

2.3. Conducţia căldurii în regim nestaţionar

Ecuţia diferenţială a conducţiei în regim nestaţionar cu izvoare interioare de căldură este:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c_p} \quad ; \quad t = t(x, y, z, \tau)$$

În cazul corpurilor fără izvoare interioare de căldură ($\dot{q}_v = 0$), rezultă ecuaţia lui Fourier:

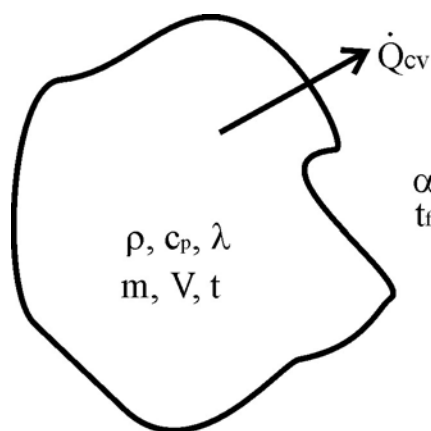
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (câmpul de temperaturi) poate fi determinată prin metode analitice, numerice, grafice sau de analogie.

2.3.1. Corpuri cu capacitate termică concentrată

Sunt corpurile caracterizate de rezistenţă termică internă neglijabilă, având conductivitatea termică mare (metalele) şi cel puţin o dimensiune foarte mică (table, sârme, bile, particule fine) pentru care se poate admite că temperatura este uniformă în tot volumul.

Cazul corpului care se răceşte



Ipoteze: $\rho, c_p, \lambda, \alpha \neq f(t)$
 $t = t(\tau)$
 $t_{ini} > t > t_f$

Notatii: $\theta = t - t_f$

Fig. 2.86: Schiţa corpului

Soluția generală a câmpului de temperaturi se determină din ecuația de bilanț termic:

$$\frac{\delta Q}{d\tau} = \dot{Q}_{cv}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta Q &= -m \cdot c_p \cdot dt = -\rho \cdot V \cdot c_p \cdot dt \\ \dot{Q}_{cv} &= \alpha \cdot S \cdot (t - t_f) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\rho \cdot V \cdot c_p \cdot \frac{dt}{d\tau} = \alpha \cdot S \cdot (t - t_f)$$

$$-\rho \cdot V \cdot c_p \cdot \frac{d\theta}{d\tau} = \alpha \cdot S \cdot \theta \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot d\tau$$

$$\ln \theta = -\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau + \ln C \quad \rightarrow \quad \theta = C \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau}$$

$$t = t_f + C \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Remarcă: Expresia $\frac{\rho \cdot V \cdot c_p}{\alpha \cdot S}$ are dimensiunea [s] și este denumită **constantă de timp**.

Soluția particulară a câmpului de temperaturi și constanta C se determină din impunerea condiției de unicitate (inițiale).

$$\text{la } \tau = 0 \rightarrow t = t_{ini}; \quad \theta = \theta_{ini} = t_{ini} - t_f$$

$$t|_{\tau=0} = t_f + C = t_{ini} \quad \rightarrow \quad C = t_{ini} - t_f = \theta_{ini}$$

$$\theta = \theta_{ini} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau} \quad \rightarrow \quad t = t_f + (t_{ini} - t_f) \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Remarcă: Temperatura are o variație exponențial descrescătoare.

