

Ipoteze:  $\delta \ll l$   
 $\delta \ll h$   
 $\lambda \neq \lambda(t)$   

$$\nabla^2 t = \frac{d^2 t}{d x^2}$$

Notății:  $S = l \cdot h$

Determinarea soluției generale a câmpului de temperaturi:

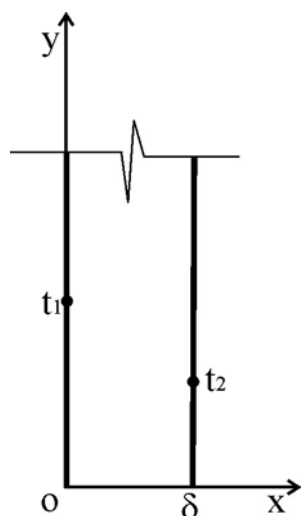
$$\frac{d^2 t}{d x^2} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad d\left(\frac{d t}{d x}\right) = -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot d x$$

$$\frac{d t}{d x} = -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot x + C_1 \quad \rightarrow \quad d t = -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot x \cdot d x + C_1 \cdot d x$$

$$t = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad [^{\circ}\text{C}]$$

**Remarcă:** Temperatura are o variație parabolică.

### **Cazul plăcii cu temperaturi cunoscute pe fețe** (condiții la limită de speța întâi)



Ipoteze:  $0 \leq x \leq \delta$   
 $t_1 > t_2$

Determinarea soluției particulare a câmpului de temperaturi: cele două constante  $C_1$  și  $C_2$  se determină din impunerea condițiilor la limită.

la  $x = 0 \rightarrow t = t_1$

la  $x = \delta \rightarrow t = t_2$

**Fig. 2.68:** Schița plăcii

$$t|_{x=0} = C_2 = t_1 \rightarrow C_2 = t_1$$

$$t|_{x=\delta} = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot \delta^2 + C_1 \cdot \delta + t_1 = t_2 \rightarrow C_1 = \frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\lambda} - \frac{t_1 - t_2}{\delta}$$

$$t = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot x^2 + \left( \frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\lambda} - \frac{t_1 - t_2}{\delta} \right) \cdot x + t_1$$

$$t = t_1 - \frac{x}{\delta} \cdot (t_1 - t_2) + \frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot x \cdot (\delta - x) \quad [^\circ\text{C}]$$

**Remarcă:** Dacă fluxul izvoarelor interioare este zero ( $\dot{q}_v = 0$ ), atunci se obține soluția câmpului de temperaturi pentru peretele plan paralel fără izvoare interioare de căldură.

Se definește **planul median** (PM), suprafața izotermă care trece prin mijlocul plăcii ( $x = \delta/2$ ) și **planul neutru** (PN), suprafața izotermă în care fluxul termic unitar este zero. Din expresia legii lui Fourier rezultă că, în planul neutru, derivata de ordinul întâi a temperaturii se anulează.

$$\dot{q}|_{PN} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx}|_{PN} = 0 \rightarrow \frac{dt}{dx}|_{PN} = 0$$

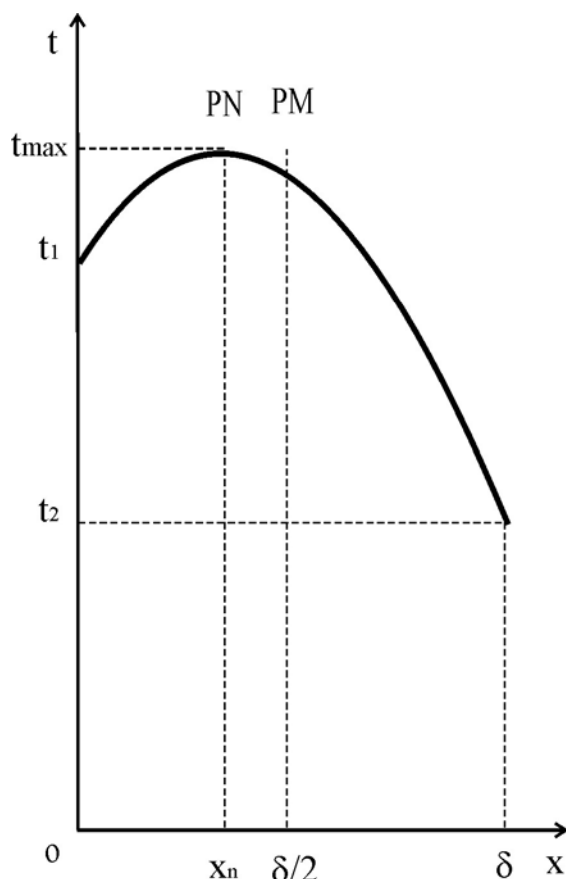
Prin urmare, în planul neutru temperatura are o valoare extremă (maximă sau minimă) în funcție de semnul izvoarelor interioare de căldură (pozitiv, respectiv negativ).

