

Capitolul 3

CONVECŢIA CĂLDURII

3.1. Generalităţi

Convecţia reprezintă schimbul de căldură dintre o suprafaţă şi un fluid aflat în contact direct cu aceasta, între care există o mişcare relativă. Transmiterea căldurii se face, în principal, printr-un strat subţire de fluid ataşat suprafeţei (**strat limită**), atât prin difuzie molară (amestec) cât şi prin difuzie moleculară (conducţie).

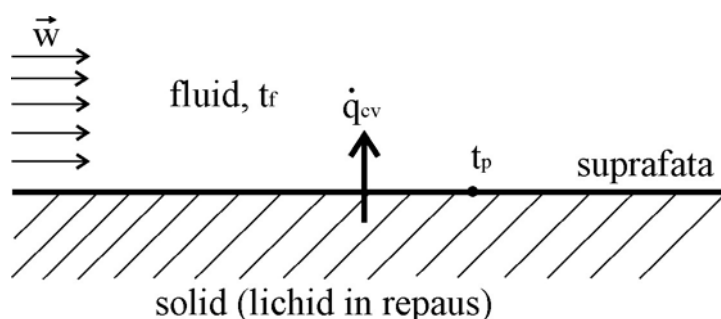


Fig. 3.1: Transmiterea căldurii prin convecţie

Obiectivele studiului transferului de căldură prin convecţie sunt:

- determinarea coeficientului de convecţie, α_{cv} ;
- determinarea fluxului termic transferat, \dot{q} şi \dot{Q} .

Observaţie: Pentru simplificare, atunci când se analizează numai fenomenul de convecţie a căldurii, coeficientul de convecţie α_{cv} se notează cu α simplu (fără indice).

Coeficientul de convecţie depinde de caracteristicile suprafeţei, de proprietăţile fizice ale fluidului, de regimul de curgere şi de natura mişcării.

$$\alpha = \alpha(l_c, t_p, t_f, \rho, c_p, \lambda, a, \nu, w, \dots) \quad [\text{W/m}^2 \cdot \text{K}]$$

Caracteristicile suprafeţei se referă la forma, dimensiunile şi aspectul acesteia (netedă sau rugoasă).

Regimul de curgere depinde de lungimea caracteristică a suprafeței, de viscozitatea fluidului și de viteza acestuia. El poate fi caracterizat prin criteriul adimensional Reynolds ($Re = w \cdot l_c / \nu$). În funcție de valoarea acestuia, regimul de curgere poate fi: a) laminar, b) tranzitoriu și c) turbulent.

Natura mișcării fluidului este dată de cauza care generează mișcarea. Astfel se disting:

a) mișcarea forțată - produsă de forțe exterioare fluidului (pompe, ventilatoare, compresoare, suflante, vânt, etc.)

b) mișcarea liberă (naturală) - produsă de forțe interioare (forțe de tip Arhimede sau de portanță) generate de gradientii de densitate pe verticală.

Fluxul termic unitar convectiv se exprimă prin legea lui Newton și este proporțional cu diferența dintre temperatura suprafeței și cea a fluidului.

$$\dot{q}_{cv} = \alpha \cdot (t_p - t_f) \quad [\text{W/m}^2]$$

Factorul de proporționalitate α este coeficientul de convecție:

$$\alpha = \frac{\dot{q}_{cv}}{t_p - t_f} \quad [\text{W/m}^2 \cdot \text{K}]$$

Ipotezele simplificatoare care se aplică în studiul convecției căldurii sunt următoarele:

1. regim staționar: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$;
2. fluid ideal (proprietățile fluidului nu depind de temperatură):

$$\rho, c_p, \lambda, a, \nu, \dots \neq f(t);$$

3. fluid newtonian: $\tau = -\mu \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \quad [\text{N/m}^2]$;

unde τ este efortul tangențial de frecare (tensiunea de forfecare) în N/m^2 , μ este vâscozitatea dinamică în $\text{N} \cdot \text{s/m}^2$, w este viteza fluidului în m/s și n este normala la direcția de curgere a fluidului.

4. curgere incompresibilă: $\text{grad } \rho = 0$ ($\rho = \text{const.}$);
5. fără surse interioare de căldură: $\dot{q}_v = 0$.

3.1.1. Ecuatiile fundamentale ale convecției căldurii

Ecuatia de conservare a masei (ecuația de continuitate):

Forma integrală: $\dot{m} = \rho_1 \cdot w_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot S_2 = \text{const.}$

Forma diferențială: $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla(\rho \cdot \vec{w}) = 0$

unde ∇ reprezintă operatorul nabra (Hamilton):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{w} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \vec{w} = 0$$

Se definește derivata substanțială a densității și se notează cu $\frac{D\rho}{d\tau}$, expresia:

$$\frac{D\rho}{d\tau} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{w} \cdot \nabla \rho$$

