

Soluția generală a câmpului de temperaturi se determină prin integrarea ecuației căldurii:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dt}{dr} \right) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{dr}{dr} \cdot \frac{dt}{dr} + r \cdot \frac{d^2 t}{dr^2} \right) = \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0$$

Se face notația $\frac{dt}{dr} = u$ și rezultă:

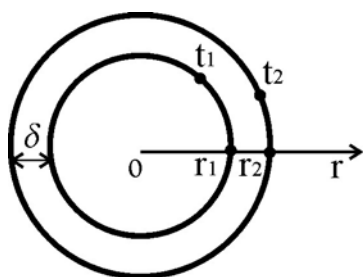
$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \cdot u = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dr} = -\frac{u}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}$$

$$\ln u = -\ln r + \ln C_1 \quad \rightarrow \quad \ln u = \ln \frac{C_1}{r} \quad \rightarrow \quad u = \frac{C_1}{r}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{C_1}{r} \cdot dr \quad \rightarrow \quad t = C_1 \cdot \ln r + C_2$$

Remarcă: Variația temperaturii în peretele cilindric este logaritmică.

Cazul peretelui cu temperaturi cunoscute pe fețe (condiții la limită de speța întâi)



Ipoteze: $r_1 \leq r \leq r_2$
 $t_1 > t_2$

Fig. 2.23: Schița peretelui

Determinarea soluției particulare a câmpului de temperaturi se face prin impunerea condițiilor la limită de speța întâi:

$$\text{la } r = r_1 \rightarrow t = t_1$$

$$\text{la } r = r_2 \rightarrow t = t_2$$

$$\begin{cases} t = C_1 \cdot \ln r + C_2 \\ t_1 = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2 \\ t_2 = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} t & \ln r & 1 \\ t_1 & \ln r_1 & 1 \\ t_2 & \ln r_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$t \cdot (\ln r_1 - \ln r_2) - \ln r \cdot (t_1 - t_2) + t_1 \cdot \ln r_2 - t_2 \cdot \ln r_1 = 0$$

$$t = t_1 - \frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \cdot (t_1 - t_2) = t_1 - \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

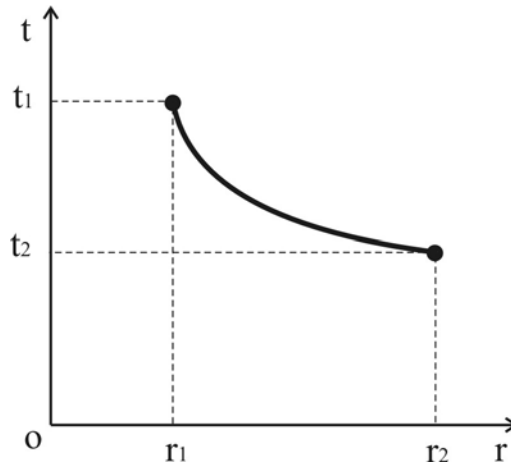


Fig. 2.24: Distribuția temperaturii în peretele cilindric coaxial

Fluxul de căldură unitar se determină din ecuația lui Fourier:

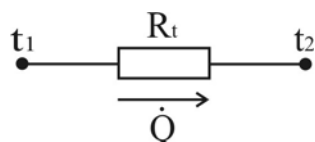
$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot \left[-\frac{\frac{1}{r}}{\ln r_2 - \ln r_1} \cdot (t_1 - t_2) \right] = \frac{\lambda}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W/m}^2]$$

Remarcă: Spre deosebire de peretele plan paralel, fluxul termic unitar nu mai este constant, variația lui fiind invers proporțională cu raza.