Poziția planului neutru  $x_n$ , se determină prin egalarea cu zero a derivatei de ordinul întâi a temperaturii:

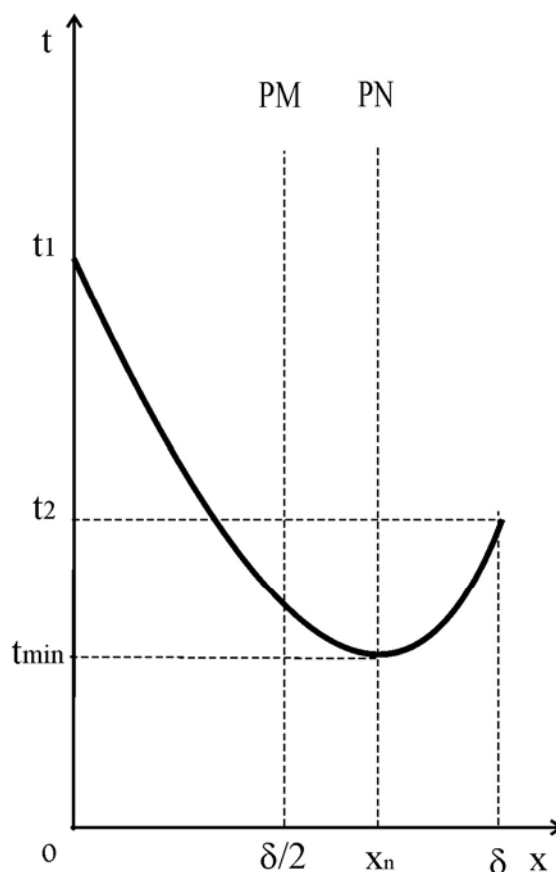
$$\frac{dt}{dx}|_{x=x_n} = -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot x_n + \frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\lambda} - \frac{t_1 - t_2}{\delta} = 0$$

$$x_n = \frac{\delta}{2} - \frac{\lambda}{\delta \cdot \dot{q}_v} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{m}]$$

**Remarcă:** Planul neutru se află la stânga planului median dacă izvoarele sunt pozitive ( $x_n < \delta/2$ ) și la dreapta acestuia dacă izvoarele sunt negative ( $x_n > \delta/2$ ).

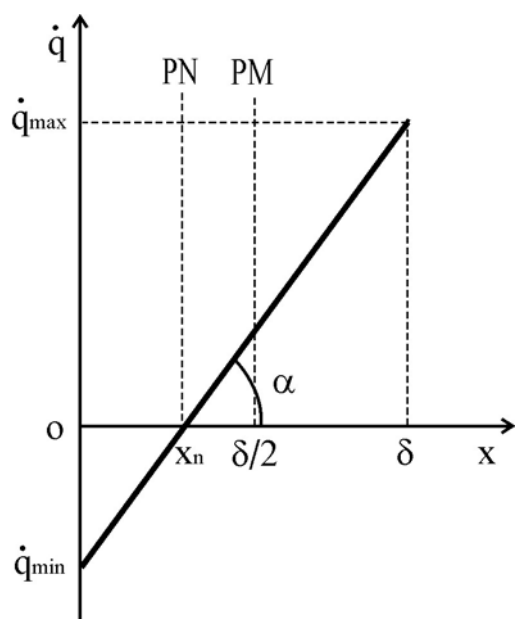


**Fig. 2.69:** Distribuția temperaturii pentru izvoare pozitive,  $\dot{q}_v > 0$



**Fig. 2.70:** Distribuția temperaturii pentru izvoare negative,  $\dot{q}_v < 0$

Determinarea fluxului termic unitar:



**Fig. 2.71:** Variația fluxului termic unitar

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \left( -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot x + \frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot \delta - \frac{t_1 - t_2}{\delta} \right)$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_1 - t_2) + \dot{q}_v \cdot \left( x - \frac{\delta}{2} \right) \quad [\text{W/m}^2]$$

**Remarcă:** Fluxul termic unitar are o variație liniară cu panta egală cu fluxul izvoarelor interioare și este zero în planul neutru.

$$\tan \alpha = \dot{q}_v$$

**Cazul plăcii cu temperaturi egale pe ambele fețe**  
(simetrie și condiție la limită de speța întâi)

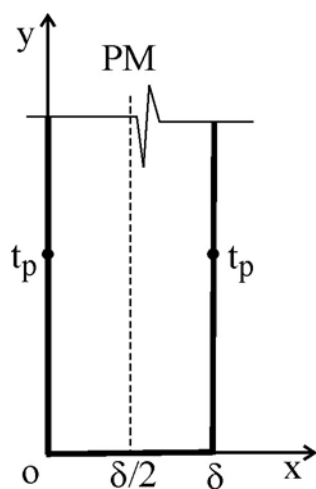


Fig. 2.72: Schița plăcii

Ipoteze:  $0 \leq x \leq \delta$   
 $t_1 = t_2 = t_p$   
 $\dot{q}_v > 0$

Determinarea soluției particulare a câmpului de temperaturi:

$$t = t_p - \frac{x}{\delta} \cdot (t_p - t_p) + \frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot x \cdot (\delta - x)$$

$$t = t_p + \frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot x \cdot (\delta - x) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

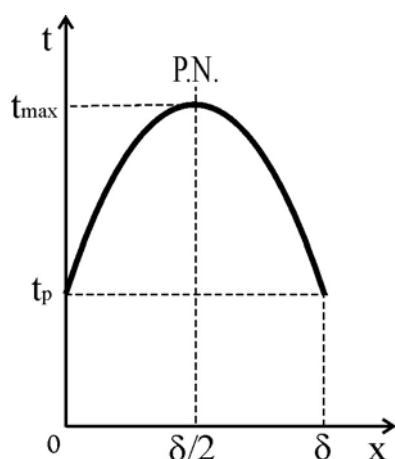


Fig. 2.73: Distribuția temperaturii

Poziția planului neutru:

$$x_n = \frac{\delta}{2} - \frac{\lambda}{\delta \cdot \dot{q}_v} \cdot (t_p - t_p) \rightarrow x_n = \frac{\delta}{2}$$

**Remarcă:** Planul neutru trece prin mijlocul plăcii și este element de simetrie pentru distribuția de temperatură (simetrie termică).

Temperatura maximă în placă:

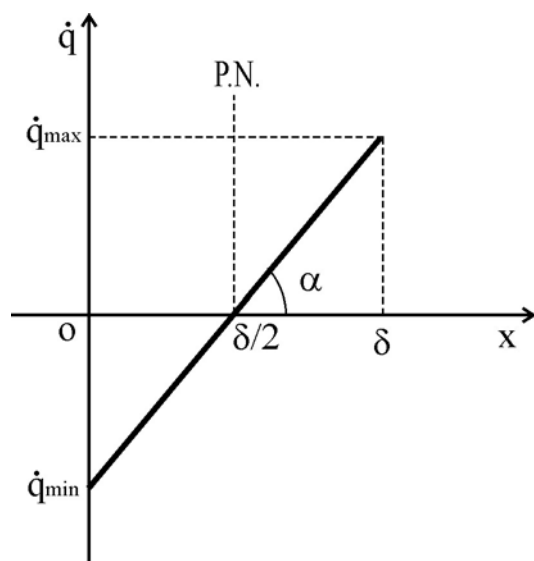
$$t_{max} = t|_{x=x_n=\delta/2} = t_p + \frac{\delta^2 \cdot \dot{q}_v}{8\lambda}$$

