# 3.2.2. Convecția la mişcarea liberă (naturală) a fluidului

## 3.2.2.1. Curgerea în spații largi

### 3.2.2.1.1. Convecția liberă pe suprafețe verticale

Se consideră o suprafață plană verticală care se află în contact cu un fluid staționar având temperatura mai mică decât cea a suprafeței.

Diferențele de densitate generează, în apropierea suprafeței plăcii, un strat limita în care fluidul are o mişcare ascensională. Pentru simplificare, se consideră grosimea stratului limită dinamic egală cu grosimea stratului limită termic.

În interiorul stratului limită, atât viteza cât şi temperatura variază liniar în lungul plăcii (pe înălțimea acesteia). În prima parte a plăcii, mişcarea fluidului are caracter laminar, după care devine turbulentă.

Fluidul este considerat incompresibil iar proprietățile fizice ale acestuia, cu excepția densității, nu depind de temperatură.

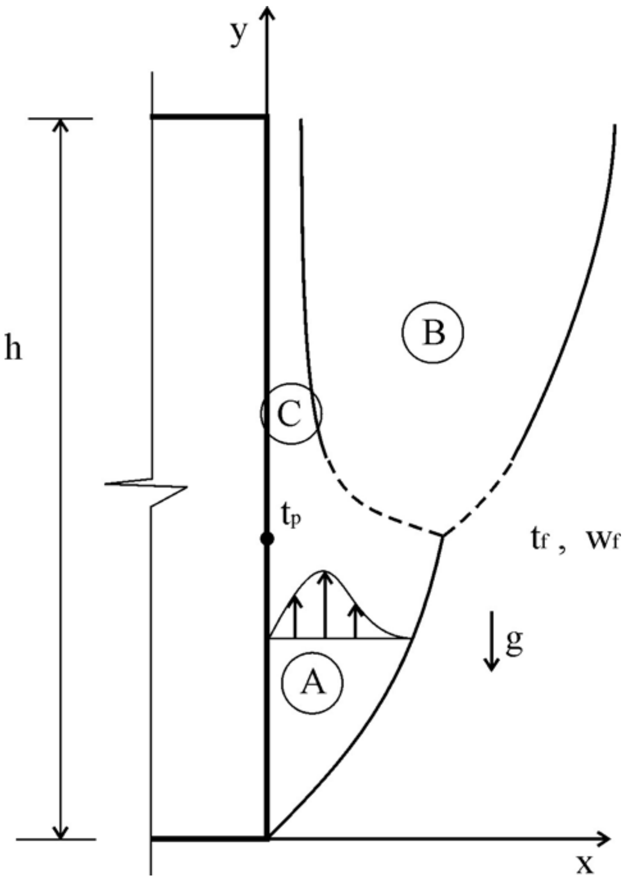



**Fig. 3.24:** Schița plăcii verticale

Ipoteze: $w_f = 0$

$t_p > t_f$

$\delta_d = \delta_t = \delta$

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = const. \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = const.; \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$c_p, \lambda, \nu, a \neq f(t)$$

$$\rho = \rho(t)$$

zona A: stat limită laminar

zona B: strat limită turbulent

zona C: film (substrat) laminar

Se analizează variația vitezei şi a temperaturii în stratul limită laminar.
Ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}=0 \quad \rightarrow \quad w_x=-x\cdot\frac{\partial w_y}{\partial y}$$

Ecuația de mişcare pe direcția $y$:

$$w_x\cdot\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\cdot\frac{\partial w_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\cdot\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}-g$$

Se substituie componenta orizontală a vitezei şi gradientul presiunii pe verticală, care este dat de forțele masice gravitaționale.

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho_f\cdot g$$

şi se obține:

$$-x\cdot\frac{\partial w_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\cdot\frac{\partial w_y}{\partial y}=g\cdot\left(\frac{\rho_f}{\rho}-1\right)+\nu\cdot\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}$$

Se defineşte coeficientul de dilatare volumică, $\beta$:

$$\beta=\frac{1}{v}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{v_f}\cdot\frac{v-v_f}{T-T_f}=\rho_f\cdot\frac{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_f}}{t-t_f}=\frac{\rho_f-\rho}{\rho\cdot\left(t-t_f\right)}$$

$$\frac{\rho_f}{\rho}-1=\beta\cdot\left(t-t_f\right)$$

Ecuația de mişcare devine:

$$-x\cdot\frac{\partial w_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\cdot\frac{\partial w_y}{\partial y}=g\cdot\beta\cdot\left(t-t_f\right)+\nu\cdot\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}$$

***Remarcă***: Spre deosebire de convecția forțată, unde distribuția vitezei era independentă de temperatură, la convecția liberă în ecuația de mişcare apare şi temperatura, $t$, care se determină împreună cu componenta verticală a vitezei, $w_y$, prin rezolvarea simultană a sistemului de ecuații diferențiale.