Fluxul de căldură total care străbate peretele va fi:

$$\dot{Q} = S \cdot \dot{q} = \frac{2\pi \cdot r \cdot l \cdot \lambda}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (t_1 - t_2) = \frac{2\pi \cdot l \cdot \lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W}]$$

Remarcă: Fluxul termic total este constant (nu depinde de rază).



$$\dot{Q} = \frac{t_1 - t_2}{R_t} \quad [\text{W}]$$

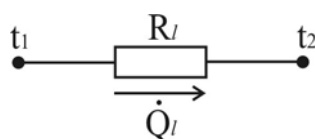
Fig. 2.25: Schema electrică
analoagă pentru fluxul total

unde R_t reprezintă rezistența termică
conductivă totală a peretelui cilindric.

$$R_t = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \cdot l \cdot \lambda} = \frac{t_1 - t_2}{\dot{Q}} \quad [\text{K/W}]$$

Se definește **fluxul termic liniar**, $\dot{Q}_l$, ca raportul dintre fluxul termic total și lungimea peretelui cilindric.

$$\dot{Q}_l = \frac{\dot{Q}}{l} = \frac{2\pi \cdot \lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W/m}]$$



$$\dot{Q}_l = \frac{t_1 - t_2}{R_l} \quad [\text{W/m}]$$

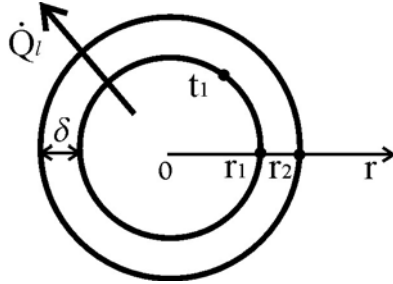
Fig. 2.26: Schema electrică
analoagă pentru fluxul liniar

unde R_l reprezintă rezistența termică
conductivă liniară a peretelui cilindric:

$$R_l = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \cdot \lambda} = \frac{t_1 - t_2}{\dot{Q}_l} \quad [\text{m} \cdot \text{K/W}]$$

Remarcă: Analogia electrică pentru fluxul termic unitar nu se poate aplica în cazul pereților cilindrici.

**Cazul peretelui la care se cunosc temperatura pe
suprafaţa interioară şi fluxul termic liniar**
(condiţii la limită de speţa întâi şi a doua)



Determinarea soluţiei generale a câmpului de temperaturi:

$$\dot{Q}_l = \dot{q} \cdot \frac{S}{l} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot l}{l} = -2\pi \cdot \lambda \cdot r \cdot \frac{dt}{dr}$$

Fig. 2.27: Schiţa peretelui

$$dt = -\frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \frac{dr}{r}$$

$$t = -\frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln r + C \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Soluţia particulară a câmpului de temperaturi rezultă prin impunerea condiţiei la limită pe faţa interioară a peretelui şi determinarea constantei C :

$$\text{la } r = r_l \rightarrow t = t_l$$

$$t|_{r=r_l} = -\frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln r_l + C = t_l \rightarrow C = t_l + \frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln r_l$$

$$t = -\frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln r + t_l + \frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln r_l \rightarrow t = t_l - \frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{r}{r_l} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

**Cazul peretelui având conductivitatea termică
variabilă cu temperatura**

$$\lambda = \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \quad [\text{W/m}\cdot\text{K}]$$

Determinarea soluţiei generale a câmpului de temperaturi atunci când se cunoaşte fluxul termic liniar:

$$\dot{Q}_l = -2\pi \cdot \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \cdot r \cdot \frac{dt}{dr} \rightarrow (1 + b \cdot t) dt = -\frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda_o} \cdot \frac{dr}{r}$$

$$t + \frac{b}{2} \cdot t^2 = -\frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda_o} \cdot \ln r + C \rightarrow t^2 + \frac{2}{b} \cdot t + \frac{\dot{Q}_l}{\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \ln r - \frac{2C}{b} = 0$$