Temperatura adimensională:

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{max}} = \frac{t - t_p}{t_{max} - t_p} = \frac{4x}{\delta} \cdot \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \quad [-]$$

Determinarea fluxului termic unitar:

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_p - t_p) + \dot{q}_v \cdot \left(x - \frac{\delta}{2}\right) \rightarrow \dot{q} = \dot{q}_v \cdot \left(x - \frac{\delta}{2}\right) \quad [\text{W/m}^2]$$



**Remarcă:** Fluxurile termice unitare care străbat cele două fețe ale plăcii sunt egale în modul și de semn contrar.

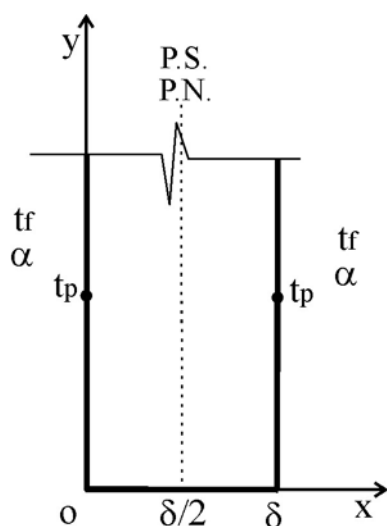
$$\dot{q}|_{x=0} = \dot{q}_{min} = -\frac{\delta}{2} \cdot \dot{q}_v$$

$$\dot{q}|_{x=\delta} = \dot{q}_{max} = \frac{\delta}{2} \cdot \dot{q}_v$$

$$|\dot{q}_{min}| = |\dot{q}_{max}|$$

**Fig. 2.74:** Variația fluxului termic unitar

### Cazul plăcii imersate într-un fluid (simetrie și condiție la limită de speța a treia)



Ipoteze:  $t_1 = t_2 = t_p$

$$t_f < t_p$$

$$\dot{q}_v > 0$$

$$x_n = \delta/2$$

Determinarea soluției particulare a câmpului de temperaturi: temperatura peretelui,  $t_p$ , se determină din impunerea condițiilor de unicitate și apoi se substituie în expresia câmpului de temperaturi.

**Fig. 2.75:** Schița plăcii

$$\text{la } x = \delta/2 \rightarrow \frac{dt}{dx} = 0$$

$$\text{la } x = \delta \rightarrow -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} = \alpha \cdot (t_p - t_f) \rightarrow \frac{dt}{dx} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_p - t_f)$$

$$t = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot x + C_1$$

$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=\delta/2} = -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{2} + C_1 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\lambda}$$

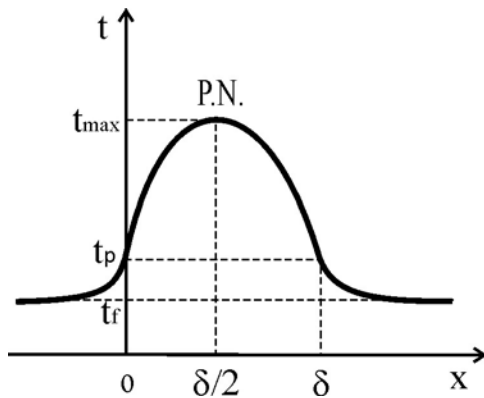
$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=\delta} = -\frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{\lambda} + \frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\lambda} = -\frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_p - t_f)$$

$$t_p = t_f + \frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\alpha}$$

$$t = t_p + \frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot x \cdot (\delta - x) \quad \rightarrow \quad t = t_f + \frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\alpha} + \frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot x \cdot (\delta - x) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Temperatura maximă în placă:

$$t_{max} = t_{x=x_n=\delta/2} = t_f + \frac{\delta \cdot \dot{q}_v}{2\alpha} + \frac{\delta^2 \cdot \dot{q}_v}{8\lambda}$$



**Fig. 2.76:** Distribuția temperaturii

Determinarea fluxului termic unitar:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} = -\lambda \cdot \left( -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot (\delta - 2x) \right)$$

$$\dot{q} = \dot{q}_v \cdot \left( x - \frac{\delta}{2} \right) \quad [\text{W/m}^2]$$

**Remarcă:** Atunci când placa este solicitată simetric, fluxul termic unitar nu depinde de material și nici de condițiile la limită.