Ecuaţia căldurii:

$$w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$-x \cdot \frac{\partial w_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Atât soluţia generală a componentei verticale a vitezei cât şi cea a temperaturii în interiorul stratul limită laminar se consideră ca fiind funcţii polinomiale de gradul trei.

$$w_y = C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4$$

$$t = C_5 \cdot x^3 + C_6 \cdot x^2 + C_7 \cdot x + C_8$$

Cele opt constante se determină prin impunerea condiţiilor la frontierele stratului limită laminar.

$$\text{la } x = 0 \rightarrow \begin{cases} w_y = 0; & \dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = -\dfrac{g \cdot \beta}{\nu} \cdot \left(t_p - t_f\right) \\ t = t_p\ ; & \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{la } x = \delta \rightarrow \begin{cases} w_y = 0; & \dfrac{\partial w_y}{\partial x} = 0 \\ t = t_f\ ; & \dfrac{\partial t}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Soluţiile particulare ale componentei verticale a vitezei, respectiv a temperaturii, sunt:

$$w_y = \frac{g \cdot \beta \cdot \delta^2 \cdot \left(t_p - t_f\right)}{4\nu} \cdot \frac{x}{\delta} \cdot \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2$$

$$t = t_f + \left(t_p - t_f\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2$$

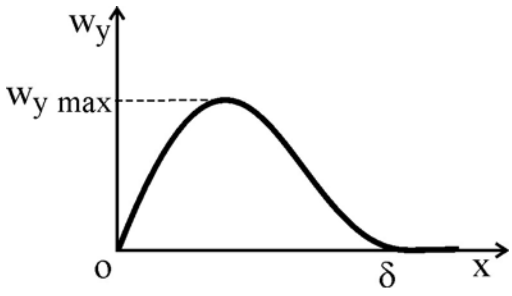



**Fig. 3.25:** Distribuția vitezei

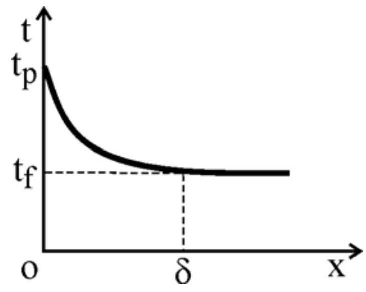



**Fig. 3.26:** Distribuția temperaturii

Expresia variației grosimii stratului limită $\delta$ a fost obținută pe baza cercetărilor experimentale:

$$\delta = 3{,}93 \cdot y \cdot \left( \frac{0{,}952 + Pr}{Gr \cdot Pr^2} \right)^{0{,}25}$$

unde $Pr = \dfrac{\nu}{a}$ şi $Gr = \dfrac{g \cdot y^3}{\nu^2} \cdot \beta \cdot \left( t_p - t_f \right)$.

Coeficientul local de convecție, $\alpha_y$ se determină din bilanțul termic unitar local:

$$-\lambda \cdot \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha_y \cdot \left( t_p - t_f \right) \quad \rightarrow \quad -\lambda \cdot \left( t_p - t_f \right) \cdot \left( -\frac{2}{\delta} \right) = \alpha_y \cdot \left( t_p - t_f \right)$$

$$\alpha_y = \frac{2\lambda}{\delta} = 0{,}508 \cdot \frac{\lambda}{y} \cdot \left( \frac{Gr \cdot \mathrm{Pr}^2}{0{,}952 + \mathrm{Pr}} \right)^{0{,}25}$$

Criteriul determinant local Nusselt, $Nu_y$ va avea expresia:

$$Nu_y = \frac{\alpha \cdot y}{\lambda} = 0{,}508 \cdot \left( \frac{Gr \cdot \mathrm{Pr}^2}{0{,}952 + \mathrm{Pr}} \right)^{0{,}25}$$

## 3.2.2.1.2. Relații empirice de calcul

În practica inginerească, coeficientul de convecție global $\alpha$ (pentru întreaga placă) se determină cu ajutorul criteriului Nusselt:

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{l_c} \quad [\mathrm{W/m^2 \cdot K}]$$

$$Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^n \cdot \left(Pr/Pr_p\right)^{0,25} = C \cdot Ra^n \cdot \left(Pr/Pr_p\right)^{0,25}$$

unde coeficientul $C$ şi exponentul $n$ depind de regimul de curgere prin criteriul Rayleigh ( $Ra = Gr \cdot \mathrm{Pr}$ ):

$$C, n = f(Ra)$$

**Tab. 3.7:** *C* şi *n* pentru suprafețe verticale

| ***Ra*** | $< 10^3$ | $10^3 ... 10^9$ | $10^9 ... 10^{13}$ |
|---|---|---|---|
| ***C*** | 1 | 0,59 | 0,13 |
| ***n*** | 0 | 0,25 | 0,33 |

