenuta nel seguente modo:

indicando con n_1 il numero di divisioni di cui il galvanometro devia a sinistra quando $R_0 = R'$, e con n_2 il numero di divisioni di cui devia a destra quando $R_0 = R' + \delta R'$ (dove $\delta R'$ è il minimo incremento possibile), allora:

$$R_x = (R_1 / R_2)[R' + n_1 \delta R' / (n_1 + n_2)]$$

Questi sono i dati raccolti per quattro resistenze incognite:

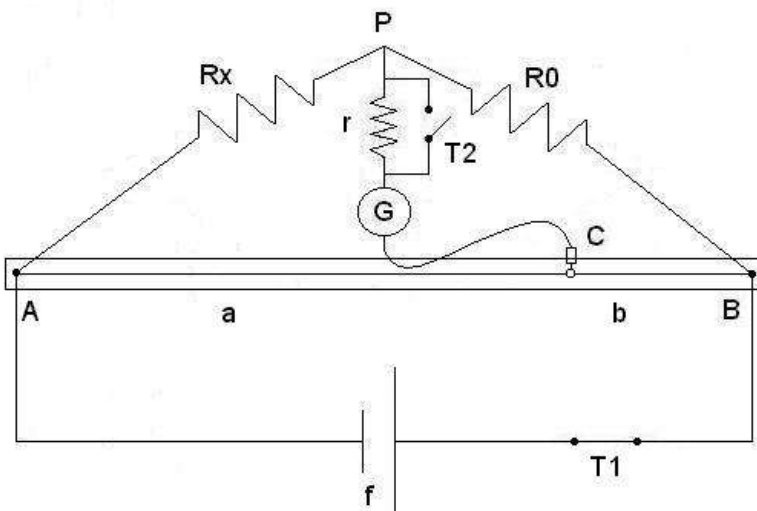
R_1 (Ω)	R_2 (Ω)	R_0 (Ω)	n_1	n_2	R_x
100	100	139.2	1	5	139.2 2
100	100	417.3	0	0	417.3
613	600	690	0	0	704.9 5
600	600	998.2	0	0	998.2

Dal momento che non si conosce il livello di tolleranza delle resistenze campione, è difficile quantificare l'incertezza nella misura di R_x ; tuttavia supponendo che tali resistenze abbiano una tolleranza del 5%, è possibile stimare l'errore tramite la seguente espressione:

$$\frac{\delta R_x}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{\delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta R_2}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta R_0}{R_0}\right)^2} = 8.66\%$$

- Ponte a filo

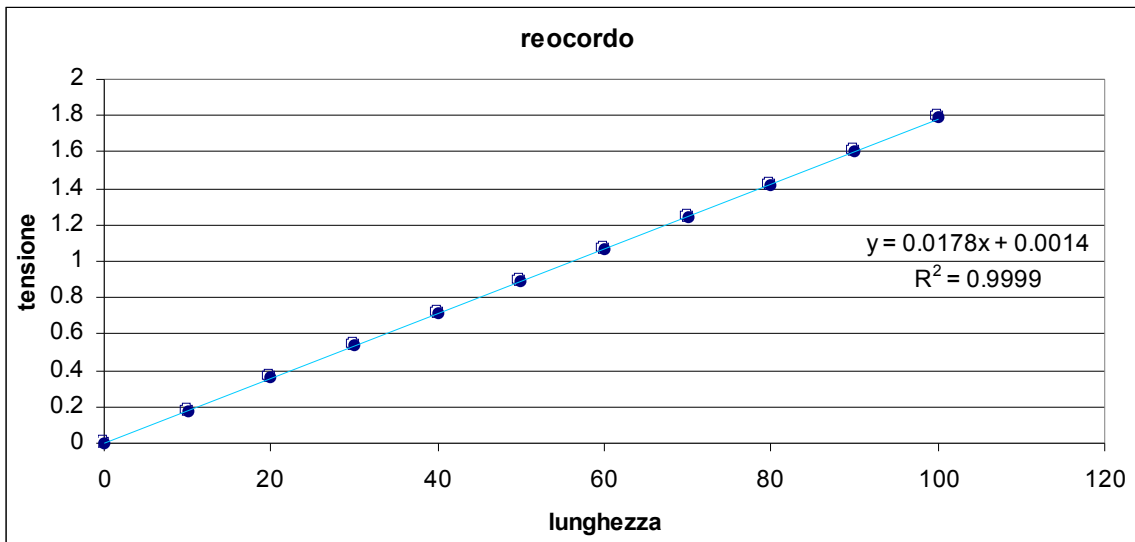
Il ponte a filo è costituito da un reocordo, cioè da un filo (lungo in questo caso 1 m) teso su un sostegno isolante; il seguente disegno mostra come viene realizzato il circuito elettrico.