### 2.2.1.2.2. Cilindrul plin

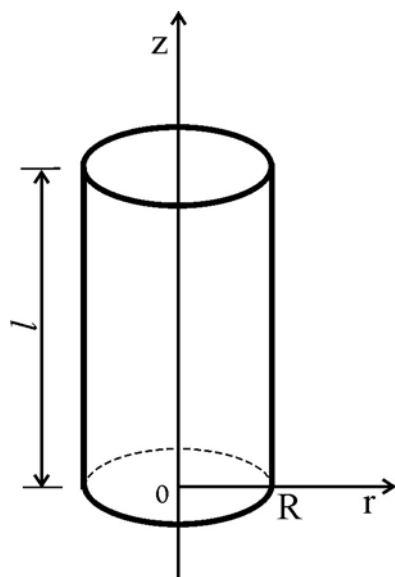


Fig. 2.77: Schița cilindrului

Se consideră un cilindru plin, omogen și izotrop, cu diametrul mult mai mic decât lungimea, având conductivitatea termică constantă și izvoare interioare de căldură pozitive uniform distribuite în tot volumul său. Fluxul termic se propagă numai după direcția razei.

Ipoteze:  $R \ll l$   
 $\lambda \neq \lambda(t)$   
 $\dot{q}_v > 0$

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dt}{dr} \right)$$

$$S = 2\pi \cdot R \cdot l$$

Determinarea soluției generale a câmpului de temperaturi:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dt}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad d \left( r \cdot \frac{dt}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \cdot r \cdot dr$$

$$r \cdot \frac{dt}{dr} = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot r^2 + C_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot r + C_1 \cdot \frac{1}{r}$$

$$t = -\frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot r^2 + C_1 \cdot \ln r + C_2 \quad [^\circ\text{C}]$$

**Cazul cilindrului cu temperatura pe suprafață cunoscută**  
 (simetrie și condiție la limită de speța întâi)

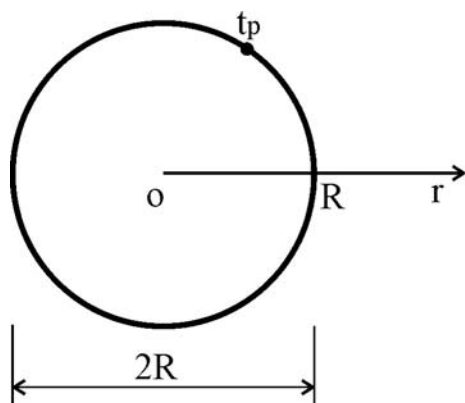


Fig. 2.78: Schița cilindrului

Determinarea soluției particulare a câmpului de temperaturi: cele două constante  $C_1$  și  $C_2$  se determină din impunerea condițiilor de unicitate.

$$\text{la } r = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dr} = 0$$

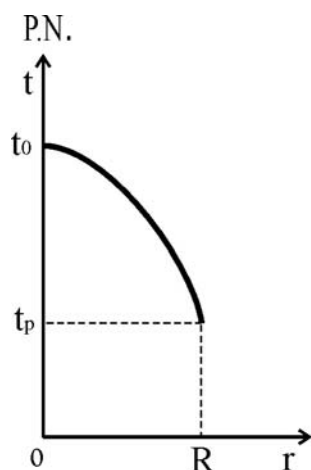
$$\text{la } r = R \quad \rightarrow \quad t = t_p$$

$$\left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=0} = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot r + \frac{C_1}{r} \Big|_{r=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$t|_{r=R} = -\frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot R^2 + C_2 = t_p \rightarrow C_2 = t_p + \frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot R^2$$

$$t = -\frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot r^2 + t_p + \frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot R^2 \rightarrow t = t_p + \frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot (R^2 - r^2) \quad [^\circ\text{C}]$$