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{\dot{Q}_l}{\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \ln r + \frac{2C}{b}} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Soluția particulară a câmpului de temperaturi rezultă prin impunerea condiției la limită pe fața interioară a peretelui și determinarea constantei C :

la $r = r_l \rightarrow t = t_l$

$$t|_{r=r_l} = -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{\dot{Q}_l}{\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \ln r_l + \frac{2C}{b}} = t_l$$

$$\left(t_l + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{\dot{Q}_l}{\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \ln r_l + \frac{2C}{b}$$

$$C = \frac{b}{2} \cdot \left(t_l + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{1}{2b} + \frac{\dot{Q}_l}{2\pi \cdot \lambda_o} \cdot \ln r_l$$

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_l + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{\dot{Q}_l}{\pi \cdot b \cdot \lambda_o} \cdot \ln \frac{r}{r_l}} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

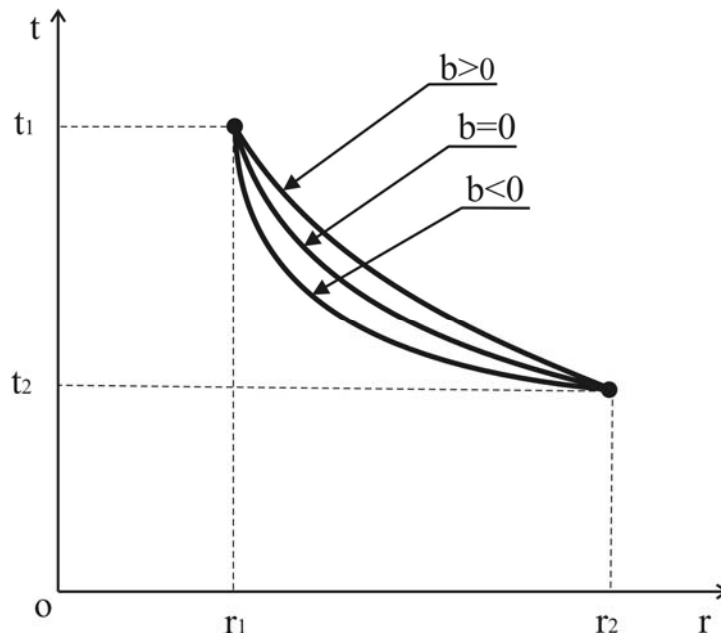


Fig. 2.28: Distribuția temperaturii în cazul conductivității variabile

Determinarea fluxului termic liniar atunci când se cunosc temperaturile celor două fețe se face prin integrarea între limitele peretelui:

$$\dot{Q}_l = -2\pi \cdot \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \cdot r \cdot \frac{dt}{dr} \quad \rightarrow \quad \dot{Q}_l \cdot \frac{dr}{r} = -2\pi \cdot \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \cdot dt$$

$$\dot{Q}_l \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi \cdot \lambda_o \cdot \int_{t_1}^{t_2} (1 + b \cdot t) \cdot dt$$

$$\dot{Q}_l \cdot (\ln r_2 - \ln r_1) = -2\pi \cdot \lambda_o \cdot \left[t_2 - t_1 + \frac{b}{2} \cdot (t_2^2 - t_1^2) \right]$$

$$\dot{Q}_l = \frac{2\pi \cdot \lambda_o}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \left[1 + \frac{b \cdot (t_1 + t_2)}{2} \right] \cdot (t_1 - t_2)$$

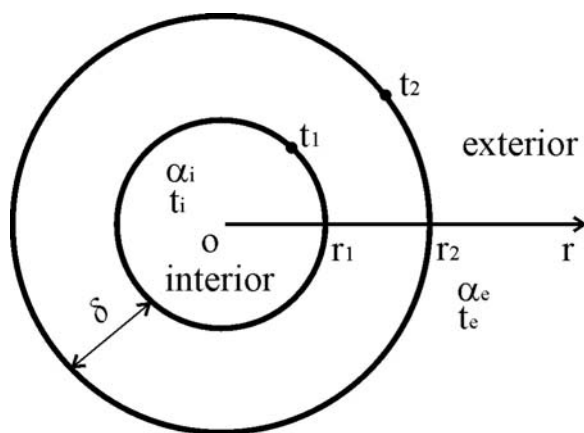
Se notează cu t_m media aritmetică a temperaturilor celor două fețe:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = t_m$$

$$\dot{Q}_l = \frac{2\pi \cdot \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t_m)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W/m}]$$

