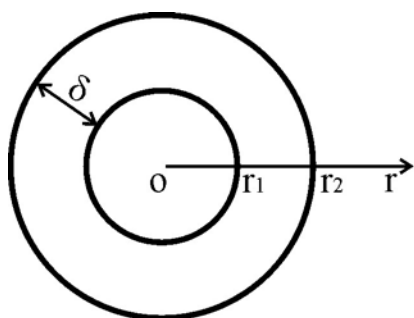


2.2.1.1.1.3. Conducţia prin pereţi sferici concentrici

Se consideră un perete sferic de grosime constantă (suprafeţele peretelui sunt concentrice) realizat dintr-un material omogen şi izotrop cu conductivitatea termică constantă. Suprafeţele izoterme sunt suprafeţe sferice concentrice şi paralele cu feţele peretelui, iar fluxul termic se propagă perpendicular pe acestea (şi anume pe direcţia razei).



Ipoteze: $r_1 \leq r \leq r_2$

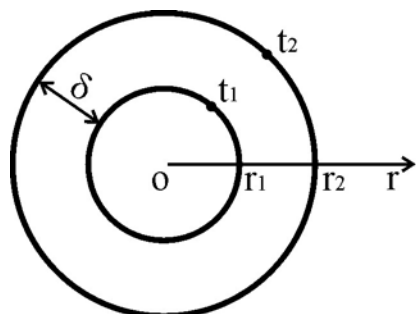
$$\lambda \neq \lambda(t)$$

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dn} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr}$$

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2} (r \cdot t)$$

Fig. 2.41: Schiţa peretelui sferic concentric

Cazul peretelui cu temperaturi cunoscute pe feţe (condiţii la limită de speţa întâi)



Ipoteze: $r_1 \leq r \leq r_2$

$$t_1 > t_2$$

Fig. 2.42: Schiţa peretelui

Determinarea soluţiei generale a câmpului de temperaturi:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2} (r \cdot t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{dr}{dr} \cdot t + r \cdot \frac{dt}{dr} \right) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{dt}{dr} + \frac{dr}{dr} \cdot \frac{dt}{dr} + r \cdot \frac{d^2 t}{dr^2} \right) = 0$$

$$\frac{1}{r} \cdot \left(2 \cdot \frac{dt}{dr} + r \cdot \frac{d^2 t}{dr^2} \right) = \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0$$

Se notează cu u derivata de ordinul întâi a temperaturii în raport cu raza, $\frac{dt}{dr} = u$ și rezultă:

$$\frac{du}{dr} + \frac{2}{r} \cdot u = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dr} = -\frac{2u}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{u} = -2 \cdot \frac{dr}{r}$$

$$\ln u = -2 \cdot \ln r + \ln C_1 = \ln C_1 - \ln r^2 = \ln \frac{C_1}{r^2} \quad \rightarrow \quad u = \frac{C_1}{r^2}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{C_1}{r^2} \cdot dr \quad \rightarrow \quad t = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad [^{\circ}\text{C}]$$

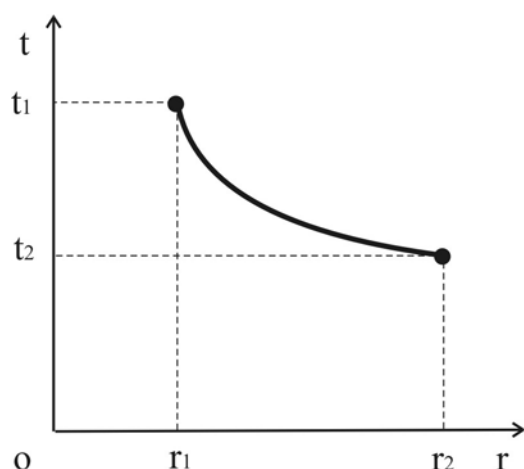
Remarcă: Variația temperaturii în perete este de tip putere cu exponent negativ.

