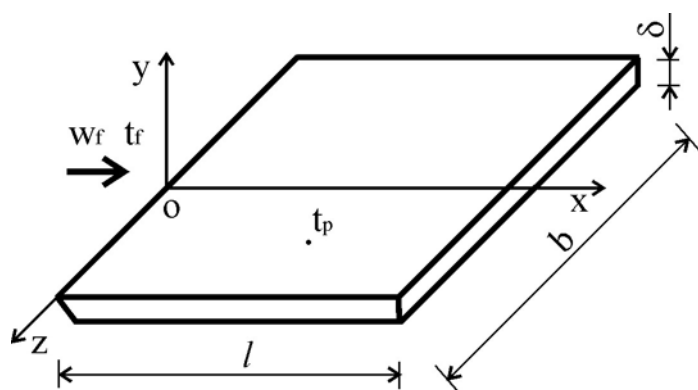


3.2.1.2. Curgerea paralelă cu suprafețe plane

Se consideră o placă plană subțire, în lungul căreia curge un fluid incompresibil cu temperatura mai mică decât cea a plăcii, având presiunea constantă și viteza uniformă. Forțele masice se consideră neglijabile iar proprietățile fizice ale fluidului independente de temperatură.



Ipoteze:

$$\delta \ll l$$

$$\delta \ll b$$

$$w_z = 0;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0;$$

$$t_f < t_p, \quad w_f = \text{const.};$$

$$p = \text{const.}; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$\rho, c_p, \lambda, \nu \neq f(t); \quad \vec{g} = 0.$$

Fig. 3.10: Schița plăcii plane

Efectele de viscozitate din apropierea suprafeței plăcii sunt importante. Această zonă se numește **strat limită dinamic** (SLD).

Grosimea stratului limită dinamic, δ_d , se consideră distanța, în direcția normalei la suprafața plăcii, la care componenta longitudinală a vitezei fluidului devine egală cu 99% din viteza curentului liber (din afara SLD). Grosimea stratului limită dinamic crește în direcția de curgere a fluidului.

$$w_x|_{y=\delta_d} = 0,99 \cdot w_f \quad [\text{m/s}]$$

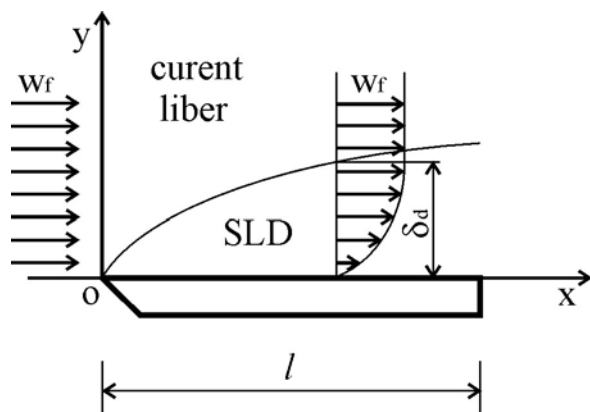


Fig. 3.11: Stratul limită dinamic

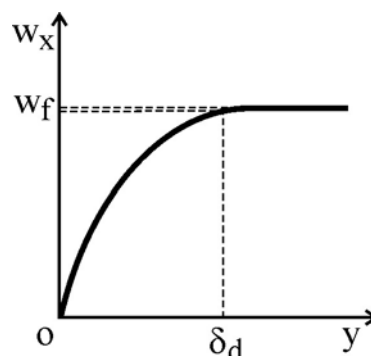


Fig. 3.12: Variația vitezei fluidului

Prin analogie cu stratul limită dinamic, se definește **stratul limită termic** (SLT) ca zona din apropierea suprafeței plăcii în care gradientul de temperatură este important.