In questo metodo le resistenze R_1 e R_2 sono sostituite dai tratti AC e CB del filo, variabili in lunghezza tramite il contatto mobile C.

Si procede ora a verificare la qualità del reocordo, cioè si controlla se la tensione e la lunghezza del filo sono proporzionali; sono state raccolte le seguenti misure, mantenendo una intensità di corrente costante $I = 1.204 \text{ mA}$:

I (cm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
V (V)	0	0.1 8	0.3 6	0.5 4	0.7 1	0.8 9	1.0 7	1.2 4	1.4 2	1.6 0	1.7 9



Osservando i dati raccolti risulta evidente una perfetta relazione lineare fra i primi mentre al contrario facendo avanzare il contatto mobile si nota una leggera perdita di tensione dovuta a vari parassitismi e all'usura dello strumento.

Si può così schematizzare lo strumento con una serie di resistenze:

L (cm)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ρ / S (V / AcM)	0.01 / 8	0.018	0.018	0.017	0.018	0.018	0.017	0.018	0.018	0.019

In questo modo la resistenza incognita R_x , quando è soddisfatta la condizione di bilanciamento, è data da:

$$R_x = R_0 \left[\left(\sum_i \left(\frac{\rho}{S} \right)_i l_i \right) / \left(\sum_j \left(\frac{\rho}{S} \right)_j l_j \right) \right]$$

dove gli indici individuano gli elementi in serie che schematizzano le due parti in cui si divide il filo. Tuttavia si è verificato che il rapporto tra le sommatorie si discosta poco dal rapporto a / b derivato dall'aver posto resistività e sezione del filo costanti (la discrepanza è al massimo dell'1%).

Si riportano ora i dati raccolti corrispondenti alla condizione $a = 52$ cm, $b = 48$ cm:

avendo constatato che l'uso del reocordo introduce un errore, sono state ripetute le misure anche invertendo la tensione ai suoi capi in modo da compensare eventuali sovrastime o sottostime sistematiche nella misura di R_x ;

la terza e la quarta colonna si riferiscono ai valori raccolti invertendo la tensione:

R_0' (Ω)	R_x (Ω)	R_0'' (Ω)	R_x (Ω)	$R_{x\text{medio}}$	dR_x/R_x
129.7	140.5	151.0	139.4	139.9	3.855%
				5	
391.0	423.6	453.1	418.2	420.9	3.854%
651.0	705.2	754.0	696	700.6	3.853%
926.0	1003.	1074.0	991.4	997.3	3.854%
	2				

L'errore percentuale di R_x è stato calcolato attraverso la seguente formula derivata direttamente dalla regola della propagazione degli errori:

$$\frac{dR_x}{R_x} = \frac{1}{R_x} \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 [\sigma_{R'_0}^2 + \sigma_{R''_0}^2] + \left(\frac{R_0}{b}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{R_0 a}{b^2}\right)^2 \sigma_b^2}$$

dove le incertezze assolute di R_0 sono state calcolate ponendo l'incertezza relativa al 5%, mentre σ_a e σ_b sono state poste uguali alla precisione strumentale.

- Ponte di Kohlrausch

Si tiene fissa l'apparecchiatura del caso precedente ad eccezione del galvanometro che viene sostituito da un ricevitore a cuffia che, percorso da corrente alternata, emette un fischio avente un minimo in corrispondenza della condizione di bilanciamento del ponte.

Utilizzando frequenze percepibili all'orecchio umano (attorno a 4000 Hz) lo sperimentatore sposta il contatto volante del reocordo fino ad individuare il punto che rende minimo il fischio.