Determinarea soluției particulare a câmpului de temperaturi se face prin impunerea condițiilor la limită de speța întâi:

la $r = r_1 \rightarrow t = t_1$

la $r = r_2 \rightarrow t = t_2$.

$$\begin{cases} t = -\frac{C_1}{r} + C_2 \\ t_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \\ t_2 = -\frac{C_1}{r_2} + C_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} t & -\frac{1}{r} & 1 \\ t_1 & -\frac{1}{r_1} & 1 \\ t_2 & -\frac{1}{r_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$



$$t \cdot \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{r} \cdot (t_1 - t_2) - \frac{t_1}{r_2} + \frac{t_2}{r_1} = 0$$

$$t = t_1 - \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

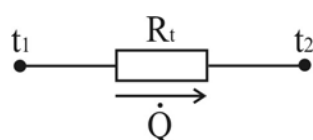
Fig. 2.43: Distribuția temperaturii în peretele sferic concentric

Determinarea fluxului de căldură unitar:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \right) = \frac{\lambda}{r^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W/m}^2]$$

$$\dot{Q} = S \cdot \dot{q} = \frac{4\pi \cdot r^2 \cdot \lambda}{r^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \cdot (t_1 - t_2) = \frac{4\pi \cdot \lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W}]$$

Remarcă: Fluxul termic unitar variază invers proporțional cu pătratul razei iar fluxul termic total este constant (nu depinde de rază).



$$\dot{Q} = \frac{t_1 - t_2}{R_t} \quad [\text{W}]$$

Fig. 2.44: Schema electrică analoagă pentru fluxul total

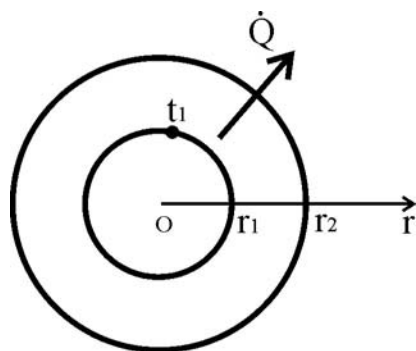
unde R_t reprezintă rezistența termică conductivă totală a peretelui sferic.

$$R_t = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi \cdot \lambda} = \frac{\dot{Q}}{t_1 - t_2} \quad [\text{K/W}]$$

Remarcă: Analogia electrică pentru fluxul termic unitar nu se poate aplica în cazul pereților sferici.

Cazul peretelui la care se cunosc temperatura pe suprafața interioară și fluxul termic total

(condiții la limită de speța întâi și a doua)



Ipoteze: $r_1 < r < r_2$

$$\dot{Q} > 0$$

Fig. 4.45: Schița peretelui

Determinarea soluției generale a câmpului de temperaturi:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot 4\pi \cdot r^2 = -4\pi \cdot r^2 \cdot \lambda \cdot \frac{dt}{dr}$$

$$dt = -\frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda} \cdot \frac{dr}{r^2} \rightarrow t = \frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda \cdot r} + C \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Soluția particulară a câmpului de temperaturi rezultă prin impunerea condiției la limită pe fața interioară a peretelui și determinarea constantei C :

la $r = r_I \rightarrow t = t_I$

$$t|_{r=r_I} = \frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda \cdot r_I} + C = t_I \rightarrow C = t_I - \frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda \cdot r_I}$$

$$t = \frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda \cdot r} + t_I - \frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda \cdot r_I} \rightarrow t = t_I - \frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r} \right) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Cazul peretelui având conductivitatea termică variabilă cu temperatura

$$\lambda = \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \quad [\text{W/m}\cdot\text{K}]$$

Determinarea soluției generale a câmpului de temperaturi atunci când se cunoaște fluxul termic total:

$$\dot{Q} = -4\pi \cdot \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \cdot r^2 \cdot \frac{dt}{dr} \rightarrow (1 + b \cdot t) dt = -\frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda_o} \cdot \frac{dr}{r^2}$$

$$t + \frac{b}{2} \cdot t^2 = \frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda_o} \cdot \frac{1}{r} + C \rightarrow t^2 + \frac{2}{b} \cdot t - \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \frac{1}{r} - \frac{2C}{b} = 0$$