Rezultă:

$$\frac{D\rho}{d\tau} + \rho \cdot \nabla \vec{w} = 0$$

În cazul curgerilor incompresibile ($\nabla \rho = \text{grad } \rho = 0$) în regim staționar ($\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$), derivata substanțială a densității este zero:

$$\frac{D\rho}{d\tau} = 0$$

Rezultă că $\rho \cdot \nabla \vec{w} = 0$ și, pentru că densitatea nu poate fi niciodată zero ($\rho \neq 0$), ecuația de continuitate devine:

$$\nabla \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

Ecuția de conservare a impulsului
(ecuația de mișcare Navier-Stokes)

Forma vectorială:
$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + (\vec{w} \cdot \nabla) \cdot \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{w} + \vec{g}$$

În cazul regimului staționar, primul termen al membrului stâng al ecuației este nul, $\partial \vec{w} / \partial \tau = 0$, iar al doilea se poate descompune sub forma:

$$(\vec{w} \cdot \nabla) \cdot \vec{w} = (\vec{w} \cdot \nabla) \cdot (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k})$$

Forma diferențială a ecuației de mișcare după cele trei axe ale coordonatelor carteziene va fi:

- pentru axa x:
$$\vec{w} \cdot \nabla w_x = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \nabla^2 w_x + g_x$$

$$w_x \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial w_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) + g_x$$

- pentru axa y:
$$\vec{w} \cdot \nabla w_y = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \nabla^2 w_y + g_y$$

$$w_x \cdot \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial w_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right) + g_y$$

- pentru axa z:
$$\vec{w} \cdot \nabla w_z = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \nabla^2 w_z + g_z$$

$$w_x \cdot \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) + g_z$$

Ecuatia de conservare a energiei
(ecuația căldurii)

Forma diferențială:
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \vec{w} \cdot \nabla t = a \cdot \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c_p} \vec{w}$$

În cazul regimului staționar ($\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$) și în absența surselor interioare de căldură ($\dot{q}_v = 0$), rezultă:

$$\vec{w} \cdot \nabla t = a \cdot \nabla^2 t$$

În coordonate carteziene, ecuația căldurii va avea forma:

$$w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

Ecuatia de stare

$$p = f(\rho, t)$$

În cazul gazelor perfecte, ecuația de stare se scrie sub forma:

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

Soluția generală a câmpului de temperaturi în interiorul stratului limită se obține prin integrarea sistemului de ecuații diferențiale care poate fi făcută prin următoarele metode:

- analitic, numai în cazuri foarte simple;
- numeric, atunci când poate fi aplicată teoria stratului limită;
- experimental, pe baza teoriei similitudinii și a analizei dimensionale.

Soluția particulară a câmpului de temperaturi se determină prin impunerea condițiilor la granița stratului limită și la interfața dintre fluid și suprafață, acolo unde:

- viteza relativă a fluidului este nulă: $\vec{w}|_p = 0$
- temperatura fluidului este egală cu cea a suprafeței: $t|_p = t_p$
- fluxul termic transmis către suprafață prin conducție este egal cu cel preluat de fluid prin convecție:

$$-\lambda \cdot \frac{dt}{dn} \Big|_p = \alpha \cdot (t_p - t_f) \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dn} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_p - t_f)$$

3.1.2. Teoria similitudinii

Similitudinea reprezintă o generalizare a asemănării geometrice. Fenomenele de aceeași natură și descrise analitic de ecuații identice ca formă și conținut sunt similare.

Similitudinea (asemănarea) geometrică

Două figuri geometrice sunt asemenea dacă segmentele lor corespunzătoare sunt proporționale.

$$\frac{l}{l'} = \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = \frac{R}{R'} = \frac{l_c}{l'_c} = c_{l_c}$$

unde c_{l_c} se numește factor de asemănare sau coeficient de scară al lungimii caracteristice, l_c .

Similitudinea cinematică

$$\frac{w}{w'} = c_w ; \quad \frac{\tau}{\tau'} = c_\tau$$

Similitudinea dinamică

$$\frac{F}{F'} = c_F ; \quad \frac{a}{a'} = c_a ; \quad \frac{m}{m'} = c_m$$

Similitudinea termică

$$\frac{t}{t'} = c_t ; \quad \frac{\dot{q}}{\dot{q}'} = c_{\dot{q}} ; \quad \frac{\lambda}{\lambda'} = c_\lambda$$

Două fenomene similare au coeficienți de scară interdependenți.

Exemplu:

$$c_w = \frac{w}{w'} = \frac{l_c}{\tau} \cdot \frac{\tau'}{l'_c} = \frac{l_c}{l'_c} \cdot \frac{\tau'}{\tau} = \frac{c_{l_c}}{c_\tau} \quad \rightarrow \quad c_w = \frac{c_{l_c}}{c_\tau} \quad \rightarrow \quad \frac{c_w \cdot c_\tau}{c_{l_c}} = 1$$

$$\frac{w \cdot \tau}{l_c} = \frac{w' \cdot \tau'}{l_c'} = \text{const.} = Ho$$

unde constanta adimensională Ho este **criteriul de homocronie**, iar expresia ei se numeşte invariant, criteriu adimensional sau criteriu de similitudine.

$$Ho = \frac{w \cdot \tau}{l_c} \quad [-]$$

3.1.2.1. Legile similitudinii

1. **Legea lui Newton**: Două fenomene similare au criterii de similitudine identice.

