3.2. Convecția căldurii fără schimbare de fază

3.2.1. Mişcarea forțată a fluidului

3.2.1.1. Curgerea în interiorul conductelor şi canalelor

Se consideră o conductă circulară, dreaptă şi netedă, având lungimea mult mai mare decât diametrul interior, prin care circulă un fluid incompresibil cu temperatura mai mică decât cea a peretelui conductei şi ale cărui proprietăți fizice nu variază cu temperatura. Forțele masice se neglijează.

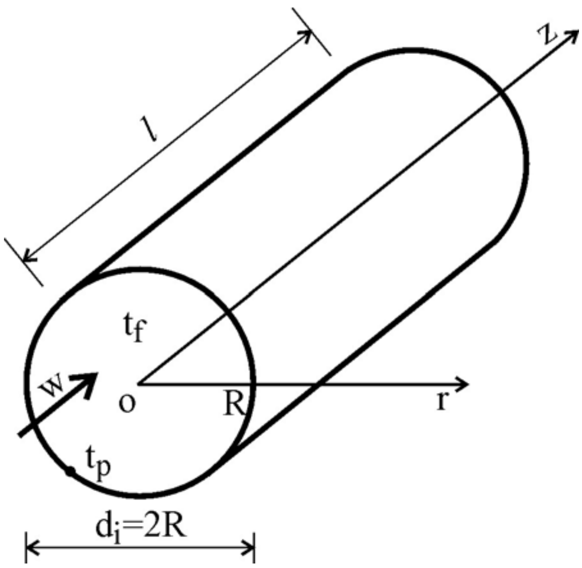


Fig. 3.2: Schița conductei circulare

Ipoteze: $l >> d_i = 2R$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$t_f < t_p$$

$$\rho, c_p, \lambda, \nu \neq f(t)$$

$$\vec{g} = 0 \; ; \quad g_r = g_z = 0$$

3.2.1.1.1. Regimul de curgere laminar ($Re < 2300$)

Se consideră curgerea fluidului cu viteză moderată în direcția axei conductei (componenta radială a vitezei este nulă, $w_r = 0$) şi variația liniară a presiunii în direcția de curgere a fluidului, $\frac{\partial p}{\partial z} = const.$ Variația componentei axiale a vitezei, w_z, se determină din integrarea ecuațiilor diferențiale de continuitate şi de mişcare.

Ecuația de continuitate: $$\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

Deoarece $w_r = 0$ şi deci $\frac{\partial w_r}{\partial r} = 0$, rezultă:

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

Remarcă: Componenta axială a vitezei, w_z, la o distanţă dată faţă de axă ($r = const.$), rămâne constantă pe toată lungimea conductei.

Ecuaţia de mişcare pentru direcţia radială, r:

$$w_r \cdot \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_z \cdot \frac{\partial w_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right) + g_r$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

Remarcă: Într-o secţiune dată a conductei ($z = const.$), presiunea rămâne constantă.

$$p\Big|_{z=ct.} = const.$$

Ecuaţia de mişcare pentru direcţia axială, z:

$$w_r \cdot \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) + g_z$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = 0$$

Remarcă: Componenta axială a vitezei, w_z, variază numai în raport cu raza, iar presiunea p, numai în raport cu axa longitudinală.

Determinarea soluţiei generale a componentei axiale a vitezei w_z:

$$\frac{d^2 w_z}{d r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d w_z}{d r} = \frac{1}{\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d p}{d z} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d r} \left(r \cdot \frac{d w_z}{d r} \right) = \frac{1}{\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d p}{d z}$$

$$d\left(r \cdot \frac{d\,w_z}{d\,r}\right) = \frac{1}{\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot r \cdot d\,r \quad \rightarrow \quad r \cdot \frac{d\,w_z}{d\,r} = \frac{1}{\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$d\,w_z = \frac{1}{2\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot r \cdot d\,r + C_1 \cdot \frac{d\,r}{r} \quad \rightarrow \quad w_z = \frac{1}{2\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1 \cdot ln\,r + C_2$$

$$w_z = \frac{1}{4\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot r^2 + C_1 \cdot ln\,r + C_2 \qquad \text{[m/s]}$$

Soluția particulară a componentei axiale a vitezei, w_z, și constantele C_1 și C_2 se determină prin impunerea condițiilor de unicitate:

- Condiția de simetrie:

la $r = 0 \rightarrow \dfrac{d\,w_z}{d\,r} = 0$

$$\left.\frac{d\,w_z}{d\,r}\right|_{r=0} = \left.\frac{1}{\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot \frac{r}{2} + C_1 \cdot \frac{1}{r}\right|_{r=0} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

- Condiția la limită:

la $r = R \rightarrow w_z = 0$

$$w_z\big|_{r=R} = \frac{1}{4\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot R^2 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{4\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot R^2$$

$$w_z = -\frac{1}{4\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \qquad \text{[m/s]}$$

Remarcă: Componenta axială a vitezei într-o secțiune dată are o variație parabolică.

Viteza axială maximă are loc în axa conductei:

$$w_{z\,max} = w_z\big|_{r=0} = w_{zo} = -\frac{1}{4\rho \cdot \nu} \cdot \frac{d\,p}{d\,z} \cdot R^2 \qquad \text{[m/s]}$$

Se defineşte viteza axială adimensională, $\overline{w}_z$, ca raportul dintre viteza axială şi viteza axială maximă:

$$\overline{w}_z = \frac{w_z}{w_{z\,max}} = \frac{w_z}{w_{zo}} = \frac{R^2 - r^2}{R^2} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \qquad [-]$$

Viteza axială exprimată în funcție de viteza axială maximă:

$$w_z = w_{zo} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \qquad [\mathrm{m/s}]$$

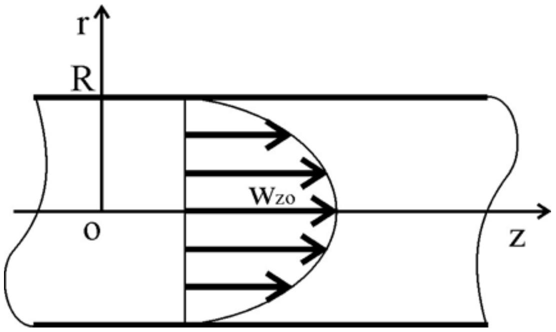


Fig. 3.3: Distribuția vitezei axiale

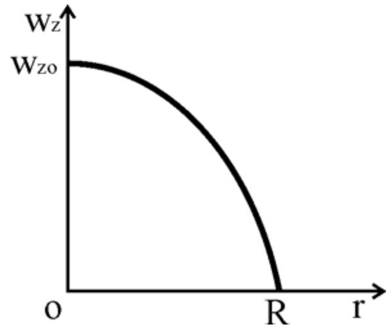


Fig. 3.4: Variația vitezei în funcție de rază

Câmpul de temperaturi pentru flux termic unitar la perete constant

Se consideră că fluxul termic unitar transmis de la peretele conductei la fluidul care circulă prin aceasta este constant pe toată lungimea conductei. Temperatura medie a fluidului într-o secțiune dată, creşte liniar în lungul conductei.

Ipoteze: $\dot{q}_p = const.$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = const. \; ; \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Ecuația căldurii: $$w_r \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

$$w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{w_z}{a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z}$$

Determinarea soluţiei generale a temperaturii:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\right)=\frac{w_{zo}}{a}\cdot\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial z} \quad\rightarrow\quad \partial\left(r\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\right)=\frac{w_{zo}}{a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)\cdot\partial r$$

$$r\cdot\frac{\partial t}{\partial r}=\frac{w_{zo}}{a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)+C_1$$

$$\partial t=\frac{w_{zo}}{a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot\left(\frac{r}{2}-\frac{r^3}{4R^2}\right)\cdot\partial r+C_1\cdot\frac{\partial r}{r}$$

$$t=\frac{w_{zo}}{a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16R^2}\right)+C_1\cdot\ln r+C_2$$

$$t=\frac{w_{zo}}{16a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot\left(4r^2-\frac{r^4}{R^2}\right)+C_1\cdot\ln r+C_2$$

Soluţia particulară a temperaturii şi constantele C_1 şi C_2 se determină prin impunerea condiţiilor de unicitate:

- Condiţia de simetrie:

la $r=0\rightarrow\frac{\partial t}{\partial r}=0$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r=0}=\frac{w_{zo}}{a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot\left(\frac{r}{2}-\frac{r^3}{4R^2}\right)+C_1\cdot\left.\frac{1}{r}\right|_{r=0}=0 \quad\rightarrow\quad C_1=0$$