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \frac{1}{r} + \frac{2C}{b}} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Soluția particulară a câmpului de temperaturi rezultă prin impunerea condiției la limită pe fața interioară a peretelui și determinarea constantei C :

la $r = r_I \rightarrow t = t_I$

$$t|_{r=r_l} = -\frac{l}{b} + \sqrt{\frac{l}{b^2} + \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \frac{l}{r_l} + \frac{2C}{b}} = t_l$$

$$\left(t_l + \frac{l}{b}\right)^2 = \frac{l}{b^2} + \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \frac{l}{r_l} + \frac{2C}{b}$$

$$C = \frac{b}{2} \cdot \left(t_l + \frac{l}{b}\right)^2 - \frac{l}{2b} - \frac{\dot{Q}}{4\pi \cdot \lambda_o} \cdot \frac{l}{r_l}$$

$$t = -\frac{l}{b} + \sqrt{\left(t_l + \frac{l}{b}\right)^2 - \frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \left(\frac{l}{r_l} - \frac{l}{r}\right)} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

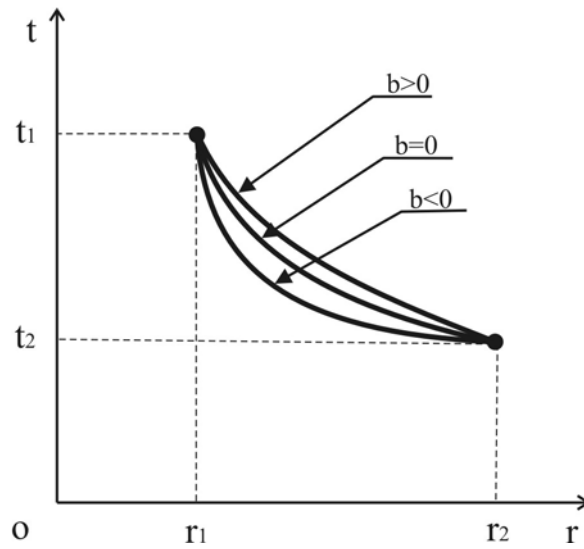


Fig. 2.46: Distribuția temperaturii în cazul conductivității variabile

Fluxului termic total, atunci când se cunosc temperaturile pe fețele peretelui, se determină prin integrarea ecuației lui Fourier între cele două limite:

$$\dot{Q} = -4\pi \cdot \lambda_o \cdot (l + b \cdot t) \cdot r^2 \cdot \frac{dt}{dr} \quad \rightarrow \quad \dot{Q} \cdot \frac{dr}{r^2} = -4\pi \cdot \lambda_o \cdot (l + b \cdot t) \cdot dt$$

$$\dot{Q} \cdot \int_{r_l}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -4\pi \cdot \lambda_o \cdot \int_{t_l}^{t_2} (l + b \cdot t) \cdot dt$$

$$\dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -4\pi \cdot \lambda_o \cdot \left[t_2 - t_1 + \frac{b}{2} \cdot (t_2^2 - t_1^2) \right]$$

$$\dot{Q} = \frac{4\pi \cdot \lambda_o}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \left[1 + \frac{b \cdot (t_1 + t_2)}{2} \right] \cdot (t_1 - t_2)$$

Se notează cu t_m media aritmetică a temperaturilor celor două fețe ale peretelui:

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$\dot{Q} = \frac{4\pi \cdot \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t_m)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W}]$$

Cazul peretelui având suprafețele scaldate de fluide

(condiții la limită de speța a treia)