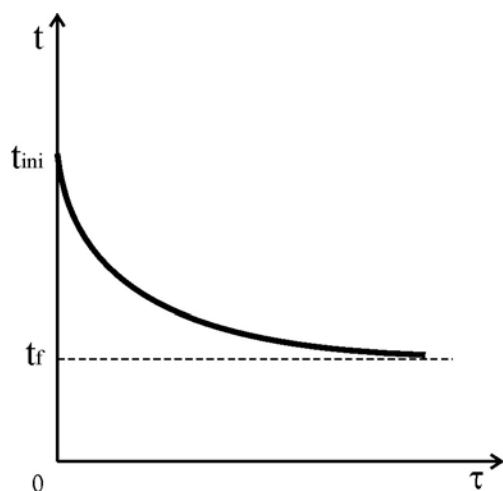


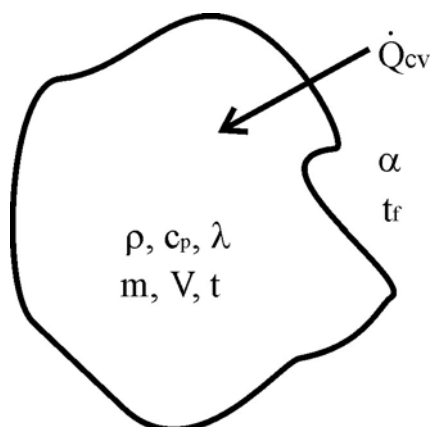
Fig. 2.87: Distribuția temperaturii

Se definește temperatura adimensională, $\bar{\theta}$, ca raportul dintre θ și θ_{ini} :

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{ini}} = \frac{t - t_f}{t_{ini} - t_f}$$

$$\bar{\theta} = e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau} \quad [-]$$

Cazul corpului care se încălzește



Ipoteze: $\rho, c_p, \lambda, \alpha \neq f(t)$

$$t = t(\tau)$$

$$t_{ini} < t < t_f$$

Notății: $\theta = t - t_f$

Fig. 2.88: Schița corpului

Soluția generală a câmpului de temperaturi se determină din ecuația de bilanț termic:

$$\frac{\delta Q}{d\tau} = \dot{Q}_{cv}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta Q &= m \cdot c_p \cdot dt = \rho \cdot V \cdot c_p \cdot dt \\ \dot{Q}_{cv} &= \alpha \cdot S \cdot (t_f - t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho \cdot V \cdot c_p \cdot \frac{dt}{d\tau} = -\alpha \cdot S \cdot (t - t_f)$$

$$\rho \cdot V \cdot c_p \cdot \frac{d\theta}{d\tau} = -\alpha \cdot S \cdot \theta \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot d\tau$$

$$\ln \theta = -\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau + \ln C \quad \rightarrow \quad \theta = C \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau}$$

$$t = t_f + C \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Remarcă: Câmpul de temperaturi are aceeași expresie atât la încălzirea cât și la răcirea corpului.

Soluția particulară a câmpului de temperaturi și constanta C se determină din impunerea condiției de unicitate (inițiale).

$$\text{la } \tau = 0 \rightarrow t = t_{ini}; \quad \theta = \theta_{ini} = t_{ini} - t_f$$

$$t|_{\tau=0} = t_f + C = t_{ini} \quad \rightarrow \quad C = t_{ini} - t_f = \theta_{ini}$$

$$\theta = \theta_{ini} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau} \quad \rightarrow \quad t = t_f + (t_{ini} - t_f) \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau}$$

$$t = t_f - (t_f - t_{ini}) \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Remarcă: Temperatura are o variație exponențial crescătoare.

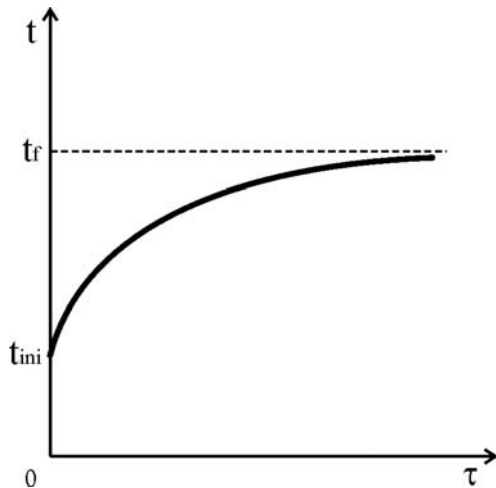


Fig. 2.89: Distribuția temperaturii

Se definește temperatura adimensională, $\bar{\theta}$, ca raportul dintre θ și θ_{ini} :

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{ini}} = \frac{t - t_f}{t_{ini} - t_f} = \frac{t_f - t}{t_f - t_{ini}}$$

$$\bar{\theta} = e^{-\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau} \quad [-]$$