Cazul peretelui având suprafețele încălzite de fluide

(condiții la limită de speța a treia)



Se consideră temperatura fluidului din interior mai mare decât cea a fluidului din exterior.

$$t_i > t_1 > t_2 > t_e$$

Fig. 2.29: Schița peretelui

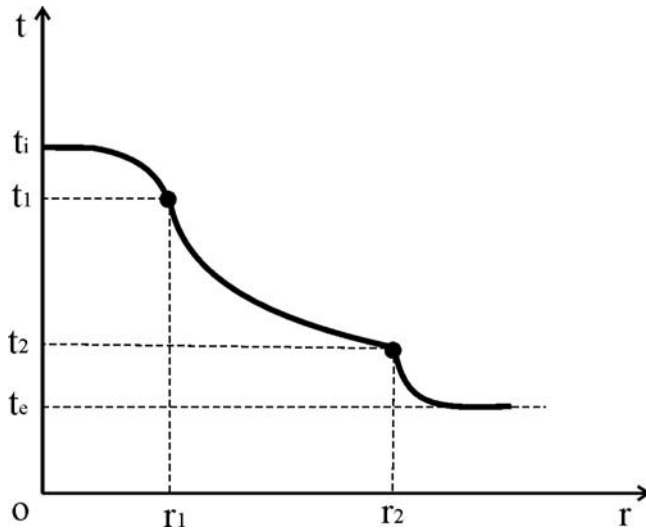


Fig. 2.30: Variația temperaturii

Determinarea fluxului termic liniar:

$$\begin{cases} \dot{Q}_l = 2\pi \cdot r_1 \cdot \alpha_i \cdot (t_i - t_1) \\ \dot{Q}_l = \frac{2\pi \cdot \lambda}{\ln(r_2/r_1)} \cdot (t_1 - t_2) \\ \dot{Q}_l = 2\pi \cdot r_2 \cdot \alpha_e \cdot (t_2 - t_e) \end{cases}$$

$$\dot{Q}_l = \frac{t_i - t_1}{\frac{l}{2\pi \cdot r_1 \cdot \alpha_i}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{l}{2\pi \cdot \lambda}} = \frac{t_2 - t_e}{\frac{l}{2\pi \cdot r_2 \cdot \alpha_e}}$$

$$\dot{Q}_l = \frac{t_i - t_e}{\frac{l}{2\pi \cdot r_1 \cdot \alpha_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi \cdot \lambda} + \frac{l}{2\pi \cdot r_2 \cdot \alpha_e}} \quad [\text{W/m}]$$

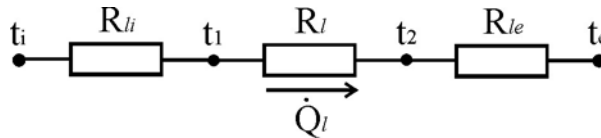


Fig. 2.31: Schema electrică analoagă pentru fluxul termic liniar

$$\dot{Q}_l = \frac{t_i - t_e}{R_{li} + R_l + R_{le}} = \frac{t_i - t_e}{R_{lech}} \quad [\text{W/m}^2]$$

unde:

$$R_{li} = \frac{l}{2\pi \cdot r_1 \cdot \alpha_i} \text{ este rezistența termică convectivă liniară la interior în m·K/W,}$$

$$R_l = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi \cdot \lambda} \text{ este rezistența termică conductivă liniară în m·K/W,}$$

$$R_{le} = \frac{l}{2\pi \cdot r_2 \cdot \alpha_e} \text{ este rezistența termică convectivă liniară la exterior în m·K/W,}$$

$$R_{lech} = R_{li} + R_l + R_{le} \text{ este rezistența termică liniară echivalentă în m·K/W.}$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_l \cdot l = \frac{t_i - t_e}{\frac{l}{2\pi \cdot r_l \cdot l \cdot \alpha_i} + \frac{\ln(r_2/r_l)}{2\pi \cdot l \cdot \lambda} + \frac{l}{2\pi \cdot r_2 \cdot l \cdot \alpha_e}} \quad [\text{W}]$$