Si riportano le misure raccolte dai tre osservatori a frequenza 4740 Hz; a è la distanza tra il contatto volante e il contatto di R_x , mentre b è la distanza tra il contatto volante e il contatto di R_0 .

	a (cm)	b (cm)	R_0 (Ω)	R_x (Ω)	dR_x / R_x
1° osservatore	12	88	1074	146,4	9.79%
	28,5	71,5	1074	428,1	12.39%
	39,5	60,5	1074	701,2	15.92%
	48,5	51,5	1074	1011,4	20.45%
2° osservatore	17	83	674	138	7.82%
	38,5	61,5	674	421,9	10.47%
	51	49	674	701,5	15.01%
	60	40	674	1011	21.62%
3° osservatore	15,5	84,5	757	138,8	8.25%
	36	64	757	425,8	10.79%
	47,5	52,5	757	684,9	15.05%
	58	42	757	1045,4	21.18%

Si riportano le misure raccolte invertendo la posizione di R_0 e R_x :

	a (cm)	b (cm)	R_0 (Ω)	R_x (Ω)	dR_x / R_x
1° osservatore	11	89	1074	132,7	10.44%
	27,5	72,5	1074	407,4	12.69%
	39,5	60,5	1074	701,2	15.92%
	48	52	1074	991,4	20.47%
2° osservatore	17,5	82,5	674	143	7.69%
	38	62	674	413	10.53%
	51	49	674	701,5	15.01%
	59,5	40,5	674	990,2	21.5%
3° osservatore	16	84	757	144,2	8.09%
	35,5	64,5	757	416,6	10.87%
	48,5	51,5	757	712,9	15.02%
	56	44	757	963,4	20.84%

Per compensare eventuali sovrastime o sottostime sistematiche nella misure delle resistenze, per ogni set di dati raccolti dai vari osservatore, si è considerata come miglior valore di R_x la media fra le due misure di R_x caratterizzate dal valore comune di R_0 .

	R_x	R_x'	$R_{x\text{medio}}$	dR_x/R_x
1° osservatore	146,4	132, 7	139,55	7.14%
	428,1	407, 4	417.75	8.86%
	701,2	701, 2	701.2	11.26%
	1011, 4	991, 4	1001.4	14.46%
2° osservatore	138	143	140.5	5.48%
	421,9	413	417.45	7.42%
	701,5	701, 5	701.5	10.61%
	1011	990, 2	1000.6	15.24%
3° osservatore	138,8	144, 2	141.5	5.78%
	425,8	416, 6	421.2	7.66%
	684,9	712, 9	698.9	10.63%
	1045, 4	963, 4	1004.4	14.88%

Gli errori percentuali sono stati calcolati con una formula analoga a quella precedentemente riportata nel caso del ponte a filo con corrente continua.

Si sono calcolate le medie pesate per i tre valori di ogni resistenza, dato che, siccome ogni osservatore ha utilizzato un differente valore di R_0 , i risultati ottenuti hanno un peso diverso:

$$R_1 = 140.63 \pm 3.47\%$$

$$R_2 = 418.85 \pm 4.57\%$$

$$R_3 = 700.51 \pm 6.25\%$$

$$R_4 = 1002.14 \pm 8.57\%$$

- Conclusione

Poiché per ogni resistenza incognita si hanno tre misure derivate da tre differenti metodi caratterizzati da precisioni diverse, si è ritenuto opportuno procedere ad una migliore stima delle resistenze calcolandone la media pesata :

	Ponte di Wheatstone	Ponte a filo	Ponte di Kohlrusch	Media pesata
R₁	139.2 ± 8.66%	139.95 ± 3.85%	140.63 ± 3.47%	140 ± 2.47%
R₂	417.3 ± 8.66%	420.9 ± 3.85%	418.85 ± 4.57%	418.35 ± 2.79%
R₃	690 ± 8.66%	700.6 ± 3.85%	700.51 ± 6.25%	696.31 ± 3.07%
R₄	998.2 ± 8.66%	997.3 ± 3.85%	1002.14 ± 8.57%	993.88 ± 3.26%

Rapporto e/m

Scopo dell'esperienza

L'esperienza è finalizzata alla determinazione del valore del rapporto e/m per un elettrone trattato non relativisticamente.