**Remarcă:** Temperatura variază după o funcție parabolică cu vârful în axa cilindrului.



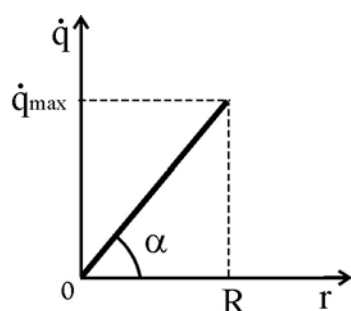
Temperatura maximă în cilindru:

$$t_{max} = t|_{r=0} = t_o = t_p + \frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot R^2$$

Temperatura adimensională:

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{t - t_p}{t_o - t_p} = \frac{R^2 - r^2}{R^2} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Fig. 2.79: Distribuția temperaturii



Determinarea fluxului termic unitar:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot \left(-\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot r\right)$$

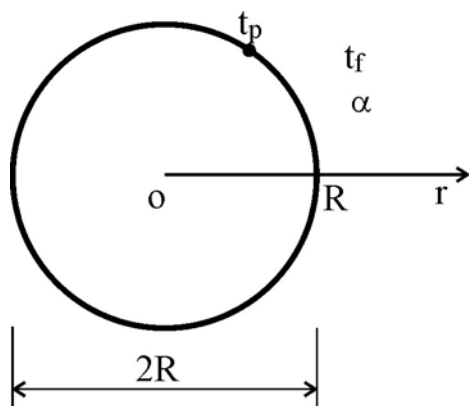
$$\dot{q} = \frac{\dot{q}_v}{2} \cdot r \quad [\text{W/m}^2]$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\dot{q}_v}{2}$$

Fig. 2.80: Variația fluxului termic unitar

**Remarcă:** Fluxul termic unitar variază liniar cu raza, este zero în axa cilindrului și are panta egală cu jumătate din valoarea fluxului izvoarelor interioare de căldură.

**Cazul cilindrului imersat într-un fluid**  
(simetrie şi condiţie la limită de speţa a treia)



**Fig. 2.81:** Schiţa cilindrului

Determinarea soluţiei particulare a câmpului de temperaturi:

$$\text{la } r = 0 \rightarrow \frac{dt}{dr} = 0$$

$$\text{la } r = R \rightarrow -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} = \alpha \cdot (t_p - t_f)$$

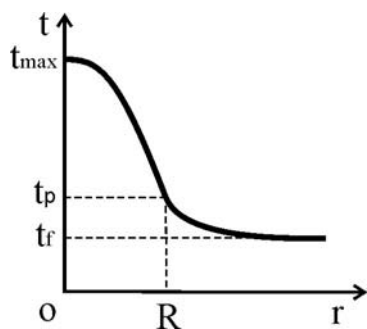
$$\frac{dt}{dr} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_p - t_f)$$

$$t = -\frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot r^2 + C_1 \cdot \ln r + C_2 \rightarrow \frac{dt}{dr} = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot r + C_1 \cdot \frac{1}{r}$$

$$\left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=0} = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot r + \frac{C_1}{r} \Big|_{r=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot R = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_p - t_f) \rightarrow t_p = t_f + \frac{\dot{q}_v}{2\alpha} \cdot R$$

$$t = t_p + \frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot (R^2 - r^2) \rightarrow t = t_f + \frac{\dot{q}_v}{2\alpha} \cdot R + \frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot (R^2 - r^2) \quad [^\circ\text{C}]$$



Temperatura maximă în cilindru:

$$t_{max} = t|_{r=0} = t_o = t_f + \frac{\dot{q}_v}{2\alpha} \cdot R + \frac{\dot{q}_v}{4\lambda} \cdot R^2$$

$$t_{max} = t_f + \frac{\dot{q}_v}{2} \cdot R \cdot \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{R}{2\lambda} \right)$$

**Fig. 2.82:** Distribuţia temperaturii

Determinarea fluxului termic unitar:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot \left( -\frac{\dot{q}_v}{2\lambda} \cdot r \right) \rightarrow \dot{q} = \frac{\dot{q}_v}{2} \cdot r \quad [\text{W/m}^2]$$

**Remarcă:** Fluxul termic unitar nu depinde de condiţiile la limită.