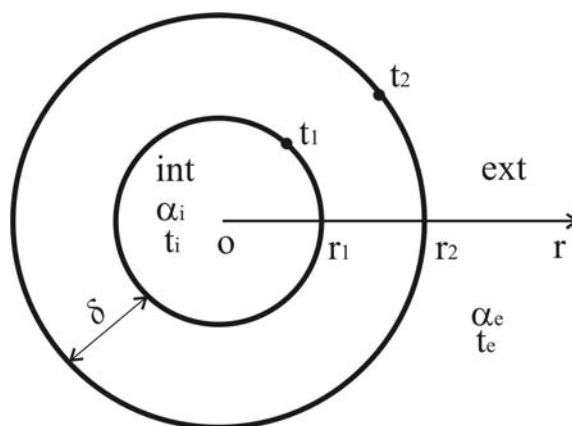


Fig. 2.47: Schița peretelui

Se consideră temperatura interioară mai mare decât cea exterioară.

$$t_i > t_1 > t_2 > t_e$$

și prin urmare fluxul termic se transmite de la interior către exterior.

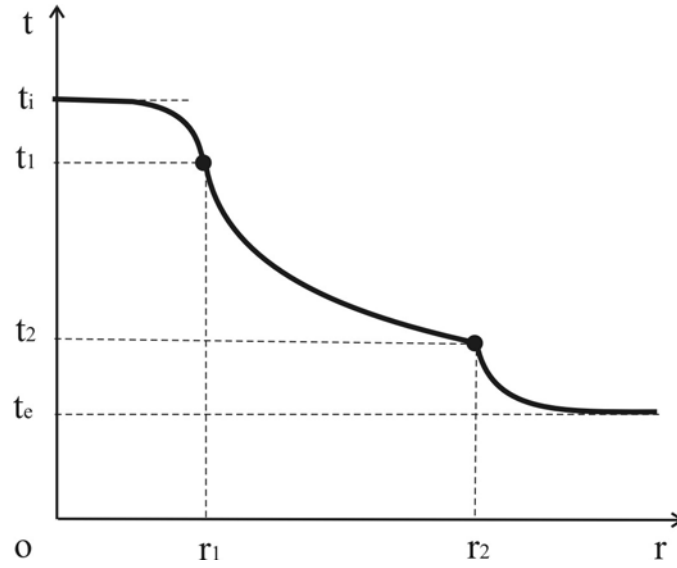


Fig. 2.48: Curba de variație a temperaturilor

Determinarea fluxului termic:

$$\begin{cases} \dot{Q} = 4\pi \cdot r_1^2 \cdot \alpha_i \cdot (t_i - t_1) \\ \dot{Q} = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \cdot (t_1 - t_2) \\ \dot{Q} = 4\pi \cdot r_2^2 \cdot \alpha_e \cdot (t_2 - t_e) \end{cases}$$

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_1}{\frac{l}{4\pi \cdot r_1^2 \cdot \alpha_i}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{r_2 - r_1}{4\pi \cdot \lambda \cdot r_1 \cdot r_2}} = \frac{t_2 - t_e}{\frac{l}{4\pi \cdot r_2^2 \cdot \alpha_e}}$$

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_e}{\frac{l}{4\pi \cdot r_1^2 \cdot \alpha_i} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi \cdot \lambda \cdot r_1 \cdot r_2} + \frac{l}{4\pi \cdot r_2^2 \cdot \alpha_e}} \quad [\text{W}]$$

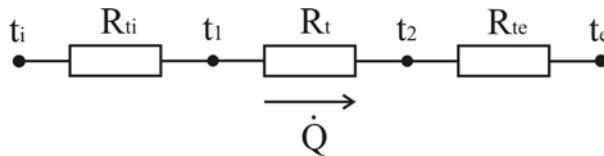


Fig. 2.49: Schema electrică analoagă pentru fluxul termic total

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_e}{R_{ti} + R_t + R_{te}} = \frac{t_i - t_e}{R_{tech}}$$

unde:

$R_{ti} = \frac{l}{4\pi \cdot r_1^2 \cdot \alpha_i}$ este rezistența termică convectivă totală la interior în K/W,

$R_t = \frac{r_2 - r_1}{4\pi \cdot \lambda \cdot r_1 \cdot r_2}$ este rezistența termică conductivă totală în K/W,

$R_{te} = \frac{l}{4\pi \cdot r_2^2 \cdot \alpha_e}$ este rezistența termică convectivă totală la exterior în K/W și

$R_{tech} = R_{ti} + R_t + R_{te}$ este rezistența termică totală echivalentă în K/W.