Grosimea stratului limită termic, δ_t , se consideră distanța, în direcția normalei la suprafață, la care temperatura fluidului diferă față de temperatura curentului liber (din afara SLT) cu 1% din diferența dintre temperatura peretelui și cea a curentului liber.

$$t|_{y=\delta_t} = t_f + 0,01 \cdot (t_p - t_f) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

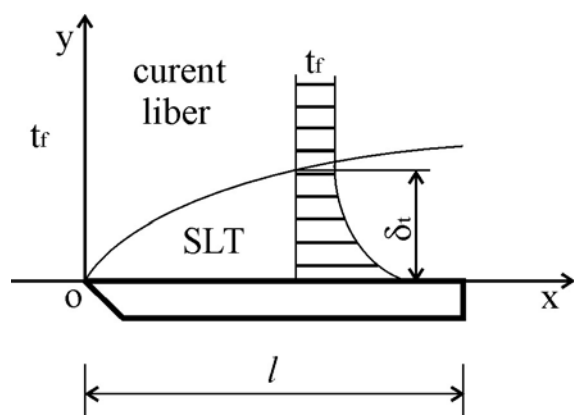


Fig. 3.13: Stratul limită termic

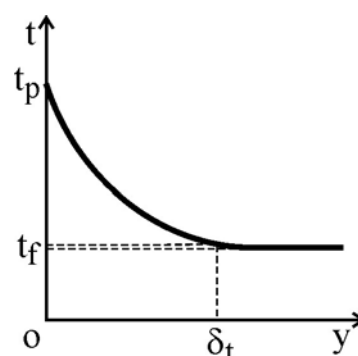


Fig. 3.14: Variația temperaturii fluidului

3.2.1.2.1. Regimul de curgere laminar ($Re < 10^5$)

Fluidul curge paralel cu placa, cu viteză moderată. În interiorul straturilor limită, atât componenta longitudinală a vitezei cât și temperatura au variație liniară în direcția de curgere a fluidului (în lungul plăcii).

$$\left. \frac{\partial w_x}{\partial x} \right|_y = \text{const.}, \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = 0$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_y = \text{const.}, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$$

Componenta longitudinală a vitezei, w_x , se determină prin integrarea ecuațiilor diferențiale de continuitate și de mișcare.

- Ecuția de continuitate:
$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

$$w_y = -\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dy \rightarrow w_y = -\frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot y$$

- Ecuția de mișcare pentru direcția longitudinală, x :

$$w_x \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{l}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)$$

$$w_x \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} \cdot y = \nu \cdot \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

Variația componentei longitudinale a vitezei, w_x , are aspect similar indiferent de distanța x , ceea ce matematic se poate scrie astfel:

$$\frac{w_x}{w_f} = f\left(\frac{y}{\delta_d}\right) \rightarrow w_x = w_f \cdot f\left(\frac{y}{\delta_d}\right)$$

unde w_f este viteza fluidului înafara stratului limită dinamic iar δ_d este grosimea stratului limită dinamic.

Soluția particulară se determină prin impunerea condițiilor la frontierele stratului limită dinamic:

la $y = 0 \rightarrow w_x = 0$; $\frac{\partial w_x}{\partial y} = const.$; $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0$

la $y = \delta_d \rightarrow w_x = w_f$; $\frac{\partial w_x}{\partial y} = 0$

Grosimea stratului limită dinamic δ_d , se poate determina cu ajutorul teoriei similitudinii aplicată ecuației diferențiale de mișcare:

$$\frac{(C_{w_x})^2}{C_x} = C_\nu \cdot \frac{C_{w_x}}{(C_y)^2} \rightarrow \frac{C_{w_x} \cdot (C_y)^2}{C_x \cdot C_\nu} = 1 \rightarrow \frac{w_x \cdot y^2}{\nu \cdot x} = const.$$

La granița SLD ($y = \delta_d$), componenta longitudinală a vitezei fluidului, w_x , devine egală cu viteza liberă a fluidului w_f . Rezultă că:

$$\frac{w_f \cdot \delta_d^2}{\nu \cdot x} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \delta_d^2 = \text{const.} \cdot \frac{\nu \cdot x}{w_f}$$

$$\delta_d = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{w_f}} = \text{const.} \cdot \frac{x}{\sqrt{\frac{w_f \cdot x}{\nu}}} = \text{const.} \cdot \frac{x}{Re^{0,5}}$$