- Condiţia la limită:

la $r=R\rightarrow t=t_p$

$$t\big|_{r=R}=\frac{w_{zo}}{16a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot\left(4R^2-\frac{R^4}{R^2}\right)+C_2=t_p \quad\rightarrow\quad C_2=t_p-\frac{3w_{zo}}{16a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot R^2$$

$$t=t_p-\frac{w_{zo}}{16a}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}\cdot\left(\frac{r^4}{R^2}-4r^2+3R^2\right)\qquad [^{\circ}\mathrm{C}]$$

Remarcă: Într-o secţiune tranzversală data ($z = const.$), temperatura variază cu raza la puterea a patra.

Temperatura minimă va fi în axa conductei:

$$t_{min} = t\big|_{r=0} = t_o = t_p - \frac{3w_{zo}}{16a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \cdot R^2 \qquad [°C]$$

Temperatura peretelui exprimată în funcţie de temperatura în axa conductei are următoarea expresie:

$$t_p = t_o + \frac{3w_{zo}}{16a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \cdot R^2 \qquad [°C]$$

Soluţia particulară a temperaturii în funcţie de temperatura în axa conductei:

$$t = t_o + \frac{w_{zo}}{16a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \left(4r^2 - \frac{r^4}{R^2} \right) \qquad [°C]$$

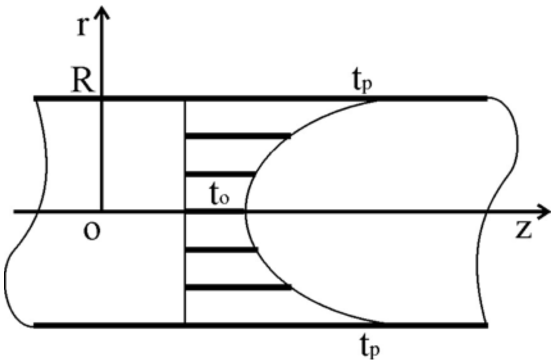


Fig. 3.5: Distribuţia temperaturii

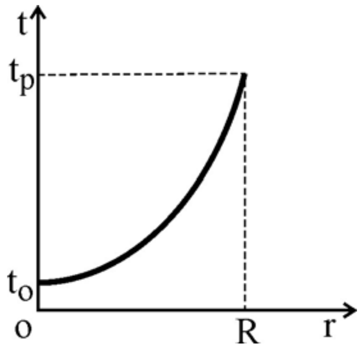


Fig. 3.6: Variaţia temperaturii în funcţie de rază

Determinarea coeficientului de convecţie într-o secţiune dată:

$$\dot{q}_p = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \alpha \cdot \left(t_f - t_p\right) \quad \rightarrow \quad \alpha \cdot \left(t_p - t_f\right) = \lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

unde t_f este temperatura medie a fluidului într-o secţiune dată şi se calculează cu următoarea relaţie:

$$t_f = \frac{\int_0^R t \cdot w_z \cdot r \cdot dr}{\int_0^R w_z \cdot r \cdot dr} = \frac{\int_0^R \left[t_o + \frac{w_{zo}}{16a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \left(4r^2 - \frac{r^4}{R^2} \right) \right] \cdot w_{zo} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot r \cdot dr}{\int_0^R w_{zo} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot r \cdot dr}$$

$$t_f = t_o + \frac{7w_{zo}}{96a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \cdot R^2$$

$$\alpha \cdot \left(t_o + \frac{3w_{zo}}{16a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \cdot R^2 - t_o - \frac{7w_{zo}}{96a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \cdot R^2 \right) = \lambda \cdot \frac{w_{zo}}{16a} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \cdot (8R - 4R)$$

$$\alpha \cdot \left(3R - \frac{7R}{6} \right) = 4\lambda \quad \rightarrow \quad \frac{11}{6} \cdot R \cdot \alpha = 4\lambda$$

$$\alpha = \frac{24}{11} \cdot \frac{\lambda}{R} = \frac{48}{11} \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad [\mathrm{W/m^2 \cdot K}]$$

$$\frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = Nu = \frac{48}{11} = 4{,}364$$

Remarcă: Criteriul determinant Nusselt este o constantă şi nu depinde de alte criterii caracteristice.