2. **Legea lui Buckingham**: Soluția generală a sistemului de ecuații care descrie un fenomen poate fi exprimată cu ajutorul unei ecuații criteriale având ca argumente criteriile de similitudine corespunzătoare fenomenului:

$$f(K_1, K_2, \dots, K_n) = 0$$

unde K_1, K_2, \dots, K_n sunt criterii de similitudine.

3. **Legea lui Kirpicev-Guhmann**: Condițiile de unicitate a două fenomene similare sunt la rândul lor similare și respectă legea lui Newton.

Criteriile de similitudine corespunzătoare condițiilor de unicitate se numesc **criterii determinante**.

3.1.2.2. Similitudinea proceselor dinamice

$$w_x \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial w_x}{\partial z} = -\frac{l}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) + g_x$$

$$\frac{(c_w)^2}{c_{l_c}} = \frac{c_p}{c_\rho \cdot c_{l_c}} = \frac{c_\nu \cdot c_w}{(c_{l_c})^2} = c_g$$

$$\frac{(c_w)^2}{c_{l_c}} = \frac{c_p}{c_\rho \cdot c_{l_c}} \rightarrow \frac{c_p}{c_\rho \cdot (c_w)^2} = 1 \rightarrow \frac{p}{\rho \cdot w^2} = \text{const.} = Eu$$

unde Eu este **criteriul Euler**.

Notă: De regulă, în exprimarea criteriului Euler, se folosește diferența de presiune corespunzătoare pierderilor de sarcină: $Eu = \Delta p / \rho \cdot w^2$

$$\frac{(c_w)^2}{c_{l_c}} = \frac{c_v \cdot c_w}{(c_{l_c})^2} \rightarrow \frac{c_w \cdot c_{l_c}}{c_v} = 1 \rightarrow \frac{w \cdot l_c}{\nu} = \text{const.} = Re$$

unde Re este **criteriul Reynolds**.

$$\frac{(c_w)^2}{c_{l_c}} = c_g \rightarrow \frac{c_g \cdot c_{l_c}}{(c_w)^2} = 1 \rightarrow \frac{g \cdot l_c}{w^2} = \text{const.} = Fr$$

unde Fr este **criteriul Froude**.

3.1.2.3. Similitudinea proceselor termice

$$w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{c_w \cdot c_t}{c_{l_c}} = \frac{c_a \cdot c_t}{(c_{l_c})^2} \rightarrow \frac{c_w \cdot c_{l_c}}{c_a} = 1 \rightarrow \frac{w \cdot l_c}{a} = \text{const.} = Pe$$

unde Pe este **criteriul Péclet**.

Remarcă: Criteriul Péclet mai poate fi scris și sub următoarea formă:

$$Pe = \frac{w \cdot l_c}{a} = \frac{w \cdot l_c}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a} = Re \cdot \frac{\nu}{a} = Re \cdot Pr$$

unde Pr este **criteriul Prandtl**: $Pr = \frac{\nu}{a}$

3.1.2.4. Similitudinea condițiilor la limită

$$\left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_p = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_p - t_f)$$

$$\frac{c_t}{c_l} = \frac{c_\alpha}{c_\lambda} \cdot c_t \rightarrow \frac{c_\alpha \cdot c_l}{c_\lambda} = 1 \rightarrow \frac{\alpha \cdot l_c}{\lambda} = Nu$$

unde Nu este criteriul Nusselt, criteriul de similitudine determinant pentru procesele de transfer de căldură prin convecție.

Pentru mișcarea forțată: $Nu = f(Re, Pr)$

Pentru mișcarea liberă: $Nu = f(Gr, Pr)$

Criterii de similitudine combinate

$$Fr \cdot Re^2 = \frac{g \cdot l_c}{w^2} \cdot \frac{w^2 \cdot l_c^2}{\nu^2} = \frac{g \cdot l_c^3}{\nu^2} = const. = Ga \quad (\text{criteriul Galilei})$$

$$Ga \cdot \frac{\rho_o - \rho}{\rho_o} = \frac{g \cdot l_c^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_o - \rho}{\rho_o} = const. = Ar \quad (\text{criteriul Arhimede})$$

$$Ga \cdot \beta \cdot \Delta t = \frac{g \cdot l_c^3}{\nu^2} \cdot \beta \cdot \Delta t = const. = Gr \quad (\text{criteriul Grashof})$$

$$Gr \cdot Pr = \frac{g \cdot l_c^3}{\nu^2} \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \frac{\nu}{a} = \frac{g \cdot l_c^3}{\nu \cdot a} \cdot \beta \cdot \Delta t = const. = Ra \quad (\text{criteriul Rayleigh})$$

$$\frac{Nu}{Pe} = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\alpha \cdot l_c}{\lambda} \cdot \frac{\nu}{w \cdot l_c} \cdot \frac{a}{\nu} = \frac{\alpha}{\rho \cdot w \cdot c_p} = const. = St \quad (\text{criteriul Stanton})$$