Materiale

Generatore di corrente continua	(precisione: 10 mA)
Generatore di tensione continua	(precisione: 1 V)
Calibro	(precisione: 10 ⁻² mm)
Bobine di Helmholtz	
Ampolla in vetro contenente gas idrogeno rarefatto	
Elettrodi	

Procedura sperimentale

In un'ampolla sferica di vetro, contenente gas idrogeno rarefatto, vengono posti degli elettrodi per la produzione e l'accelerazione di un fascio di elettroni emessi da un filamento di tungsteno per effetto termoelettronico.

Scrivendo l'equazione di conservazione dell'energia per gli elettroni all'uscita dagli elettrodi si ha

$$\frac{mV^2}{2} = e\Delta V + kT \quad (1)$$

dove ΔV rappresenta la differenza di potenziale applicata tra il filamento di tungsteno e l'anodo dell'elettrodo.

Una coppia di bobine di Helmholtz concentriche all'ampolla di vetro produce un campo magnetico diretto lungo l'asse e in ottima approssimazione costante nella regione centrale; gli elettroni all'uscita dagli elettrodi, immersi in un campo magnetico diretto normalmente alla loro velocità, iniziano a percorrere una traiettoria circolare il cui raggio si trova risolvendo l'equazione

$$\frac{mV^2}{r} = eVB_z \quad (2)$$

L'energia posseduta dagli elettroni è sufficiente per eccitare gli atomi di idrogeno che, decadendo sullo stato fondamentale, emettono fotoni la cui lunghezza d'onda corrisponde circa alla regione dell'azzurro-violetto; il processo di fluorescenza del gas permette così allo sperimentatore di vedere e di misurare la traiettoria circolare degli elettroni.

Utilizzando le equazioni (1) e (2) (nella (1) quale il termine kT viene qui trascurato) si ricava

$$\frac{e}{m} = \frac{2\Delta V}{(B_z r)^2}$$

dove il valore di B_z può essere ricavato in primo luogo dall'espressione

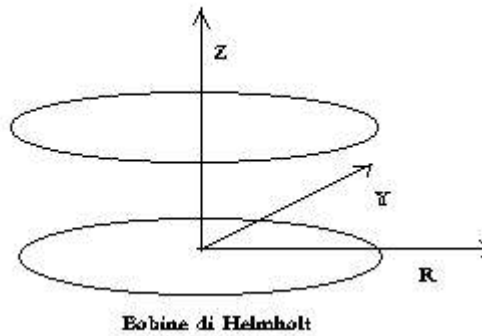
$$B_z = \mu_0 (4/5)^{3/2} \frac{NI}{R_B}$$

in cui N e R_B sono rispettivamente il numero di spire e il raggio di una bobina.

Per rendere trascurabile l'eventuale effetto del campo magnetico terrestre sulla traiettoria degli elettroni si

posizionano le bobine di Helmholtz in una configurazione tale per cui B_z è approssimativamente ortogonale al campo magnetico terrestre.

Una valutazione più corretta del valore del campo magnetico in un punto individuato dal sistema di coordinate utilizzato nella figura sottostante



può essere data considerando l'espressione

$$B_z(r) = \left\{ \mu_0 \frac{NIk}{2\pi\sqrt{(R_B r)}} \right\} (J_1 + \alpha J_2)$$

dove J_1 e J_2 sono rispettivamente il primo ed il secondo integrale ellittico di Legendre e

$$k^2 = \frac{4R_B r}{(R_B + r)^2 + z^2} \quad \alpha = \frac{(R_B^2 - r^2 - z^2)}{(R_B - r)^2 + z^2}$$

(entrambe le formule sono calcolate in $z = R_b/2$).

I valori di J_1 e J_2 possono essere calcolati usando la formula approssimata data da

$$J_1 = a_1 + a_2\delta + a_3\delta^2 + (a_4 + a_5\delta + a_6\delta^2) \ln \delta^{-1}$$

$$J_2 = 1 + b_1\delta + b_2\delta^2 + (b_3 + b_4\delta) \ln \delta^{-1}$$

in cui $\delta = 1 - k^2$ e le costanti numeriche hanno il valore riportato in tabella

a ₁	1.3862944	b ₁	0.4630151
a ₂	0.1119723	b ₂	0.1077812
a ₃	0.0725296	b ₃	0.2452727
a ₄	0.5	b ₄	0.0412496
a ₅	0.1213478		
a ₆	0.0288729		

Nella seguente tabella si riportano i dati raccolti in laboratorio dove sono state utilizzate delle bobine di Helmholtz caratterizzate da un numero di spire $N = 130$ e dal raggio $R_B = 0.15$ m; per il campo magnetico si è riportato come primo valore quello corretto e come secondo valore quello approssimato.