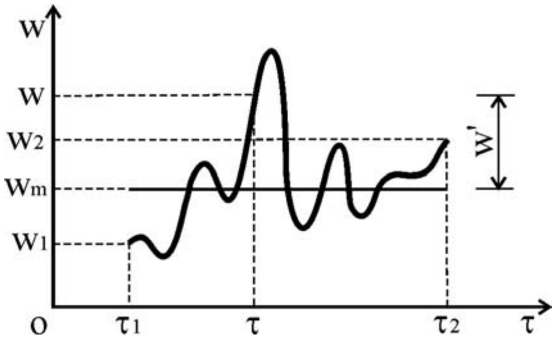
3.2.1.1.2. Regimul de curgere turbulent ($Re > 10^4$)

Curgerea turbulentă este caracterizată de mişcări dezordonate ale particulelor macroscopice de fluid şi poate fi studiată ca o suprapunere a mişcării vârtejurilor sau turbioanelor (mişcare oscilantă sau fluctuantă) peste mişcarea laminară (mişcare constantă sau medie).

Viteza locală a fluidului oscilează în timp în jurul unei valori medii.

$$w = \overline{w} + w' \qquad [\mathrm{m/s}]$$

unde w este viteza locală instantanee, $\overline{w}$ este viteza locală medie şi w' este perturbația vitezei.



$$\overline{w} = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} w \cdot d\tau}{\tau_2 - \tau_1} \quad [\text{m/s}]$$

Fig. 3.7: Oscilația în timp a vitezei

Remarcă: În cazul în care perturbația vitezei este nulă pe toată durata analizată, mişcarea devine laminară.

Oscilații în timp se manifestă şi în cazul presiunii şi temperaturii.

$$p = \overline{p} + p' \quad \rightarrow \quad \overline{p} = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} p \cdot d\tau}{\tau_2 - \tau_1} \quad [\text{Pa}]$$

unde p este presiunea locală instantanee, $\overline{p}$ este presiunea locală medie şi p' este perturbația presiunii.

$$t = \bar{t} + t' \quad \rightarrow \quad \bar{t} = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} t \cdot d\tau}{\tau_2 - \tau_1} \quad [^{o}\text{C}]$$

unde t este temperatura locală instantanee, $\bar{t}$ este temperatura locală medie şi t' este perturbația temperaturii.

Se consideră curgerea fluidului cu viteză mare în direcția axei conductei (componenta radială a vitezei medii este nulă, $\overline{w}_r = 0$) şi variația liniară a presiunii medii în direcția de curgere a fluidului, $\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial z} = const.$

Cele două componente ale vitezei instantanee vor fi:

$$w_r = \overline{w}_r + w_r' = w_r'$$

$$w_z = \overline{w}_z + w_z'$$

Ecuația de continuitate: $$\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial w_r'}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w}_z+w_z'\right)=0$$

$$\frac{\partial w_r'}{\partial r}+\frac{\partial w_z'}{\partial z}=0$$

Ecuația de mişcare pentru direcția axială, z:

$$\left(\overline{w}_r+w_r'\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{w}_z+w_z'\right)+\left(\overline{w}_z+w_z'\right)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w}_z+w_z'\right)=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{p}+p'\right)+\nu\cdot\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{w}_z+w_z'\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\overline{w}_z+w_z'\right)\right\}$$

$$w_r'\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{w}_z+w_z'\right)+\left(\overline{w}_z+w_z'\right)\cdot\frac{\partial w_z'}{\partial z}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{p}+p'\right)+\nu\cdot\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{w}_z+w_z'\right)\right]+\frac{\partial^2 w_z'}{\partial z^2}\right\}$$

Integrarea ecuației de mişcare în cazul curgerii turbulente este dificilă. Pe baza cercetărilor experimentale însă s-a stabilit că, într-o secțiune dată, componenta axială a vitezei medii variază după o funcție de tip putere.

$$\overline{w}_z=\overline{w}_{zo}\cdot\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

unde valoarea exponentului n este în funcție de criteriul Reynolds.

$$n=f\left(Re\right)$$

Tab. 3.1: Valoarea exponentului *n*

Re	10^4	10^5	10^6	$> 2\cdot 10^6$
n	6	7	8	10

Remarcă: Lângă perete se formează un strat subțire de fluid (numit **film laminar**) în interiorul căruia distribuția vitezei medii este practic liniară.