Criteriile adimensionale Fourier și Biot

Se definesc:

- **difuzivitatea termică**, a , raportul între conductivitatea termică pe de o parte și produsul dintre densitate și căldură specifică la presiune constantă pe de alta:

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

- **lungimea caracteristică**, l_c , raportul dintre volumul și suprafața corpului:

$$l_c = \frac{V}{S} \quad [\text{m}]$$

- **criteriul Fourier**, Fo , raportul între produsul dintre difuzivitatea termică și timp și lungimea caracteristică la pătrat:

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{l_c^2} \quad [-]$$

- **criteriul Biot**, Bi , raportul între produsul dintre coeficientul de convecție și lungimea caracteristică și conductivitatea termică:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot l_c}{\lambda} \quad [-]$$

Observație: Din punct de vedere fizic, criteriul Biot reprezintă raportul dintre rezistența termică conductivă (internă) și rezistența termică convectivă (la suprafața corpului).

$$Bi = \frac{l_c / \lambda}{1 / \alpha} = \frac{R_{cd}}{R_{cv}}$$

Rezultă:

$$\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau = \frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau \cdot \frac{S}{V} \cdot \frac{V}{S} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \tau \cdot \frac{S^2}{V^2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{V}{S}$$

$$\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c_p} \cdot \tau = \frac{a \cdot \tau}{l_c^2} \cdot \frac{\alpha \cdot l_c}{\lambda} = Bi \cdot Fo$$

$$\bar{\theta} = e^{-Bi \cdot Fo} \quad [-]$$

Remarcă: Pentru valori mici ale criteriului Biot ($Bi < 0,1$), rezistența termică conductivă este mică în raport cu cea convectivă iar temperatura în interiorul corpului ajunge rapid la valoarea temperaturii suprafeței.

Concluzie: Corpurile cu rezistență termică internă neglijabilă sunt caracterizate de valori mici ale criteriului Biot.

2.3.2. Corpuri solificate termic simetric

2.3.2.1. Placa plană

Se consideră o placă plană omogenă și izotropă cu grosimea mult mai mică decât celelalte două dimensiuni, fără izvoare interioare de căldură, care se imersează instantaneu într-un mediu fluid cu temperatura mai mică decât cea inițială a plăcii.

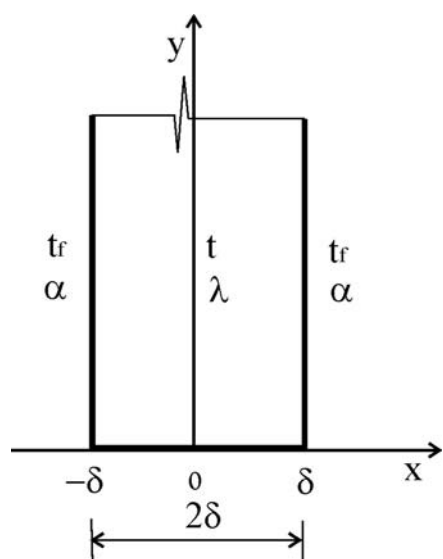


Fig. 2.90: Schița plăcii

Ipoteze:

$$t = t(x, \tau)$$

$$-\delta \leq x \leq \delta$$

$$\dot{q}_v = 0$$

$$t_{ini} \geq t \geq t_f$$

$$\nabla^2 t = \frac{d^2 t}{dx^2}$$

Notații:

$$\theta = t - t_f$$

Determinarea soluției generale a câmpului de temperaturi:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Se aplică metoda separării variabilelor:

$$\theta(x, \tau) = X(x) \cdot T(\tau)$$

$$X \cdot \frac{dT}{d\tau} = a \cdot T \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a \cdot T} \cdot \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -m^2$$

Observație: Constanta m nu poate lua valoarea zero. Dacă $m = 0$ rezultă $dT/d\tau = 0$, $\partial t/\partial \tau = 0$ și deci conducția are loc în regim staționar.