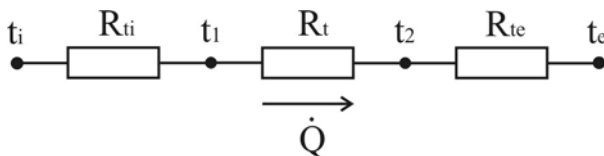


Fig. 2.32: Schema electrică analoagă pentru fluxul termic total

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_e}{R_{ti} + R_t + R_{te}} = \frac{t_i - t_e}{R_{tech}}$$

unde:

$$R_{ti} = \frac{l}{2\pi \cdot r_l \cdot l \cdot \alpha_i} \text{ este rezistența termică convectivă totală la interior în K/W,}$$

$$R_t = \frac{\ln(r_2/r_l)}{2\pi \cdot l \cdot \lambda} \text{ este rezistența termică conductivă totală în K/W,}$$

$$R_{te} = \frac{l}{2\pi \cdot r_2 \cdot l \cdot \alpha_e} \text{ este rezistența termică convectivă totală la exterior în K/W și}$$

$$R_{tech} = R_{ti} + R_t + R_{te} \text{ este rezistența termică totală echivalentă în K/W.}$$

Cazul peretelui multistrat având suprafețele scăldate de fluide (condiții la limită de speța a treia și a patra)

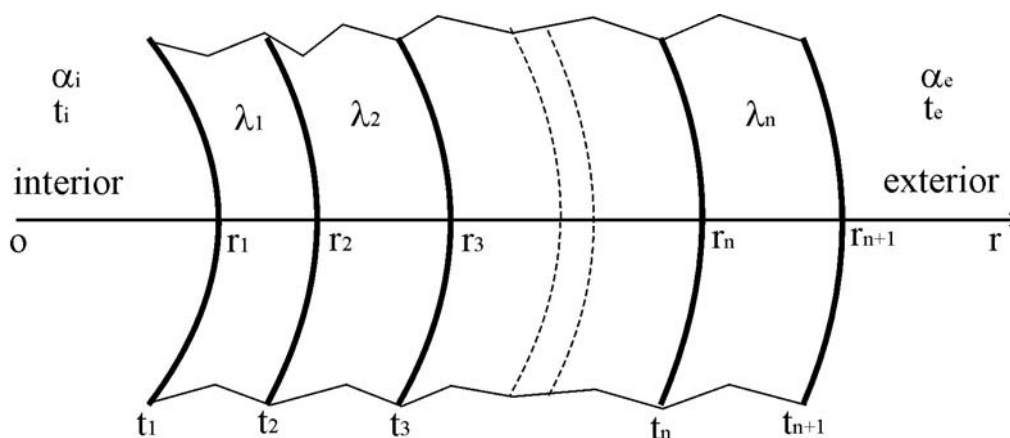
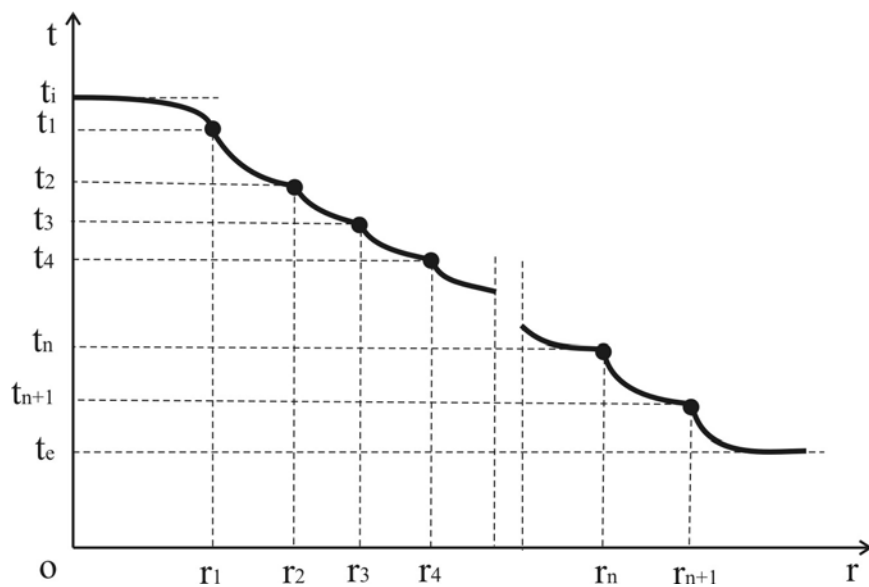