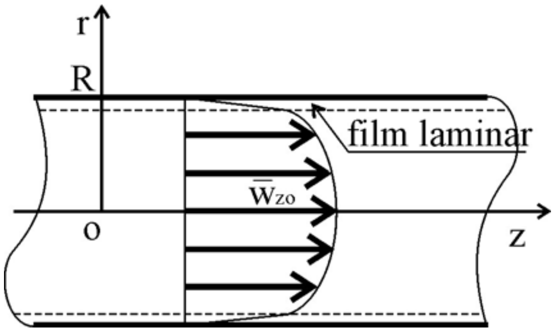


Fig. 3.8: Distribuția vitezei axiale

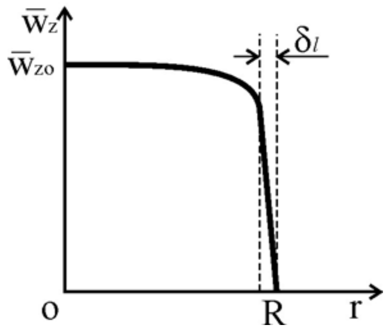


Fig. 3.9: Variația vitezei axiale medii

Ecuația căldurii:

$$w_r' \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{t} + t'\right) + \left(\bar{w}_z + w_z'\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{t} + t'\right) = a \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{t} + t'\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\bar{t} + t'\right) \right\}$$

Integrarea analitică a ecuației diferențiale a căldurii este dificilă. Pe baza cercetărilor experimentale însă, s-a stabilit că, într-o secțiune dată, temperatura medie variază, ca şi componenta axială a vitezei medii, după o funcție de tip putere:

$$\frac{\bar{t} - t_p}{t_f - t_p} = \left(\frac{r}{R}\right)^n \quad \rightarrow \quad \bar{t} = t_p + \left(t_f - t_p\right) \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

3.2.1.1.3. Relații empirice de calcul

În practica inginerească, coeficientul de convecție α se determină cu ajutorul criteriului Nusselt:

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{l_c} \quad [\mathrm{W/m^2 \cdot K}]$$

Pentru determinarea criteriului Nusselt se folosesc ecuații criteriale obținute în formă generală pe baza analogiei Reynolds-Colburn dintre coeficientul de frecare şi cel de transfer de căldură şi în formă particulară pe cale experimentală. Aceste relații se aplică numai în domeniul de valabilitate precizat de autor.

Pentru curgerea în interiorul conductelor circulare drepte având suprafața peretelui netedă, se pot folosi următoarele relații criteriale:

- pentru regimul laminar ($Re < 2300$):

$$Nu = 0{,}15 \cdot Re^{0{,}33} \cdot Pr^{0{,}43} \cdot \left(Pr/Pr_p\right)^{0{,}25} \cdot \varepsilon_l$$

-pentru regimul turbulent ($Re > 10^4$):

$$Nu = 0{,}023 \cdot Re^{0{,}8} \cdot Pr^{n} \cdot \left(Pr/Pr_p\right)^{0{,}25} \cdot \varepsilon_l$$

unde $n = 0{,}4$ pentru încălzirea fluidului şi $n = 0{,}3$ pentru răcirea acestuia.

- Lungimea caracteristică este diametrul interior al conductei.

$$l_c = d_i$$

- Temperatura de referință la care se determină proprietățile termo-fizice ale fluidului este temperatura medie a acestuia.

$$t_{ref} = t_f = \frac{t_{f1} + t_{f2}}{2}$$

unde t_{f1} şi t_{f2} sunt temperaturile medii ale fluidului la intrarea, respectiv la ieşirea din conductă.

Pr_p este criteriul Prandtl calculat la valoarea temperaturii peretelui, $Pr_p = Pr(t_p)$.

ε_l este factorul de corecție care ține seama de lungimea de stabilizare a curgerii: $\varepsilon_l = f(l/d_i,\ Re)$.

În cazul canalelor şi a conductelor necirculare, lungimea caracteristică este diametrul echivalent termic:

$$l_c = d_{ech} = \frac{4 \cdot S}{P}$$

unde S este secțiunea transversală liberă de curgere a fluidului şi P este perimetrul secțiunii transversale a zonei în care are loc transferul de căldură.

<u>Observație</u>: În cazul conductelor curbate şi/sau având suprafața peretelui rugoasă, ecuațiile criteriale sunt afectate de factori de corecție corespunzători.