$$\frac{l}{a \cdot T} \cdot \frac{dT}{d\tau} = -m^2 \rightarrow \frac{dT}{T} = -a \cdot m^2 \cdot d\tau \rightarrow T = C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau}$$

$$\frac{l}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -m^2 \rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + m^2 \cdot X = 0$$

$$X = C_2 \cdot \sin(m \cdot x) + C_3 \cdot \cos(m \cdot x)$$

$$\theta = C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot [C_2 \cdot \sin(m \cdot x) + C_3 \cdot \cos(m \cdot x)]$$

$$t = t_f + C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot [C_2 \cdot \sin(m \cdot x) + C_3 \cdot \cos(m \cdot x)] \quad [^\circ\text{C}]$$

Soluția particulară a câmpului de temperaturi și constantele C_1 , C_2 și C_3 se determină din impunerea condițiilor de unicitate (simetrie, la limită și inițiale).

$$\text{la } x=0 \rightarrow \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$\text{la } x=\delta \rightarrow -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha \cdot (t - t_f) \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta$$

$$\text{la } \tau=0 \rightarrow t = t_{ini}; \quad \theta = \theta_{ini} = t_{ini} - t_f$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot m \cdot (C_2 \cdot \cos(m \cdot x) - C_3 \cdot \sin(m \cdot x)) \Big|_{x=0} = 0$$

$$C_1 \cdot C_2 \cdot m \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} = 0 \rightarrow \left. \begin{matrix} m \neq 0 \\ C_1 \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\theta = C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot C_3 \cdot \cos(m \cdot x) = C_4 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot \cos(m \cdot x)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=\delta} = C_4 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot m \cdot (-\sin(m \cdot x)) \Big|_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta \Big|_{x=\delta}$$

$$-m \cdot C_4 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot \sin(m \cdot \delta) = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot C_4 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot \cos(m \cdot \delta)$$

$$\text{ctg}(m \cdot \delta) = \frac{m \cdot \lambda}{\alpha} = \frac{m \cdot \delta}{\frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda}} = \frac{m \cdot \delta}{Bi}$$

Se notează cu μ produsul dintre m și δ : $\mu = m \cdot \delta$

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{l}{Bi} \cdot \mu \rightarrow \mu = f(Bi)$$

$$\theta|_{\tau=0} = C_4 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot \cos(m \cdot x) \Big|_{\tau=0} = \theta_{ini}$$

$$C_4 \cdot \cos(m \cdot x) = \theta_{ini} \rightarrow C_4 = \frac{\theta_{ini}}{\cos(m \cdot x)}$$

$$\theta = \frac{\theta_{ini}}{\cos(m \cdot x)} \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot \cos(m \cdot x)$$

$$\theta = \theta_{ini} \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau}$$

$$\theta = \theta_{ini} \cdot e^{-\frac{a \cdot \tau}{\delta^2} \cdot \mu^2}$$

$$\theta = \theta_{ini} \cdot e^{-Fo \cdot f(Bi)}$$

$$t = t_f + (t_{ini} - t_f) \cdot e^{-Fo \cdot f(Bi)} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

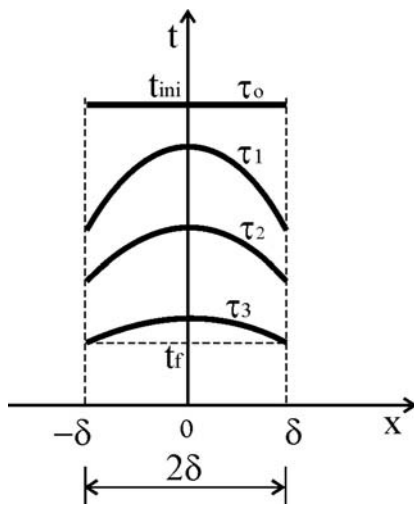
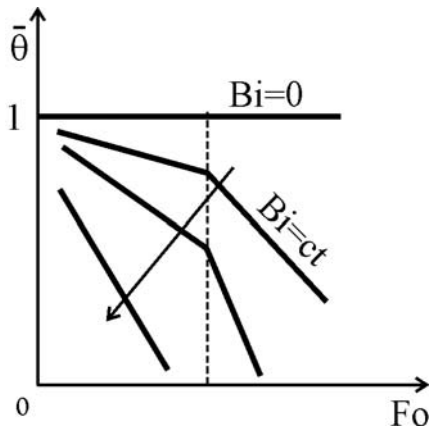