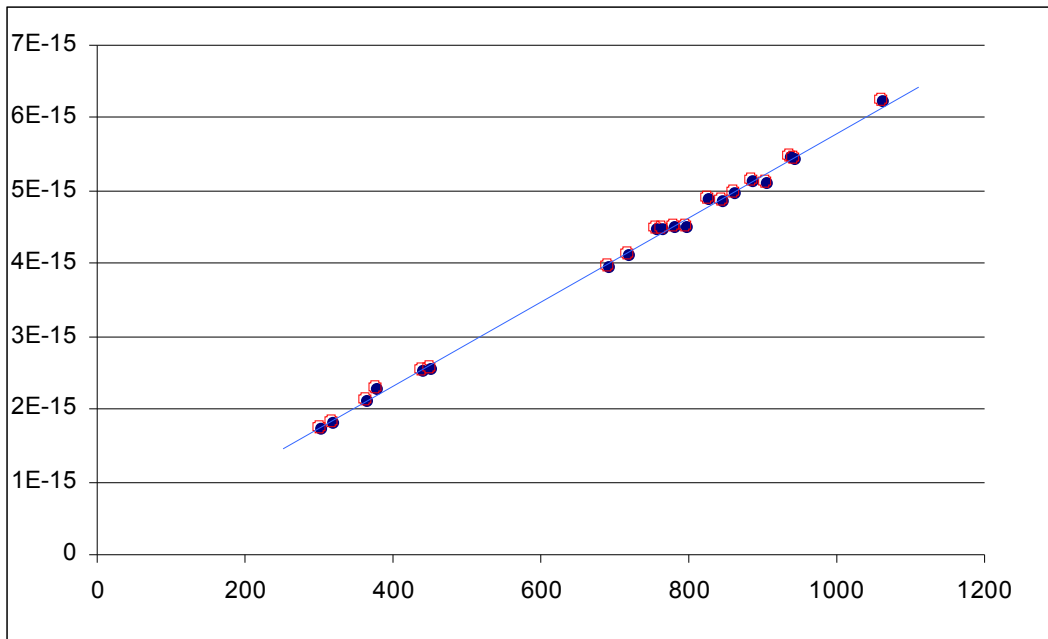
I (A)	ΔV (Volt)	$2r$ (m)	B_z (T)	B_z (T)	e / m (C/kg)
0,91	151	0,1192	7,004E-04	7,092E-04	1,7332E+11
1,08	160	0,1011	8,364E-04	8,416E-04	1,7900E+11
1,16	182	0,10166	8,983E-04	9,040E-04	1,7460E+11
1,05	189	0,11637	8,091E-04	8,183E-04	1,7055E+11
1,17	220	0,11008	9,037E-04	9,118E-04	1,7784E+11
1,34	225	0,09679	1,039E-03	1,044E-03	1,7803E+11
1,52	346	0,10629	1,175E-03	1,185E-03	1,7731E+11
1,48	360	0,11126	1,143E-03	1,153E-03	1,7818E+11
1,31	379	0,13125	1,002E-03	1,021E-03	1,7538E+11
1,57	382	0,10942	1,213E-03	1,223E-03	1,7349E+11
1,53	391	0,1124	1,181E-03	1,192E-03	1,7757E+11
1,72	399	0,10013	1,332E-03	1,340E-03	1,7933E+11
1,8	414	0,09954	1,395E-03	1,403E-03	1,7187E+11
1,72	423	0,1041	1,331E-03	1,340E-03	1,7626E+11
1,83	431	0,09894	1,418E-03	1,426E-03	1,7516E+11
1,56	443	0,11778	1,201E-03	1,216E-03	1,7700E+11
1,83	453	0,10008	1,418E-03	1,426E-03	1,8003E+11
1,85	469	0,10247	1,432E-03	1,442E-03	1,7419E+11
1,82	471	0,10402	1,408E-03	1,418E-03	1,7555E+11
1,97	531	0,10278	1,525E-03	1,535E-03	1,7290E+11
1,85	537	0,1083	1,430E-03	1,442E-03	1,7917E+11
1,72	540	0,11754	1,325E-03	1,340E-03	1,7817E+11

Ricordando che i dati raccolti sono legati dalla relazione

$$(B_z r)^2 = \frac{m}{e} 2 \Delta V$$

è possibile rappresentare $(B_z r)^2$ in funzione di $2\Delta V$ e, applicando il metodo dei minimi quadrati, trovare la miglior stima per il coefficiente angolare rappresentante l'inverso di e / m .