Cazul peretelui multistrat având suprafețele scăldate de fluide (condiții la limită de speța a treia și a patra)

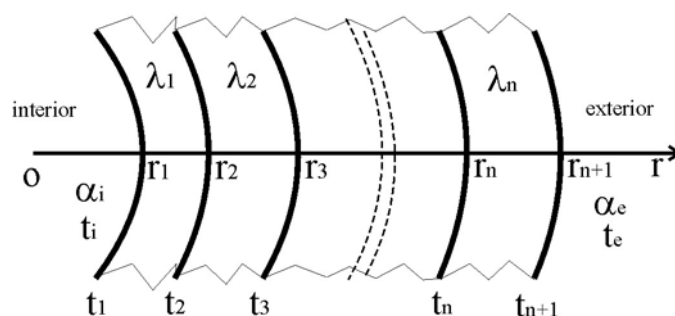


Fig. 2.50: Schița peretelui multistrat

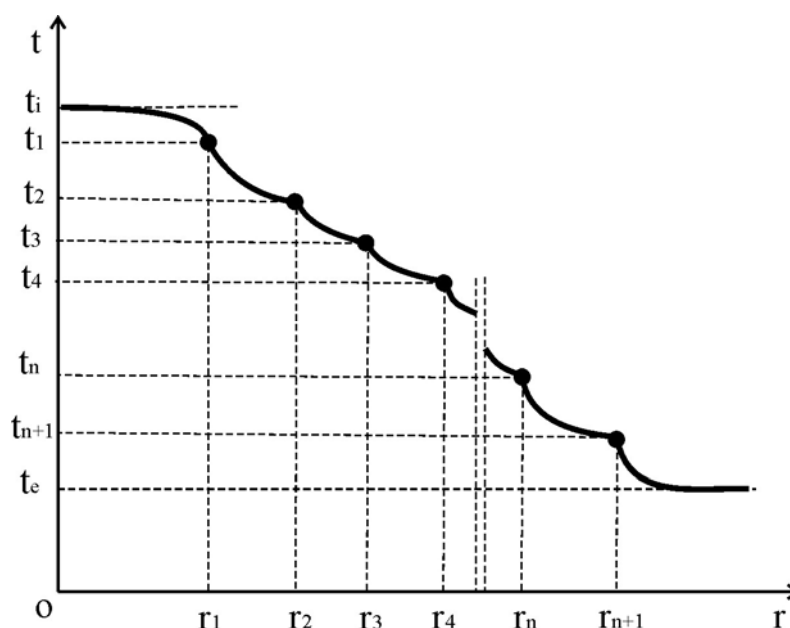


Fig. 2.51: Distribuția temperaturii

Se consideră temperatura interioară mai mare decât cea exterioară.

$$t_i > t_1 > t_2 > t_3 > \dots > t_n > t_{n+1} > t_e$$

Determinarea fluxului termic:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q} = 4\pi \cdot r_1^2 \cdot \alpha_i \cdot (t_i - t_1) \\ \dot{Q} = \frac{4\pi \cdot \lambda_1 \cdot r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \cdot (t_1 - t_2) \\ \dot{Q} = \frac{4\pi \cdot \lambda_2 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_3 - r_2} \cdot (t_2 - t_3) \\ \dots \\ \dot{Q} = \frac{4\pi \cdot \lambda_n \cdot r_n \cdot r_{n+1}}{r_{n+1} - r_n} \cdot (t_n - t_{n+1}) \\ \dot{Q} = 4\pi \cdot r_{n+1}^2 \cdot \alpha_e \cdot (t_{n+1} - t_e) \end{array} \right.$$