Soluția exactă a grosimii SLD a fost obținută pentru prima dată de Blasius în 1908:

$$\delta_d = 5 \cdot \frac{x}{Re^{0,5}}$$

Soluția generală a câmpului de temperaturi se determină prin integrarea ecuației diferențiale a căldurii:

- Ecuația căldurii:

$$w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

$$w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

Ca și în cazul vitezei, variația temperaturii are aspect similar indiferent de distanța x .

$$\frac{t - t_p}{t_f - t_p} = f\left(\frac{y}{\delta_t}\right) \quad \rightarrow \quad t = t_p - (t_p - t_f) \cdot f\left(\frac{y}{\delta_t}\right)$$

unde t_f este temperatura fluidului înafara stratului limită termic iar δ_t este grosimea stratului limită termic.

Soluția particulară a câmpului de temperaturi se determină prin impunerea condițiilor la frontierele stratului limită termic:

$$\text{la } y = 0 \rightarrow t = t_p ; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \text{const.} ; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{la } y = \delta_t \rightarrow t = t_f ; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

Grosimea stratului limită termic δ_t , se poate determina cu ajutorul teoriei similitudinii aplicată ecuației diferențiale a căldurii:

$$\frac{C_{w_x} \cdot C_t}{C_x} = C_a \cdot \frac{C_t}{(C_y)^2} \rightarrow \frac{C_{w_x} \cdot (C_y)^2}{C_a \cdot C_x} = 1$$

$$\frac{w_x \cdot y^2}{a \cdot x} = \text{const.} \rightarrow y = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{a \cdot x}{w_x}}$$

Se disting două cazuri:

Cazul 1 atunci când grosimea stratului limită termic este egală sau mai mare decât cea a stratului limită dinamic, $\delta_t \geq \delta_d$, pentru care condiția la limită devine:

$$\text{la } y = \delta_t \rightarrow w_x = w_f$$

$$\delta_t = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{a \cdot x}{w_f}} = \text{const.} \cdot \frac{x}{\sqrt{\frac{w_f \cdot x}{a}}} = \text{const.} \cdot \frac{x}{Pe^{0,5}} = \text{const.} \cdot \frac{x}{(Re \cdot Pr)^{0,5}}$$

Cazul 2 atunci când grosimea stratului limită termic este mai mică decât cea a stratului limită dinamic, $\delta_t < \delta_d$, pentru care condiția la limită devine:

$$\text{la } y = \delta_t \rightarrow w_x < w_f$$

$$\delta_t = \text{const.} \cdot \frac{x}{Re^{0,5} \cdot Pr^{0,33}}$$

Analiza comparativă a grosimilor SLD și SLT

a) - cazul metalelor lichide

$$Pr \ll 1; \quad \delta_t > \delta_d$$

$$\frac{\delta_d}{\delta_t} = Pr^{0,5}$$

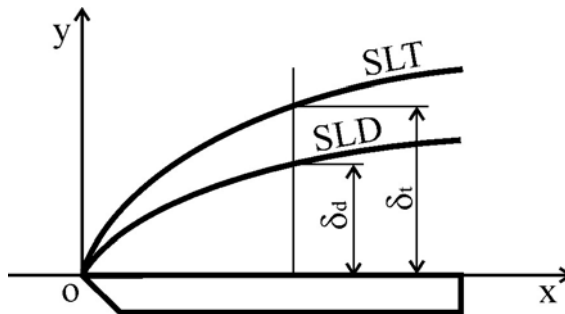


Fig. 3.15: Cazul metalelor lichide

b) - cazul gazelor

$$Pr \cong 1; \quad \delta_t = \delta_d$$

$$\frac{\delta_d}{\delta_t} = Pr^{0,5} = 1$$

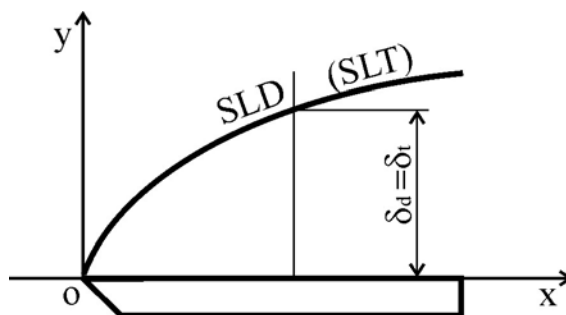


Fig. 3.16: Cazul gazelor

c) - cazul lichidelor obișnuite

$$Pr \gg 1; \quad \delta_t < \delta_d$$

$$\frac{\delta_d}{\delta_t} = Pr^{0,33}$$

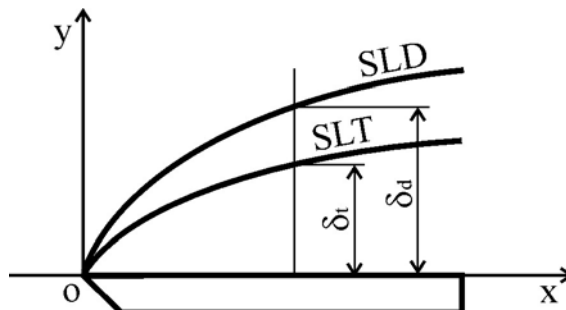


Fig. 3.17: Cazul lichidelor obișnuite

3.2.1.2.2. Regimul de curgere turbulent ($Re > 10^5$)

Se consideră curgerea fluidului cu viteză mare, paralelă cu placa. În prima parte a plăcii, curgerea are aspect laminar, apoi trece printr-o zonă de tranziție, după care devine turbulentă.

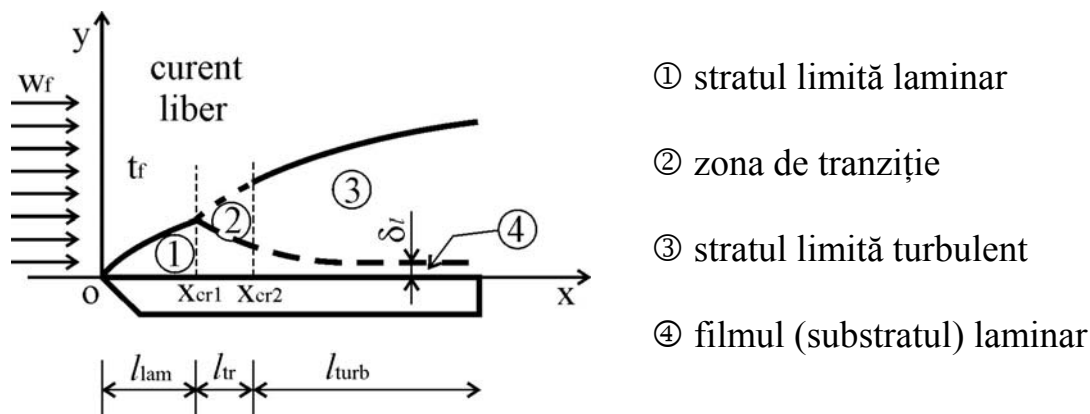


Fig. 3.18: Curgerea turbulentă peste placa plană

În zona turbulentă, atât viteza cât și temperatura oscilează în jurul valorilor medii.

$$w = \bar{w} + w' \quad \text{și} \quad t = \bar{t} + t'$$

În apropierea suprafeței plăcii corespunzătoare zonei turbulente, se formează un strat subțire de fluid, denumit **film laminar**, de grosime δ_l , în care gradientul vitezei este foarte mare și practic constant.