Fig. 2.91: Distribuția temperaturii

$$\tau_3 > \tau_2 > \tau_1 > \tau_0 = 0$$

În calculele ingineresti se utilizează temperatura adimensională $\bar{\theta}$, care se determină cu ajutorul nomogramelor în funcție de criteriile Biot și Fourier.



$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{ini}} = \frac{t - t_f}{t_{ini} - t_f} = e^{-Fo \cdot f(Bi)}$$

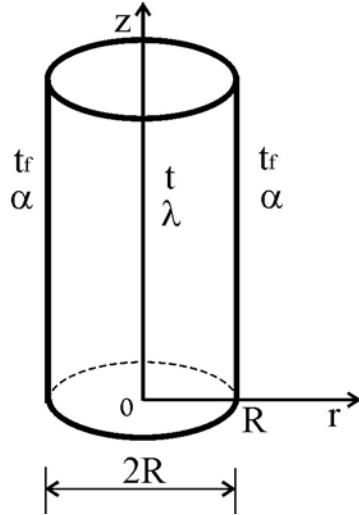
$$\bar{\theta} = f_p(Bi, Fo)$$

Observație: Temperatura adimensională este în scară logaritmică iar criteriul Fourier în scară liniară cu pas variabil.

Fig. 2.92: Nomogramă pentru determinarea temperaturii adimensionale

2.3.2.2. Cilindrul plin

Se consideră un cilindru plin omogen și izotrop, cu diametrul mult mai mic decât lungimea sa, fără izvoare interioare de căldură care se imersează instantaneu într-un mediu fluid cu temperatura mai mică decât cea inițială a cilindrului.



Ipoteze: $t = t(r, \tau)$

$$0 \leq r \leq R$$

$$\dot{q}_v = 0$$

$$t_{ini} \geq t \geq t_f$$

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dt}{dr} \right)$$

Notății: $\theta = t - t_f$

Fig. 2.93: Schița cilindrului

Determinarea soluției generale a câmpului de temperaturi:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right) = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right) \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

Se aplică metoda separării variabilelor:

$$\theta(r, \tau) = R(r) \cdot T(\tau)$$

$$R \cdot \frac{dT}{d\tau} = a \cdot \left(T \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + T \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) \rightarrow \frac{1}{a \cdot T} \cdot \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) = -m^2$$

$$\frac{1}{a \cdot T} \cdot \frac{dT}{d\tau} = -m^2 \rightarrow \frac{dT}{T} = -a \cdot m^2 \cdot d\tau \rightarrow T = C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau}$$

$$\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) = -m^2 \rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + m^2 \cdot R = 0$$

Soluția ecuației diferențiale este o funcție de tip Bessel de variabilele m și r :

$$R = f_B(m, r)$$

$$\theta = C_I \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot f_B(m, r)$$

$$t = t_f + C_I \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot f_B(m, r) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Soluția particulară a câmpului de temperaturi și constantele C_I , m și cele ale funcției Bessel se determină din impunerea condițiilor de unicitate (simetrie, la limită și inițiale).

$$\text{la } r=0 \rightarrow \frac{\partial t}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$$

$$\text{la } r=R \rightarrow -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha \cdot (t - t_f) \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta$$

$$\text{la } \tau=0 \rightarrow t = t_{ini}; \quad \theta = \theta_{ini} = t_{ini} - t_f$$