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_1}{\frac{l}{4\pi \cdot r_1^2 \cdot \alpha_i}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{l}{4\pi \cdot \lambda_1 \cdot r_1 \cdot r_2}} = \dots = \frac{t_n - t_{n+1}}{\frac{l}{4\pi \cdot \lambda_n \cdot r_n \cdot r_{n+1}}} = \frac{t_{n+1} - t_e}{\frac{l}{4\pi \cdot r_{n+1}^2 \cdot \alpha_e}}$$

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_e}{\frac{l}{4\pi \cdot r_1^2 \cdot \alpha_i} + \frac{l}{4\pi} \sum_{j=1}^n \frac{r_{j+1} - r_j}{\lambda_j \cdot r_j \cdot r_{j+1}} + \frac{l}{4\pi \cdot r_{n+1}^2 \cdot \alpha_e}} \quad [\text{W}]$$

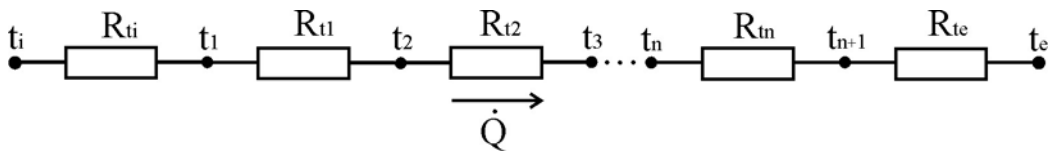


Fig. 2.52: Schema electrică analoagă pentru fluxul termic total

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_e}{R_{ti} + R_{tl} + R_{tl2} + \dots + R_{tn} + R_{te}} = \frac{t_i - t_e}{R_{tech}} \quad [\text{W}]$$

unde:

$R_{ti} = \frac{l}{4\pi \cdot r_l^2 \cdot \alpha_i}$ este rezistența termică convectivă totală la interior în K/W,

$R_{tj} = \frac{r_{j+1} - r_j}{4\pi \cdot \lambda_j \cdot r_j \cdot r_{j+1}}$ este rezistența termică conductivă totală în K/W,

$R_{te} = \frac{l}{4\pi \cdot r_{n+1}^2 \cdot \alpha_e}$ este rezistența termică convectivă totală la exterior în K/W,

$R_{tech} = R_{ti} + \sum_{j=1}^n R_{tj} + R_{te}$ este rezistența termică totală echivalentă în K/W.

Grosimea critică a izolației termice

Se consideră o suprafață sferică acoperită cu un strat de izolație termică. Se urmărește analiza variației fluxului termic total în funcție de raza suprafeței exterioare a izolației termice. Determinarea grosimii critice a izolației are aplicații la izolarea termică a rezervoarelor sferice.

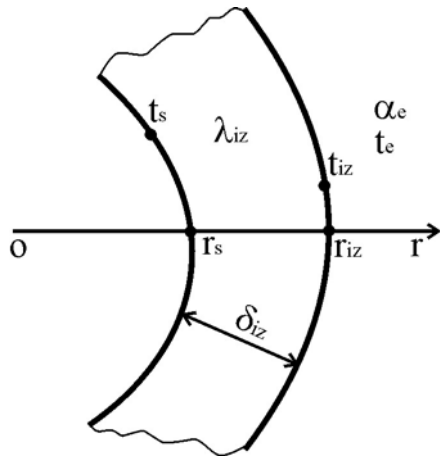


Fig. 2.53: Schița izolației termice

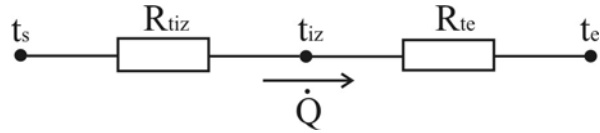


Fig. 2.54: Schema electrică analogă

$$\dot{Q} = \frac{t_s - t_e}{R_{tiz} + R_{te}} = \frac{t_s - t_e}{R_{tech}}$$

$$R_{tech} = R_{tiz} + R_{te} = \frac{r_{iz} - r_s}{4\pi \cdot \lambda_{iz} \cdot r_s \cdot r_{iz}} + \frac{l}{4\pi \cdot \alpha_e \cdot r_{iz}^2} = R_{tech}(r_{iz})$$

$$\dot{Q} = \frac{t_s - t_e}{R_{tech}} = \frac{4\pi \cdot \alpha_e \cdot \lambda_{iz} \cdot r_s \cdot r_{iz}^2}{\alpha_e \cdot r_{iz} \cdot (r_{iz} - r_s) + \lambda_{iz} \cdot r_s} \cdot (t_s - t_e) = \dot{Q}(r_{iz})$$

Remarcă: Fluxul termic total este invers proporțional cu rezistența termică totală echivalentă.