- Lungimea caracteristică este înălțimea plăcii (conductei).

$$l_c = h$$

- Temperatura de referință la care se determină proprietățile fluidului este temperatura fluidului înafara stratului limită.

$$t_{ref} = t_f$$

# 3.2.2.2. Curgerea în spații limitate

## 3.2.2.2.1. Convecția liberă între două suprafețe verticale

Se consideră două plăci plane aşezate vertical şi paralel la o distanță relativ mică una de cealaltă şi având temperaturi diferite dar, constante şi uniforme pe fiecare placă. Fluidul dintre cele două plăci se mişcă numai datorită gradientului de densitate pe verticală.

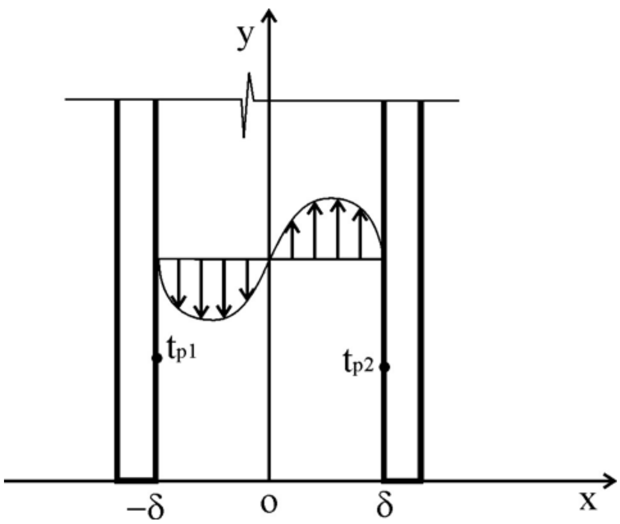



**Fig. 3.27:** Schița celor două plăcii verticale

Ipoteze: $t_{p1} < t_{p2}$

$w_x = 0$

$\frac{\partial t}{\partial y} = 0$

- Ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

Soluția generală a câmpului de temperaturi de determină prin integrarea ecuației căldurii:

$$w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$$

$$t = C_1 \cdot x + C_2$$

***Remarcă***: Temperatura are o variație liniară.

Soluția particulară a câmpului de temperaturi rezultă din impunerea condițiilor la limită:

la $x = 0 \rightarrow t = \frac{t_{p1} + t_{p2}}{2} = t_f$

la $x = \delta \rightarrow t = t_{p2}$

$$t\big|_{x=0} = C_2 = \frac{t_{p1} + t_{p2}}{2} = t_f \quad \rightarrow \quad C_2 = t_f$$

$$t\big|_{x=\delta} = C_1 \cdot \delta + \frac{t_{p1} + t_{p2}}{2} = t_{p2} \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{t_{p2} - t_{p1}}{2\delta}$$

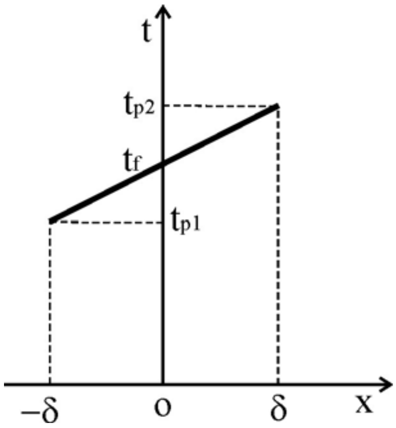



**Fig. 3.28**: Distribuția temperaturii

Rezultă că:

$$t = t_f + \frac{t_{p2} - t_{p1}}{2\delta} \cdot x$$

Soluția generală a componentei verticale a vitezei, $w_y$, rezultă din integrarea ecuației de mişcare pe direcția $y$:

$$w_x \cdot \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_y}{\partial y} = g \cdot \beta \cdot \left(t - t_f\right) + \nu \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = -\frac{g \cdot \beta}{\nu} \cdot \left(t - t_f\right) = -\frac{g \cdot \beta}{\nu} \cdot \left( t_f + \frac{t_{p2} - t_{p1}}{2\delta} \cdot x - t_f \right)$$

$$\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = -\frac{g \cdot \beta}{2\delta \cdot \nu} \cdot \left(t_{p2} - t_{p1}\right) \cdot x$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} = -\frac{g \cdot \beta}{4\delta \cdot \nu} \cdot \left(t_{p2} - t_{p1}\right) \cdot x^2 + C_1$$

$$w_y = -\frac{g \cdot \beta}{12\delta \cdot \nu} \cdot \left(t_{p2} - t_{p1}\right) \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