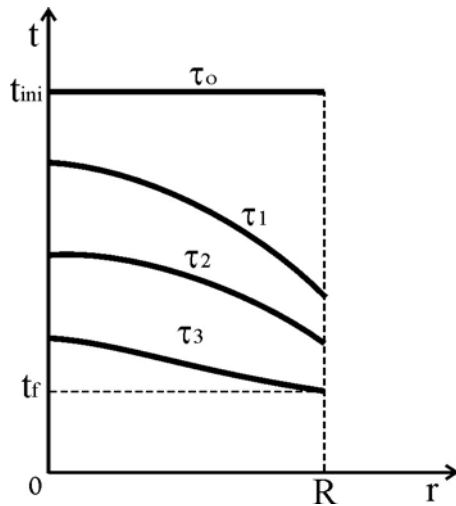


Fig. 2.94: Distribuția temperaturii
 $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1 > \tau_0 = 0$

Soluția particulară are o formă asemănătoare cu cea de la placa plană:

$$\theta = \theta_{ini} \cdot e^{-Fo \cdot f(Bi)}$$

$$t = t_f + (t_{ini} - t_f) \cdot e^{-Fo \cdot f(Bi)} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

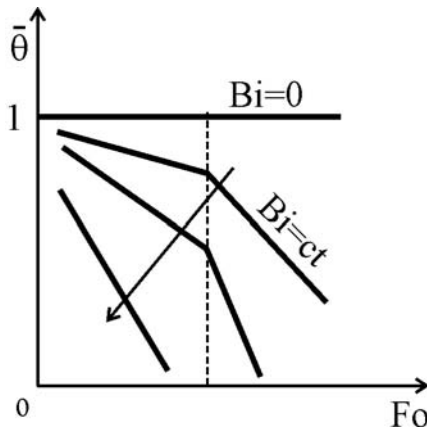


Fig. 2.95: Nomogramă pentru determinarea temperaturii adimensionale

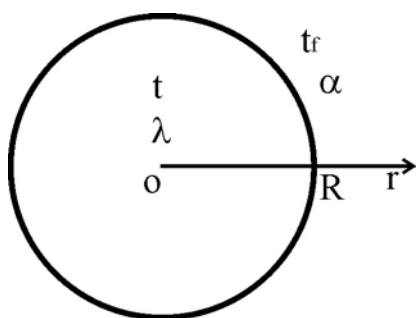
În calculele ingineresti se utilizează temperatura adimensională $\bar{\theta}$, care se determină cu ajutorul nomogramelor în funcție de criteriile Biot și Fourier.

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{ini}} = \frac{t - t_f}{t_{ini} - t_f} = e^{-Fo \cdot f(Bi)}$$

$$\bar{\theta} = f_c(Bi, Fo)$$

2.3.2.3. Sfera plină

Se consideră o sferă plină omogenă și izotropă, fără izvoare interioare de căldură, care este în contact direct cu un fluid cu temperatură mai scăzută.



Ipoteze:

$$t = t(r, \tau)$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$\dot{q}_v = 0$$

$$t_{ini} \geq t \geq t_f$$

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2}(r \cdot t)$$

Notatii:

$$\theta = t - t_f$$

Fig. 2.96: Schița sferei

Determinarea soluției generale a câmpului de temperaturi:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r \cdot t) = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right) \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

Se aplică metoda separării variabilelor:

$$\theta(r, \tau) = R(r) \cdot T(\tau)$$

$$R \cdot \frac{dT}{d\tau} = a \cdot \left(T \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + T \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) \rightarrow \frac{1}{a \cdot T} \cdot \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) = -m^2$$

$$\frac{1}{a \cdot T} \cdot \frac{dT}{d\tau} = -m^2 \rightarrow \frac{dT}{T} = -a \cdot m^2 \cdot d\tau \rightarrow T = C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau}$$

$$\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) = -m^2 \rightarrow \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + m^2 \cdot R = 0$$

Soluția ecuației diferențiale este o funcție de tip Bessel de variabilele m și r :

$$R = f_B(m, r)$$

$$\theta = C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot f_B(m, r)$$

$$t = t_f + C_1 \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot f_B(m, r) \quad [^\circ\text{C}]$$

