2.2.2. Transmiterea bidirecțională a căldurii

Ecuația diferențială a conducției, în regim staționar, fără izvoare interioare de căldură, în coordonate carteziene bi-direcționale (ecuația lui Laplace) se scrie sub forma:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

Determinarea câmpului de temperaturi (soluția ecuației diferențiale) $t = t(x, y)$, se poate obține prin metode analitice, numerice, grafice sau de analogie.

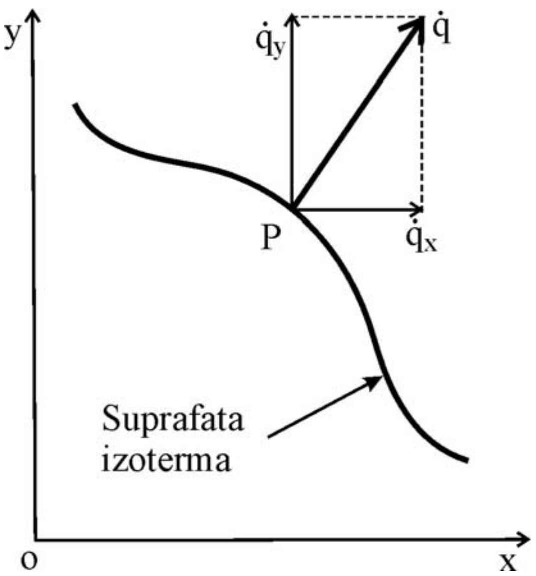

Fig. 2.83: Descompunerea fluxului termic unitar

Componentele $\dot{q}_x$ şi $\dot{q}_y$ ale fluxului termic unitar $\dot{q}$ pe cele două direcții *x* şi *y,* pot fi exprimate cu ajutorul legii lui Fourier:

$$\dot{q}_x = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\dot{q}_y = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial y}$$

2.2.2.1. Metoda analitică a separării variabilelor

Se consideră o soluție a ecuației diferențiale a conducției prin separarea celor două variabile, de forma:

$$t(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Substituind în ecuația lui Laplace, rezultă:

$$\nabla^2 t = Y \cdot \frac{d^2 X}{d x^2} + X \cdot \frac{d^2 Y}{d y^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{d x^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{d y^2}$$

Remarcă: Membrul stâng este o funcţie numai de x iar membrul drept numai de y. Egalitatea poate avea loc dacă şi numai dacă cei doi membrii ai ecuaţiei sunt egali cu o constantă pozitivă, m^2.

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{d x^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{d y^2} = m^2$$

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{d x^2} = m^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 X}{d x^2} + m^2 \cdot X = 0$$

Soluţia generală este de forma: $X = C_1 \cdot \sin(m x) + C_2 \cdot \cos(m x)$

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{d y^2} = m^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 Y}{d y^2} - m^2 \cdot Y = 0$$

Soluţia generală este de forma: $Y = C_3 \cdot e^{m y} + C_4 \cdot e^{-m y}$

Soluţia generală a câmpului de temperaturi va fi:

$$t = X \cdot Y = [C_1 \cdot \sin(m x) + C_2 \cdot \cos(m x)] \cdot \left(C_3 \cdot e^{m y} + C_4 \cdot e^{-m y}\right)$$

Constantele C_1, C_2, C_3 şi C_4 se determină prin impunerea condiţiilor la limită, iar constanta m în funcţie de datele fizice ale problemei.

2.2.2.2. Metoda numerică a diferenţelor finite

Se consideră un domeniu bi-direcţional care se discretizează printr-o reţea ortogonală având paşii Δx şi Δy constanţi pe cele două direcţii. Fiecărui nod al reţelei i se atribuie o notaţie şi o valoare a temperaturii care poate fi exprimată în funcţie de valorile temperaturilor nodurilor învecinate.

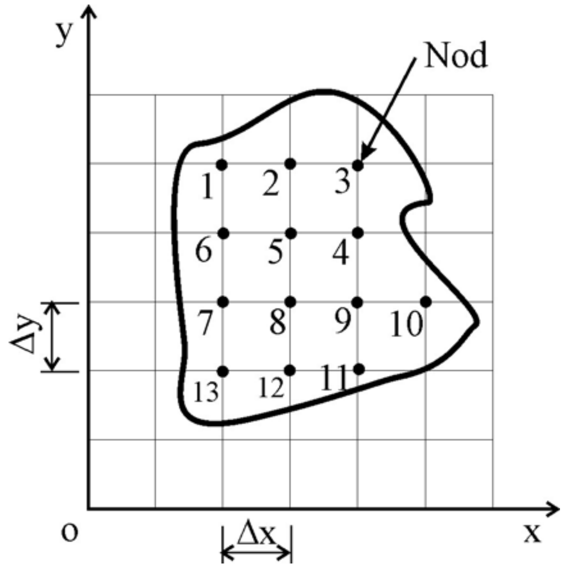

Fig. 2.84: Discretizarea domeniului

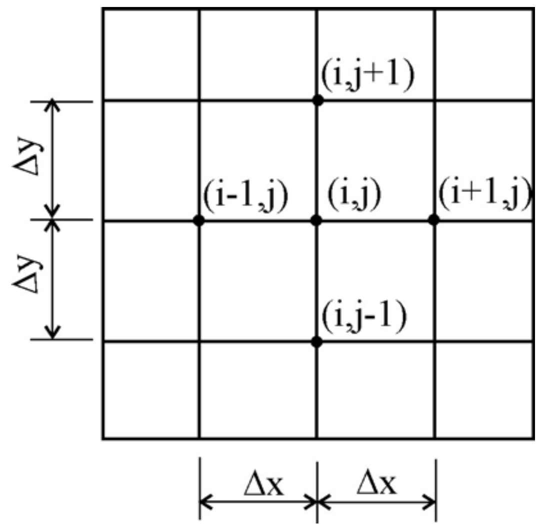

Fig. 2.85: Detaliu rețelei nodale

Pentru exprimarea temperaturii unui nod în funcție de temperaturile nodurilor învecinate, se foloseşte dezvoltarea în serie Taylor:

$$t_{i+1,j} = t_{i,j} + \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \cdots$$

$$t_{i-1,j} = t_{i,j} - \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \cdots$$

$$t_{i+1,j} + t_{i-1,j} = 2t_{i,j} + (\Delta x)^2 \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{t_{i+1,j} - 2t_{i,j} + t_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$t_{i,j+1} = t_{i,j} + \frac{\Delta y}{1!} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \cdots$$

$$t_{i,j-1} = t_{i,j} - \frac{\Delta y}{1!} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \cdots$$

$$t_{i,j+1} + t_{i,j-1} = 2t_{i,j} + (\Delta y)^2 \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{t_{i,j+1} - 2t_{i,j} + t_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

Ecuaţia lui Laplace în diferenţe finite devine:

$$\frac{t_{i+1,j}-2\cdot t_{i,j}+t_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{t_{i,j+1}-2\cdot t_{i,j}+t_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}=0$$

Dacă notaţia nodurilor se face în mod consecutiv, de la *1* pâna la *n*, rezultă următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot t_1+a_{12}\cdot t_2+\cdots+a_{1n}\cdot t_n=b_1 \\ a_{21}\cdot t_1+a_{22}\cdot t_2+\cdots+a_{2n}\cdot t_n=b_2 \\ ------------------- \\ a_{n1}\cdot t_1+a_{n2}\cdot t_2+\cdots+a_{nn}\cdot t_n=b_n \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii poate fi rezolvat prin **metoda relaxării**, **metoda matricială** sau **metoda Gauss-Seidel**.

<u>Metoda relaxării (Southwell)</u> este o metodă iterativă adecvată calculelor simple şi folosită în cazul reţelelor cu un număr mic de noduri.

Sistemul de ecuaţii se scrie sub forma:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot t_1+a_{12}\cdot t_2+\cdots+a_{1n}\cdot t_n-b_1=0 \\ a_{21}\cdot t_1+a_{22}\cdot t_2+\cdots+a_{2n}\cdot t_n-b_2=0 \\ ------------------- \\ a_{n1}\cdot t_1+a_{n2}\cdot t_2+\cdots+a_{nn}\cdot t_n-b_n=0 \end{cases}$$

Algoritmul de calcul este următorul:

1. Se atribuie fiecărui nod o valoare iniţială a temperaturii;
2. Se calculează valoarea pentru fiecare ecuaţie nodală, această valoare fiind denumită reziduu;
3. Se "relaxează" (se anulează) reziduul cel mai mare prin modificarea temperaturii corespunzătoare nodului respectiv;
4. Se rescriu ecuaţiile corespunzătoare nodurilor vecine cu noua valoare a temperaturii modificate;
5. Se continuă algoritmul până când toate reziduurile devin suficient de mici astfel încât valorile temperaturilor recalculate să rămână relativ constante.

Aceste valori finale reprezintă soluţia aproximativă a câmpului de temperaturi.

Metoda matricială se foloseşte pentru rețele cu un număr mare de noduri. Sistemul de ecuații se scrie sub formă matricială:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\{A\} \cdot \{T\} = \{B\} \quad \rightarrow \quad \{T\} = \{A\}^{-1} \cdot \{B\}$$

Obsevație: Dificultatea aplicării metodei matriciale constă în calcularea matricei inverse a coeficienților, $\{A\}$. Progresul în domeniul informaticii a făcut însă posibil realizarea de subprograme cu care se determină rapid matricea inversă.

Metoda Gauss-Seidel este o metodă iterativă folosită în cazul rețelelor cu noduri multe. Pentru utilizarea acestei metode se exprimă fiecare temperatură nodală ca o combinație liniară între celelalte temperaturi. Algoritmul de calcul este următorul:

1. Se atribuie fiecărui nod o temperatură inițială în concordanță cu condițiile la limită. Pentru rețelele cu număr foarte mare de noduri, când folosirea calculatorului este evidentă, pentru toate temperaturile nodale se atribuie valoarea inițială zero.

2. Se calculează noile valori ale temperaturilor nodale folosind întotdeauna valorile cele mai recent calculate ale temperaturilor nodurilor învecinate.

$$t_1^{k+1} = -\frac{1}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot t_2^k + a_{13} \cdot t_3^k + \dots + a_{1n} \cdot t_n^k - b_1\right)$$

$$t_2^{k+1} = -\frac{1}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot t_1^k + a_{23} \cdot t_3^k + \dots + a_{2n} \cdot t_n^k - b_2\right)$$

$$t_n^{k+1} = -\frac{1}{a_{nn}} \cdot \left(a_{n1} \cdot t_1^k + a_{n2} \cdot t_2^k + \dots + a_{n,n-1} \cdot t_{n-1}^k - b_n\right)$$

3. Algoritmul este repetat până când, pentru toate nodurile, două valori succesiv calculate ale temperaturii diferă printr-o cantitate suficient de mică, ε:

$$\left| t_i^{k+1} - t_i^k \right| \le \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$