Soluția generală a componentei longitudinale a vitezei medii se determină prin integrarea ecuației de continuitate:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{w}_x + w_x') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{w}_y + w_y') = 0$$

și a ecuației de mișcare pentru direcția longitudinală x :

$$(\bar{w}_x + w_x') \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\bar{w}_x + w_x') + (\bar{w}_y + w_y') \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\bar{w}_x + w_x') = \nu \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{w}_x + w_x')$$

Termenii conținând derivatele perturbației vitezei instantanee pot fi separați și grupați după cele două direcții, iar ecuația de mișcare se scrie astfel:

$$\bar{w}_x \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \nu \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \overline{w_x' \cdot w_y'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w_x' \cdot w_y'}}{\partial y} \right)$$

În zona turbulentă a SLD, se poate considera că viteza medie variază după o funcție de tip putere (von Karman) de forma:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_f} = \left(\frac{y}{\delta_d} \right)^{1/7} \rightarrow \bar{w}_x = w_f \cdot \left(\frac{y}{\delta_d} \right)^{1/7}$$

Grosimea SLD în zona turbulentă s-a stabilit pe baza cercetărilor experimentale:

$$\delta_d = 0,376 \cdot \frac{x}{Re^{0,2}}$$

Soluția generală a temperaturii medii se determină din ecuația căldurii:

$$(\bar{w}_x + w_x') \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\bar{t} + t') + (\bar{w}_y + w_y') \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\bar{t} + t') = a \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{t} + t')$$

Temperatura medie la o distanță dată x are o variație de tip putere.

$$\frac{\bar{t} - t_p}{t_f - t_p} = \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^n \rightarrow \bar{t} = t_p - (t_p - t_f) \cdot \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^n$$

3.2.1.2.3. Relații empirice de calcul

În practica inginerescă, coeficientul de convecție α se determină cu ajutorul criteriului Nusselt:

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{l_c} \quad [\text{W/m}^2 \cdot \text{K}]$$

Pentru curgerea peste o placă plană se pot folosi următoarele relații criteriale:

- pentru curgerea în regim laminar ($Re < 10^5$):

$$Nu = 0,664 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{0,33}$$

- pentru curgerea în regim turbulent ($Re > 10^5$):

$$Nu = 0,036 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,33}$$

- Lungimea caracteristică, l_c , este lungimea plăcii (dimensiunea paralelă cu direcția de curgere a fluidului).

$$l_c = l$$

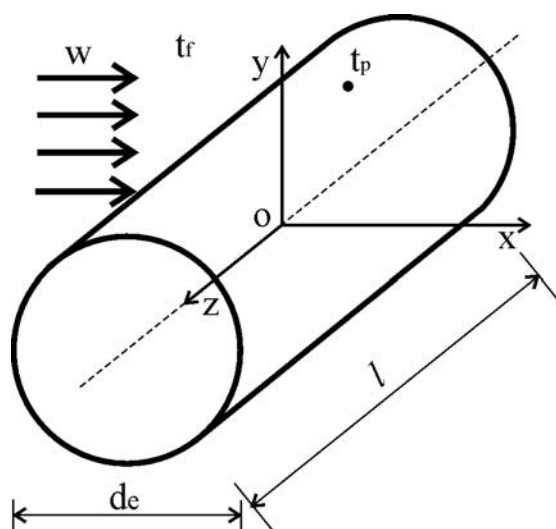
- Temperatura de referință la care se determină proprietățile fluidului este temperatura medie a acestuia din stratul limită.

$$t_{ref} = t_{fm} = \frac{t_f + t_p}{2}$$

3.2.1.3. Curgerea transversală pe suprafețe cilindrice

3.2.1.3.1. Conducta izolată

Se consideră o conductă circulară, dreaptă și netedă cu lungimea mult mai mare decât diametrul său exterior, peste care circulă transversal un curent liber de fluid având temperatura diferită de cea a conductei. Fluidul este incompresibil, are viteză uniformă și proprietățile lui fizice nu depind de temperatură. Forțele masice se consideră neglijabile.



Ipoteze: $l \gg d_e = 2R$

$$w_z = 0$$

$$t_f \neq t_p$$

$$w_f = w_f(x) = \text{const.}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0;$$

$$\rho, c_p, \lambda, \nu \neq f(t);$$

$$\vec{g} = 0$$

Fig. 3.19: Schița conductei circulare

Punctul în care direcția curentului liber intersectează perpendicular suprafața conductei se numește **punct de stagnare**.