Fig. 2.33: Schița peretelui multistrat

Se consideră temperatura interioară mai mare decât cea exterioară.

$$t_i > t_1 > t_2 > t_3 > \dots > t_n > t_{n+1} > t_e$$



2.34: Variația temperaturii

Determinarea fluxului termic liniar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_l = 2\pi \cdot r_1 \cdot \alpha_i \cdot (t_i - t_1) \\ \dot{Q}_l = \frac{2\pi \cdot \lambda_1}{\ln(r_2/r_1)} \cdot (t_1 - t_2) \\ \dot{Q}_l = \frac{2\pi \cdot \lambda_2}{\ln(r_3/r_2)} \cdot (t_2 - t_3) \\ \dots \\ \dot{Q}_l = \frac{2\pi \cdot \lambda_n}{\ln(r_{n+1}/r_n)} \cdot (t_n - t_{n+1}) \\ \dot{Q}_l = 2\pi \cdot r_{n+1} \cdot \alpha_e \cdot (t_{n+1} - t_e) \end{array} \right.$$

$$\dot{Q}_l = \frac{t_i - t_1}{\frac{l}{2\pi \cdot r_1 \cdot \alpha_i}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{l}{2\pi \cdot \lambda_1}} = \frac{t_2 - t_3}{\frac{l}{2\pi \cdot \lambda_2}} = \dots = \frac{t_n - t_{n+1}}{\frac{l}{2\pi \cdot \lambda_n}} = \frac{t_{n+1} - t_e}{\frac{l}{2\pi \cdot r_{n+1} \cdot \alpha_e}}$$

$$\dot{Q}_l = \frac{t_i - t_e}{\frac{1}{2\pi \cdot r_l \cdot \alpha_i} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_1^n \frac{\ln(r_{j+1}/r_j)}{\lambda_j} + \frac{1}{2\pi \cdot r_{n+1} \cdot \alpha_e}} \quad [\text{W/m}]$$

Fig. 2.35: Schema electrică analoagă pentru fluxul termic liniar

$$\dot{Q}_l = \frac{t_i - t_e}{R_{li} + R_{l1} + R_{l2} + \dots + R_{ln} + R_{le}} = \frac{t_i - t_e}{R_{lech}} \quad [\text{W/m}]$$

unde:

$$R_{li} = \frac{1}{2\pi \cdot r_l \cdot \alpha_i} \text{ este rezistența termică convectivă liniară la interior în m·K/W,}$$

$$R_{lj} = \frac{\ln \frac{r_{j+1}}{r_j}}{2\pi \cdot \lambda_j} \text{ este rezistența termică conductivă liniară a stratului "j" în m·K/W,}$$

$$R_{le} = \frac{1}{2\pi \cdot r_{n+1} \cdot \alpha_e} \text{ este rezistența termică convectivă liniară la exterior în m·K/W,}$$

$$R_{lech} = R_{li} + \sum_1^n R_{lj} + R_{le} \text{ este rezistența termică liniară echivalentă în m·K/W.}$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_l \cdot l = \frac{t_i - t_e}{\frac{1}{2\pi \cdot r_l \cdot l \cdot \alpha_i} + \frac{1}{2\pi \cdot l} \cdot \sum_1^n \frac{\ln(r_{j+1}/r_j)}{\lambda_j} + \frac{1}{2\pi \cdot r_{n+1} \cdot l \cdot \alpha_e}} \quad [\text{W}]$$