Soluția particulară a câmpului de temperaturi și constantele C_1 , m și cele ale funcției Bessel se determină din impunerea condițiilor de unicitate (simetrie, la limită și inițiale).

$$\text{la } r=0 \rightarrow \frac{\partial t}{\partial r}=0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial r}=0$$

$$\text{la } r=R \rightarrow -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha \cdot (t - t_f) \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta$$

$$\text{la } \tau=0 \rightarrow t=t_{ini}; \quad \theta=\theta_{ini}=t_{ini}-t_f$$

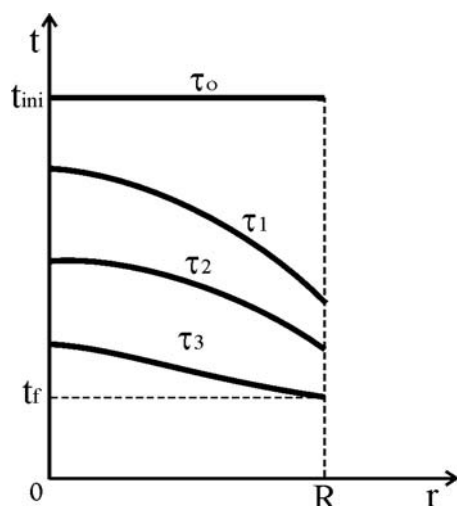


Fig. 2.97: Distribuția temperaturii
 $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1 > \tau_0 = \tau_{ini} = 0$

Soluția particulară are o formă asemănătoare cu cea de la cilindrul plin:

$$\theta = \theta_{ini} \cdot e^{-Fo \cdot f(Bi)}$$

$$t = t_f + (t_{ini} - t_f) \cdot e^{-Fo \cdot f(Bi)} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Remarcă: După un timp suficient de lung ($\tau \rightarrow \infty$), temperatura din interiorul corpului devine constantă și egală cu temperatura fluidului.

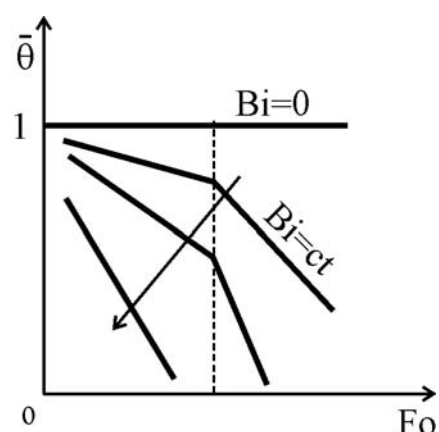


Fig. 2.98: Nomogramă pentru determinarea temperaturii adimensionale

În calculele ingineresti se utilizează temperatura adimensională $\bar{\theta}$, care se determină cu ajutorul nomogramelor în funcție de criteriile Biot și Fourier.

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{ini}} = \frac{t - t_f}{t_{ini} - t_f} = e^{-Fo \cdot f(Bi)}$$

$$\bar{\theta} = f_s(Bi, Fo)$$

Observație: Temperatura adimensională este în scară logaritmică iar criteriul Fourier în scară liniară cu pas variabil.

2.3.3. Metoda numerică a diferențelor finite

Metoda constă în înlocuirea ecuației diferențiale, care reprezintă o distribuție continuă a temperaturii atât în spațiu cât și în timp, cu o ecuație cu diferențe finite care are soluții numai în puncte discrete și numai la anumite momente de timp.