Se definește coordonata unghiulară φ ca având originea în punctul de stagnare:

$$\varphi_{stg} = 0$$

La valori mici ale vitezei fluidului ($Re < 1$), stratul limită format în jurul conductei este asemănător cu cel de la placa plană.

La viteze mai mari, stratul limită se desprinde de suprafața conductei într-un punct numit **punct de separare**, aflat la o distanță de punctul de stagnare care depinde de regimul de curgere. În punctul de separare, gradientul vitezei la suprafața conductei este nul.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \varphi_{sep} \\ r = R \end{array} \right\} \Rightarrow w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

După punctul de separare, în apropierea suprafeței se formează un strat în interiorul căruia viteza fluidului are sens invers față de curentul liber (principal).

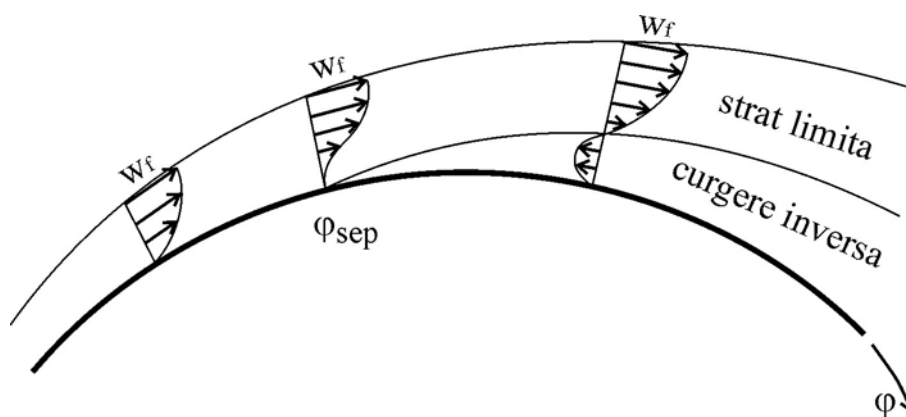


Fig. 3.20: Curgerea fluidului peste o suprafață curbă

Integrarea ecuațiilor diferențiale ale stratului limită este dificilă și de aceea, în practica inginerescă, se utilizează relații empirice de calcul.

3.2.1.3.2. Fasciculul de conducte

Se consideră un fascicul de conducte peste care curge transversal un fluid incompresibil având temperatura diferită de cea a suprafețelor conductelor.

Rândurile de conducte orientate perpendicular pe direcția de curgere a fluidului se numesc **rânduri transversale**, iar cele orientate în lungul direcției de curgere se numesc **rânduri longitudinale**. Distanța dintre axele a două conducte alăturate, aparținând unui rând transversal, se numește **pas transversal** și se notează cu s_t sau s_1 , în timp ce distanța dintre două rânduri transversale se numește **pas longitudinal** și se notează cu s_l sau s_2 .

Așezarea conductelor în linie (în coridor)

Atât rândurile longitudinale cât și cele transversale au pași constanți.