Soluția particulară a componentei verticale a vitezei, $w_y$, rezultă din impunerea condițiilor de unicitate:

la $x = 0 \rightarrow w_y = 0$

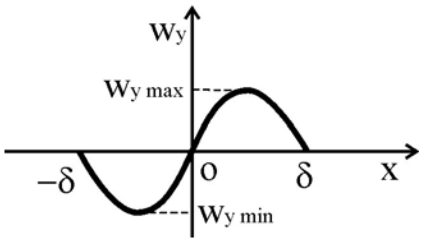
la $x = \delta \rightarrow w_y = 0$

$$w_y\Big|_{x=0} = C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$w_y\Big|_{x=\delta} = -\frac{g \cdot \beta}{12\delta \cdot \nu} \cdot \left(t_{p2} - t_{p1}\right) \cdot \delta^3 + C_1 \cdot \delta = 0$$

$$C_1 = \frac{g \cdot \beta}{12\nu} \cdot \left(t_{p2} - t_{p1}\right) \cdot \delta$$

$$w_y = -\frac{g \cdot \beta}{12\delta \cdot \nu} \cdot \left(t_{p2} - t_{p1}\right) \cdot x^3 + \frac{g \cdot \beta \cdot \delta}{12\nu} \cdot \left(t_{p2} - t_{p1}\right) \cdot x$$




$$w_y = \frac{g \cdot \beta \cdot \delta^2}{12\nu} \cdot \left(t_{p2} - t_{p1}\right) \cdot \left[\frac{x}{\delta} - \left(\frac{x}{\delta}\right)^3\right]$$

**Fig. 3.29:** Distribuția vitezei

## 3.2.2.2.2. Relații empirice de calcul

În practica inginerească, coeficientul de convecție, $\alpha$, se determină cu ajutorul criteriului Nusselt:

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{l_c} \qquad [\mathrm{W/m^2 \cdot K}]$$

$$Nu = C \cdot \left(Gr \cdot Pr\right)^n = C \cdot Ra^n$$

unde coeficientul $C$ şi exponentul $n$ depind de regimul de curgere :

$$C, n = f\left(Ra\right)$$

**Tab. 3.8:** *C* şi *n* pentru suprafețe verticale

| ***Ra*** | $< 10^3$ | $10^3 ... 10^6$ | $10^6 ... 10^{10}$ |
|---|---|---|---|
| ***C*** | 1 | 0,105 | 0,4 |
| ***n*** | 0 | 0,3 | 0,2 |

***Observaţie***: Pentru calcule aproximative în intervalul $10^2 < Ra < 10^{10}$, se pot folosi următoarele valori: $C = 0{,}18$ şi $n = 0{,}25$

- Lungimea caracteristică este distanța dintre plăci.

$$l_c = 2\delta$$

- Temperatura de referință la care se determină proprietățile fluidului este temperatura medie a fluidului.

$$t_{ref} = t_f = \frac{t_{p1} + t_{p2}}{2}$$

# 3.3. Convecția căldurii cu schimbare de fază

Atunci când fluidul se află la starea de saturație, transferul de căldură dintre el şi suprafața cu care vine în contact se realizează pe baza căldurii latente de schimbare de fază a fluidului.

Dacă suprafața are temperatura mai mică decât cea de saturație, fluidul se transformă din vapori în lichid prin cedarea căldurii latente de condensare iar procesul poartă numele de condensare a vaporilor.

Dacă suprafața are temperatura mai mare decât cea de saturație, fluidul se transformă din lichid în vapori prin primirea căldurii latente de vaporizare iar procesul poartă numele de fierbere a lichidului.

Condensarea şi fierberea sunt caracterizate de valori mari ale coeficientului de convecție $\alpha$, de ordinul miilor şi zecilor de mii de W/m$^2$·K. Pentru studiul procesele de transfer de căldură cu schimbare de fază se introduc criteriile Jakob (*Ja*) şi Kutateladze (*Ku*):

$$Ja = \frac{c_p \cdot \Delta t}{r} \qquad \text{şi} \qquad Ku = \frac{r}{c_p \cdot \Delta t} \qquad [-]$$

unde $r$ este căldura latentă de schimbare de fază (de vaporizare sau de condensare) în J/kg, $c_p$ este căldura specifică la presiune constantă în J/kg·K, iar $\Delta t$ este diferența de temperatură în K.