Nel grafico sottostante si rappresenta $(B_z r)^2$ in funzione di $2\Delta V$



I risultati ottenuti sono

$$\frac{m}{e} = 5.7566\tilde{1}10^{-12} \text{ kg/C} \quad \sigma_{m/e} = 6.6776\tilde{4}10^{-12} \text{ kg/C} ;$$

dai quali si ricava

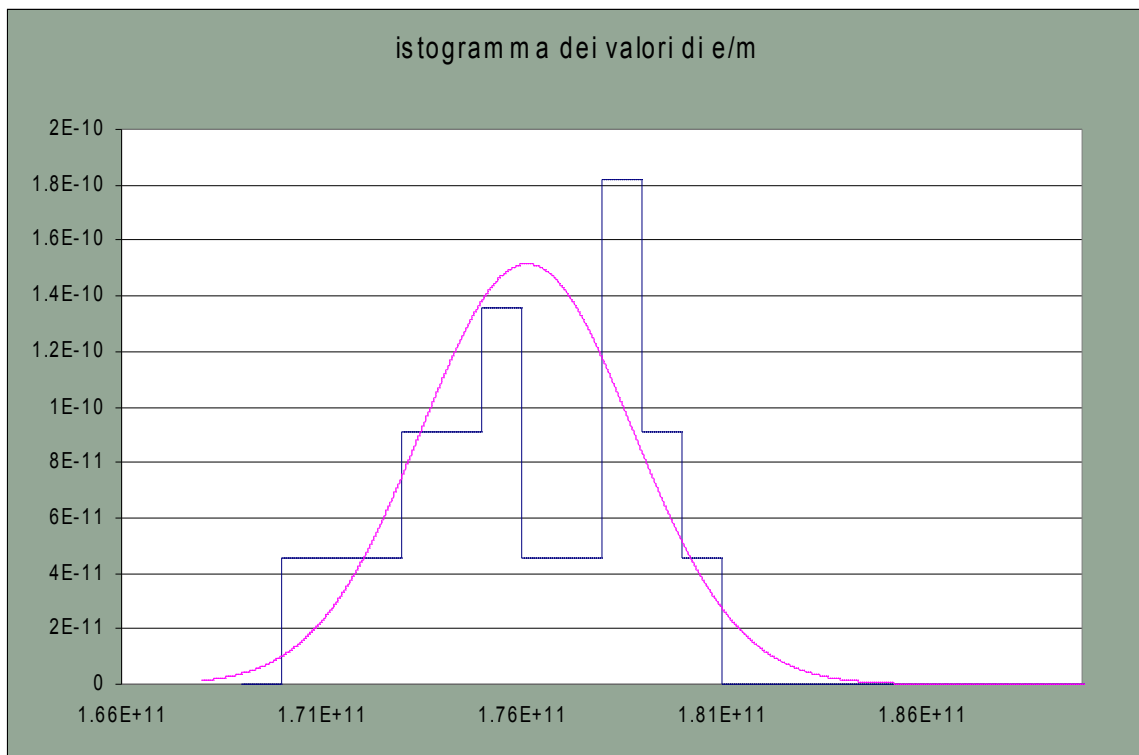
$$\frac{e}{m} = 1.737\tilde{1}10^{+1} \text{ C/kg} \quad \sigma_{e/m} = \left(\frac{m}{e} \right)^2 = 2.015\tilde{1}10^{+9} \text{ C/kg} ;$$

Procedendo in maniera differente è possibile ottenere una seconda stima di $\frac{e}{m}$ data dalla media dei singoli valori di $\frac{e}{m}$ riportati nell'ultima colonna della precedente tabella.