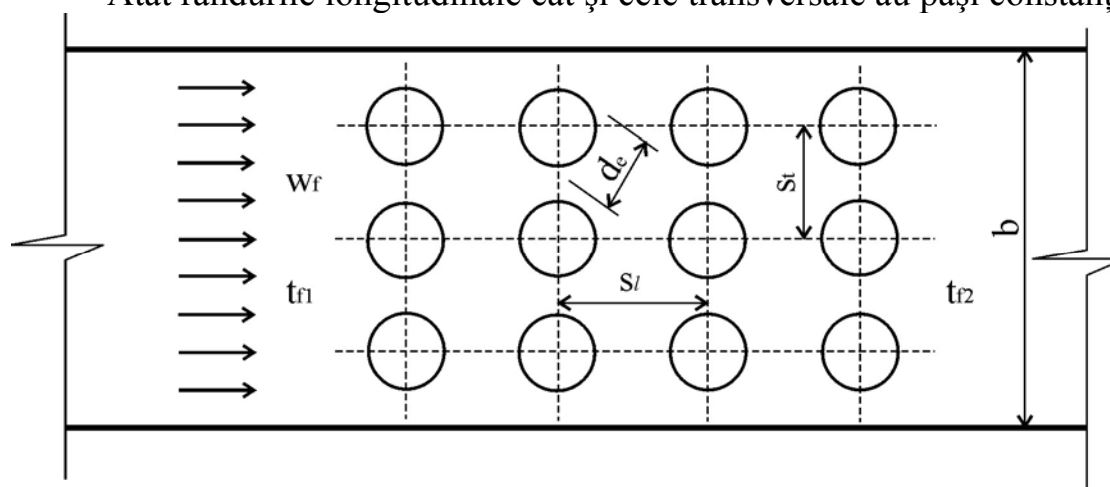


Fig. 3.21: Fascicul de conducte așezate în linie (4 rânduri transversale și 3 rânduri longitudinale)

Așezarea conductelor decalat (în eșichier)

Rândurile transversale pare (R_{t2}, R_{t4}, \dots) sunt decalate față de cele impare (R_{t1}, R_{t3}, \dots) cu jumătate din pasul transversal s_t , pașii pe cele două direcții rămânând constanți.

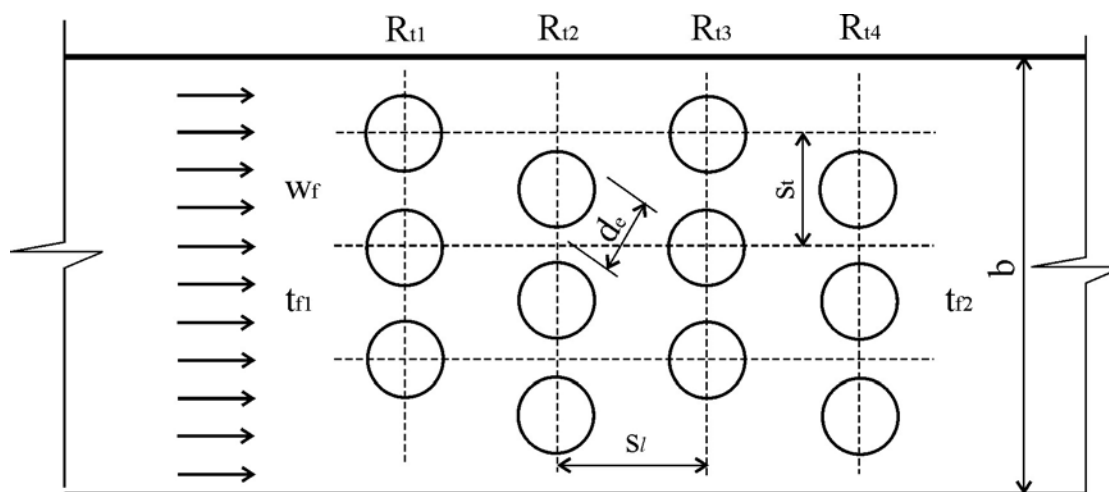


Fig. 3.22: Fascicul de conducte așezate decalat (4 rânduri transversale și 3 rânduri longitudinale)

3.2.1.3.3. Relații empirice de calcul

În practica inginerescă, coeficientul de convecție α se determină cu ajutorul criteriului Nusselt:

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{l_c} \quad [\text{W/m}^2 \cdot \text{K}]$$

Pentru curgerea transversală peste o conductă izolată, criteriul Nusselt se poate calcula cu următoarea relație:

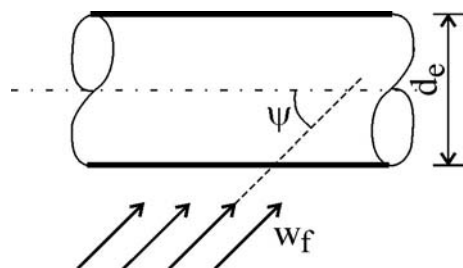
$$Nu = C \cdot Re^n \cdot Pr^{0,33} \cdot (Pr/Pr_p)^{0,25} \cdot \varepsilon_\psi$$

unde coeficientul C și exponentul n depind de regimul de curgere :

$$C, n = f(Re)$$

Tab. 3.2: C și n pentru o conductă izolată

Re	0,1 ... 10	10 ... 10 ³	10 ³ ... 10 ⁵
C	0,9	0,5	0,25
n	0,4	0,5	0,6



ϵ_{ψ} este coeficientul de corecție pentru unghiul de atac, ψ , care reprezintă unghiul format de direcția de curgere a fluidului cu axa conductei:

$$\epsilon_{\psi} = f(\psi)$$

Fig. 3.23: Unghiul de atac ψ

Tab. 3.3: ϵ_{ψ} în funcție de unghiul de atac ψ

ψ	90	80	70	60	50	40	30	20	10
ϵ_{ψ}	1	1	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

Observație: Atunci când unghiul de atac este zero, criteriul Nusselt se calculează cu expresia de la curgerea paralelă cu o suprafață plană.

- Lungimea caracteristică este diametrul exterior al conductei.

$$l_c = d_e$$

- Temperatura de referință la care se determină proprietățile fluidului este temperatura curentului liber de fluid.

$$t_{ref} = t_f$$

- Viteza de referință la care se calculează criteriului Reynolds este viteza curentului liber de fluid.

$$w_{ref} = w_f$$

Pentru curgerea transversală peste un fascicul de conducte, având diametre identice și pași constanți, criteriul Nusselt se calculează cu următoarea relație:

$$Nu = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} Nu_i}{n_t}$$

unde Nu_i reprezintă criteriul Nusselt pentru rândul transversal "i" iar n_t numărul rândurilor transversale.

$$Nu_i = C \cdot Re^n \cdot Pr^{0,33} \cdot (Pr/Pr_p)^{0,25} \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_s$$

- Lungimea caracteristică este diametrul exterior al conductei.

$$l_c = d_e$$

- Temperatura de referință la care se determină proprietățile fluidului este media dintre temperaturile fluidului la intrarea, respectiv la ieșirea din fasciculul de conducte.

$$t_{ref} = \frac{t_{f1} + t_{f2}}{2}$$

- Viteza de referință la care se calculează criteriului Reynolds este viteza maximă a fluidului la trecerea prin fascicul, care are loc în secțiunea liberă (minimă) dintre conducte.

$$w_{ref} = w_f \cdot \frac{b}{b - n_l \cdot d_e}$$

unde w_f este viteza fluidului într-o secțiune fără conducte (înainte sau după fasciculul de conducte) iar n_l numărul de conducte aparținând unui rând transversal.

Coeficientul C și exponentul n depind, pentru fiecare din cele două moduri de așezare a conductelor, de regimul de curgere :

$$C, n = f(Re)$$

Tab. 3.4: C și n pentru un fascicul de conducte așezate în linie

Re	$< 10^3$	$10^3 \dots 10^5$
C	0,56	0,23
n	0,5	0,65

Tab. 3.5: C și n pentru un fascicul de conducte așezate decalat

Re	$< 10^3$	$10^3 \dots 10^5$
C	0,56	0,41
n	0,5	0,6

ε_i este coeficientul de corecție pentru rândul transversal "i":

Tab. 3.6: ε_i pentru un fascicul de conducte

Așezarea conductelor	în linie	decalat
ε_1	0,6	0,6
ε_2	0,9	0,7
$\varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$	1	1

ε_s este coeficientul de corecție pentru mărimea pasului longitudinal s_l :

- pentru un fascicul de conducte așezate în linie: $\varepsilon_s = \left(\frac{s_l}{d_e}\right)^{-0,15}$

- pentru un fascicul de conducte așezate decalat:

$$\text{dacă } s_t < 2 \cdot s_l \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = \left(\frac{s_t}{s_l}\right)^{0,167}$$

$$\text{dacă } s_t \geq 2 \cdot s_l \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = 1,12$$