

Ecuación Generalizada de Bessel

Algunas veces una ecuación diferencial dada, después de una transformación de la variable independiente da lugar a una solución que es una combinación lineal de funciones Bessel. Una forma conveniente de encontrar cuando una ecuación diferencial dada posee una solución en términos de funciones Bessel es compararla con la *ecuación generalizada Bessel*:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \left[\frac{1-2m}{x} - 2\alpha \right] \cdot \frac{dR}{dx} + \left[p^2 a^2 x^{2p-2} + \alpha^2 + \frac{\alpha(2m-1)}{x} + \frac{m^2 - p^2 \nu^2}{x^2} \right] R = 0$$

y la correspondiente solución de la cual es

$$R = x^m \cdot e^{\alpha x} \left[c_1 J_\nu(ax^p) + c_2 Y_\nu(ax^p) \right]$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Por ejemplo, comparando la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \beta R = 0$$

con la ecuación generalizada de Bessel de arriba encontramos

$$\alpha = 0, \quad m = 0, \quad p = \frac{1}{2}, \quad p^2 \nu^2 = -\beta, \quad a = 2i\sqrt{\beta}, \quad \nu = 0$$

De aquí que la solución a la ecuación diferencial es en la forma

$$R = c_1 J_0(2i\sqrt{\beta x}) + c_2 Y_0(2i\sqrt{\beta x})$$

o

$$R = c_1 I_0(2\sqrt{\beta x}) + c_2 K_0(2\sqrt{\beta x})$$

la cual involucra funciones Bessel.