I risultati ottenuti sono

$$\frac{e}{m} = 1.7613 \text{ E}+11 \text{ C/kg} \quad \sigma_{e/m} = 2.6328 \text{ E}+9 \text{ C/kg} ;$$

Nel grafico che segue è riportato l'istogramma delle misure raccolte e la gaussiana interpolante i cui parametri sono dati dalla media e dalla deviazione sopra calcolate.



Poiché per il valore di $\frac{e}{m}$ si hanno due misure derivate da due differenti metodi caratterizzati da precisioni diverse, si è ritenuto opportuno procedere ad una migliore stima del valore di $\frac{e}{m}$ tramite media pesata ottenendo:

$$\frac{e}{m} = 1.7463 \text{ E}+11 \text{ C/kg} \quad \sigma_{e/m} = 1.6159 \text{ E}+9 \text{ C/kg} .$$

Avendo una stima per il valore del rapporto $\frac{e}{m}$ è possibile verificarne la compatibilità con il valore internazionalmente accettato $\frac{e}{m} = 1.7588 \text{ E}+11 \text{ C/kg}$:
 si calcola il numero di deviazioni standard per cui i due valori differiscono

$$t = \left| \frac{e}{m} - \frac{e}{m}_{\text{exp}} \right| / \sigma_{e/m} = 0.77$$

e utilizzando la tabella dell'integrale normale degli errori si trova che la probabilità di ottenere un risultato che differisce dal valore di $\frac{e}{m}$ accettato per t o più deviazioni standard è:

$$P(\text{al di fuori di } t\sigma) = 1 - P(\text{entro } t\sigma) = 44.13\%$$

Si può dunque ritenere che ci sia una buona compatibilità tra il valore sperimentale ed il valore internazionalmente accettato.

Stima del campo magnetico terrestre

Cambiando la posizione precedente delle bobine di Helmholtz è possibile cercare di stimare qualitativamente il valore del campo magnetico terrestre; infatti se si posizionano le bobine di Helmholtz in modo che B_z abbia approssimativamente la stessa direzione del campo magnetico terrestre si avrà che

$$\frac{e}{m} = \frac{2\Delta V}{((B_z \pm B_t)r)^2}$$

dove con B_t si è indicato il campo magnetico terrestre.

Considerando che il campo magnetico terrestre assume valori di qualche decimo di Gauss nelle condizioni in cui si opera in laboratorio vale l'approssimazione $(B_z \pm B_t)^2 \approx B_z^2(1 \pm 2B_t/B_z)$; si potrà dunque scrivere l'equazione

$$B_z = \frac{m}{e} \frac{\Delta V}{B_z r^2} \pm B_t$$

dalla quale è lecito desumere che, rappresentando B_z in funzione di $\frac{\Delta V}{B_z r^2}$, una stima qualitativa per B_t è

data dall'intercetta della retta che interpola i dati sperimentali.

Nella seguente tabella si riportano i dati raccolti in laboratorio nella situazione in cui B_z e B_t sono concordi; per il campo magnetico si riporta come primo valore quello corretto e come secondo valore quello approssimato.

I (A)	ΔV (Volt)	2r (m)	B_z (G)	B_z (G)
1,04	169	0,11147	8,0292	8,1046
1,61	381	0,11217	12,427	12,547
1,75	382	0,10093	13,554	13,638
1,68	402	0,11093	12,973	13,092
1,91	427	0,09949	14,798	14,884
1,7	428	0,10931	13,134	13,248

Il risultato ottenuto è $B_t = 0.368$ G

Analogamente a quanto fatto prima si riportano in tabella i dati raccolti in laboratorio nella situazione in cui B_z e B_t sono discordi.

I (A)	ΔV (Volt)	2r (m)	B_z (G)	B_z (G)
0,95	169	0,10914	7,3402	7,4032
1,59	381	0,09992	12,318	12,391
1,71	382	0,09756	11,195	11,300
1,65	402	0,10293	12,773	12,858
1,83	427	0,09549	13,333	13,404
1,68	428	0,0955	13,028	13,092

Il risultato ottenuto è $B_t = 0.451$ G

La migliore stima per B_t è chiaramente data dalla media dei due valori e risulta essere

$$B_t = 0.41 \text{ G};$$

tale stima è in buon accordo qualitativo con i valori comunemente accettati per il campo magnetico terrestre.