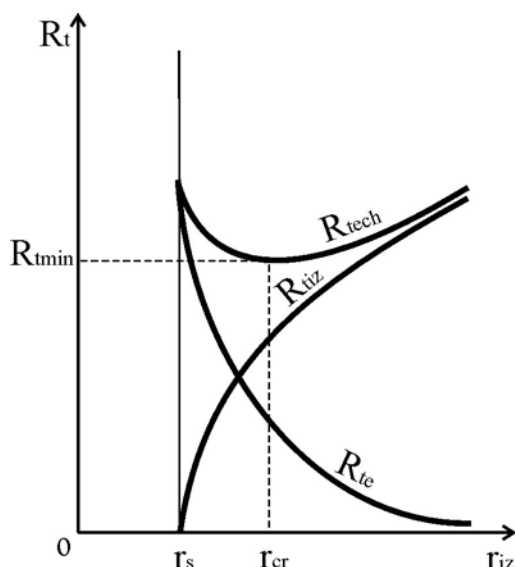


Fig. 2.55: Variația rezistenței termice totale în funcție de raza izolației

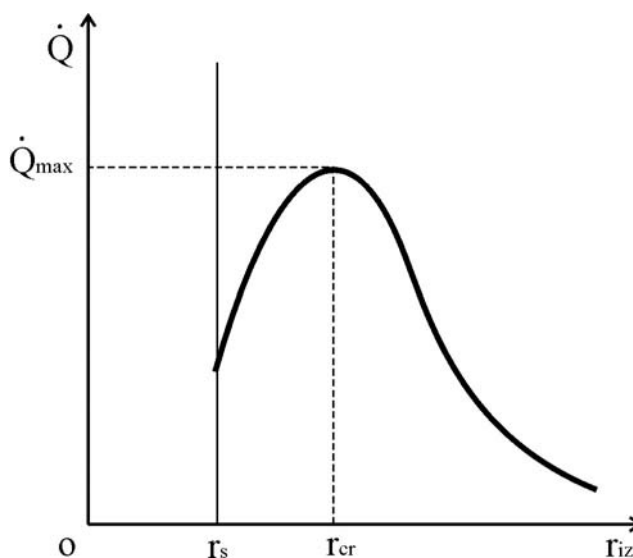


Fig. 2.56: Variația fluxului termic total în funcție de raza izolației

Rezistența termică totală echivalentă are un extrem (un minim) corespunzător unei mărimi a razei izolației numită **rază critică** r_{cr} . Valoarea acesteia se poate determina prin egalarea cu zero a derivatei de ordinul întâi a expresiei rezistenței termice totale echivalente:

$$\left. \frac{dR_{tech}}{dr_{iz}} \right|_{r_{iz}=r_{cr}} = \frac{1}{4\pi \cdot \lambda_{iz} \cdot r_{iz}^2} - \frac{2}{4\pi \cdot \alpha_e \cdot r_{iz}^3} \bigg|_{r_{iz}=r_{cr}} = 0$$

$$r_{cr} = \frac{2\lambda_{iz}}{\alpha_e}$$

Concluzie: Pentru a fi eficientă (pentru a reduce fluxul termic), o izolație termică aplicată unei suprafețe sferice trebuie să aibă raza exterioară mai mare decât raza critică.