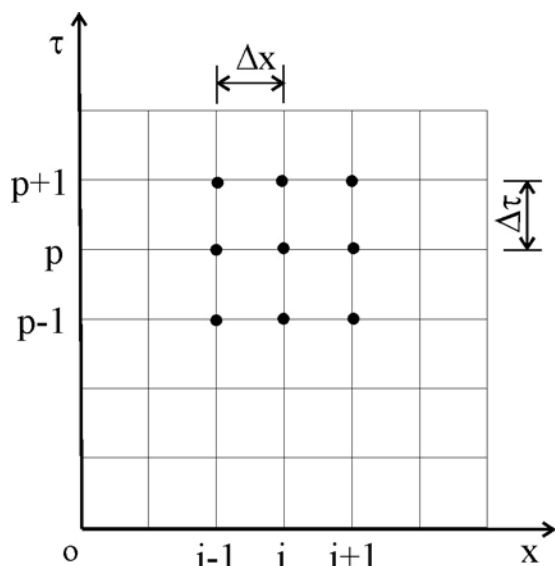


Fig. 2.99: Rețea nodală spațiu - timp

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{t^{p+1} - t^p}{\Delta \tau}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{t_{i+1} - 2 \cdot t_i + t_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Metoda explicită de calcul Temperatura unui nod la pasul de timp următor se exprimă în funcție de temperaturile nodului respectiv și ale nodurilor învecinate la timpul curent.

$$\frac{t_i^{p+1} - t_i^p}{\Delta \tau} = a \cdot \frac{t_{i+1}^p - 2 \cdot t_i^p + t_{i-1}^p}{(\Delta x)^2}$$

$$t_i^{p+1} = \frac{a \cdot \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \cdot (t_{i+1}^p + t_{i-1}^p) - \frac{2 \cdot a \cdot \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \cdot t_i^p + t_i^p$$

$$t_i^{p+1} = Fo \cdot (t_{i+1}^p + t_{i-1}^p) + (1 - 2 \cdot Fo) \cdot t_i^p$$

$$t_i^{\tau+\Delta\tau} = Fo \cdot (t_{i+1}^{\tau} + t_{i-1}^{\tau}) + (1 - 2 \cdot Fo) \cdot t_i^{\tau}$$

unde Fo reprezintă criteriul Fourier: $Fo = \frac{a \cdot \Delta \tau}{(\Delta x)^2}$

În acest mod se calculează, pas cu pas, temperaturile nodale începând de la valorile inițiale și până la starea finală.

Condiția de stabilitate și convergență a soluției este:

$$1 - 2Fo \geq 0 \quad \rightarrow \quad Fo \leq \frac{1}{2}$$

Pentru $Fo = \frac{1}{2}$ rezultă: $t_i^{\tau+\Delta\tau} = \frac{t_{i+1}^{\tau} + t_{i-1}^{\tau}}{2}$

Alegerea incrementilor (pașilor) rețelei se face prin impunerea incrementului spațial Δx și calcularea celui de timp din condiția de stabilitate și convergență:

$$\Delta\tau \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a}$$

Observație: În cazul propagării bi-direcționale, condiția de stabilitate este $Fo \leq 1/4$, iar în cazul propagării tri-dimensionale $Fo \leq 1/6$.

Metoda implicită de calcul Derivatele spațiale ale temperaturii se calculează la pasul de timp următor.

$$\frac{t_i^{p+1} - t_i^p}{\Delta\tau} = a \cdot \frac{t_{i+1}^{p+1} - 2t_i^{p+1} + t_{i-1}^{p+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$t_i^{p+1} - Fo \cdot (t_{i+1}^{p+1} - 2t_i^{p+1} + t_{i-1}^{p+1}) = t_i^p$$

Rezultă un sistem de n ecuații cu n necunoscute t_i^{p+1} ($i = 1, 2, \dots, n$), care poate fi rezolvat cu metoda relaxării, metoda matricială sau metoda Gauss-Seidel.

Remarcă: Metoda implicită nu mai impune condiții de stabilitate și convergență.

Formula generalizată de calcul

$$t_i^{\tau+\Delta\tau} - t_i^{\tau} = Fo \cdot \beta \cdot (t_{i+1}^{\tau} - 2t_i^{\tau} + t_{i-1}^{\tau}) + Fo \cdot (1 - \beta) \cdot (t_{i+1}^{\tau+\Delta\tau} - 2t_i^{\tau+\Delta\tau} + t_{i-1}^{\tau+\Delta\tau})$$

- pt. $\beta = 0$ rezultă metoda implicită;
- pt. $\beta = 1$ rezultă metoda explicită;
- pt. $\beta = 1/2$ rezultă metoda Crank-Nicholson.