$$r_{iz} > r_{cr}$$

În cazul în care raza suprafeței sferice ce urmează a fi izolată este mai mare decât raza critică, izolația termică, indiferent de grosimea ei, va reduce fluxul termic transferat. În caz contrar, pentru a fi eficientă, izolația termică va trebui să aibă grosimea mai mare decât cea critică:

$$\delta_{iz} > \delta_{cr} = r_{cr} - r_s = \frac{2\lambda_{iz}}{\alpha_e} - r_s \quad [\text{m}]$$

2.2.1.1.4. Rezistența termică de contact

Se consideră un perete plan paralel format din două straturi care se află în contact direct. Transferul de căldură prin perete se realizează unidirecțional. Datorită rugozității suprafețelor, contactul dintre cele două straturi este imperfect iar spațiile (golurile) formate sunt umplute, în cele mai multe dintre cazuri, cu aer, care introduce o rezistență termică suplimentară.

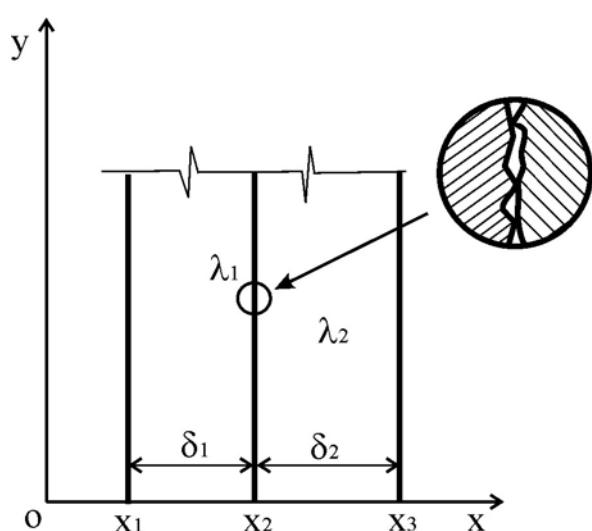


Fig. 2.57: Schița peretelui

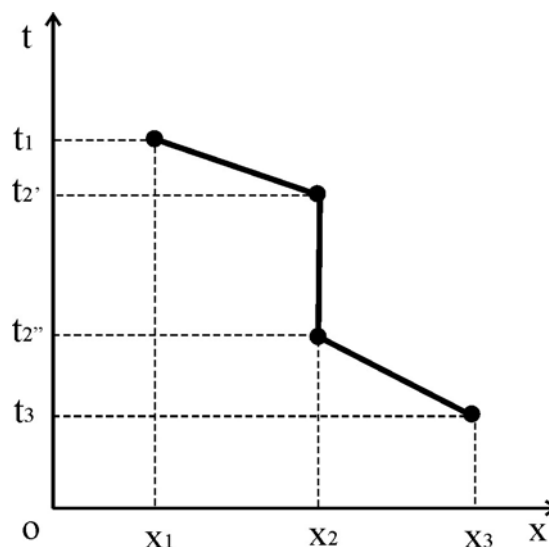


Fig. 2.58: Distribuția temperaturii

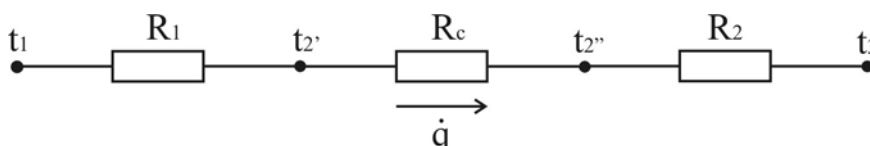


Fig. 2.59: Schema electrică analoagă

$$\dot{q} = \frac{t_1 - t_3}{R_1 + R_c + R_2} = \frac{t_1 - t_3}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{l}{\alpha_c} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}}$$

unde R_1 și R_2 sunt rezistențele termice unitare conductive ale celor două straturi, R_c este rezistența termică unitară de contact în $\text{m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$, iar α_c este coeficientul de contact în $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$.

$$R_c = \frac{l}{\alpha_c} = \frac{t_{2'} - t_{2''}}{\dot{q}} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}]$$

Rezistența termică de contact poate fi întâlnită atât la pereții multistrat plani cât și la cei cilindrici și sferici.