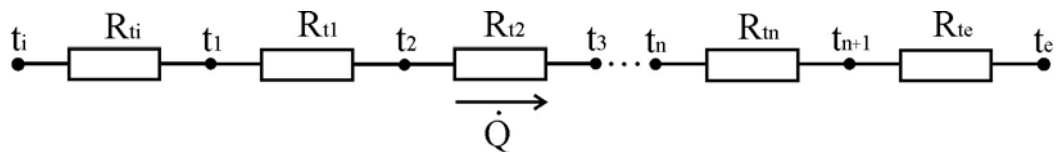


Fig. 2.36: Schema electrică analoagă pentru fluxul termic total

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_e}{R_{ti} + R_{t1} + R_{t2} + \dots + R_{tn} + R_{te}} = \frac{t_i - t_e}{R_{tech}} \quad [\text{W}]$$

unde:

$$R_{ti} = \frac{l}{2\pi \cdot r_1 \cdot l \cdot \alpha_i} \text{ este rezistența termică convectivă totală la interior,}$$

$$R_{tj} = \frac{\ln(r_{j+1}/r_j)}{2\pi \cdot l \cdot \lambda_j} \text{ este rezistența termică conductivă totală a stratului "j",}$$

$$R_{te} = \frac{l}{2\pi \cdot r_2 \cdot l \cdot \alpha_e} \text{ este rezistența termică convectivă totală la exterior,}$$

$$R_{tech} = R_{ti} + \sum_l^n R_{tj} + R_{te} \text{ este rezistența termică totală echivalentă în m·K/W.}$$

Grosimea critică a izolației termice

Se consideră o suprafață cilindrică acoperită cu un strat de izolație termică. Se urmărește analiza variației fluxului termic liniar în funcție de raza suprafeței exterioare a izolației termice. Determinarea grosimii critice a izolației are aplicații la izolarea termică a conductorilor electrici și a conductelor care transportă agenți termici sau frigorifici.

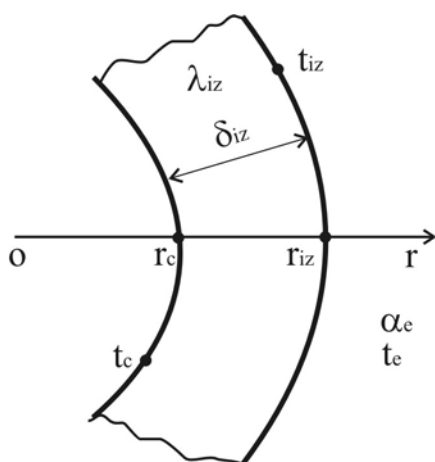


Fig. 2.37: Schița izolației termice

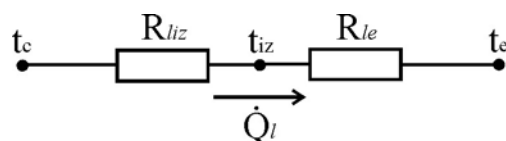


Fig. 2.38: Schema electrică analoagă

$$\dot{Q}_l = \frac{t_c - t_e}{R_{liz} + R_{le}} = \frac{t_c - t_e}{R_{lech}}$$

$$R_{lech} = R_{liz} + R_{le} = \frac{\ln \frac{r_{iz}}{r_c}}{2\pi \cdot \lambda_{iz}} + \frac{l}{2\pi \cdot \alpha_e \cdot r_{iz}} = R_{lech}(r_{iz})$$

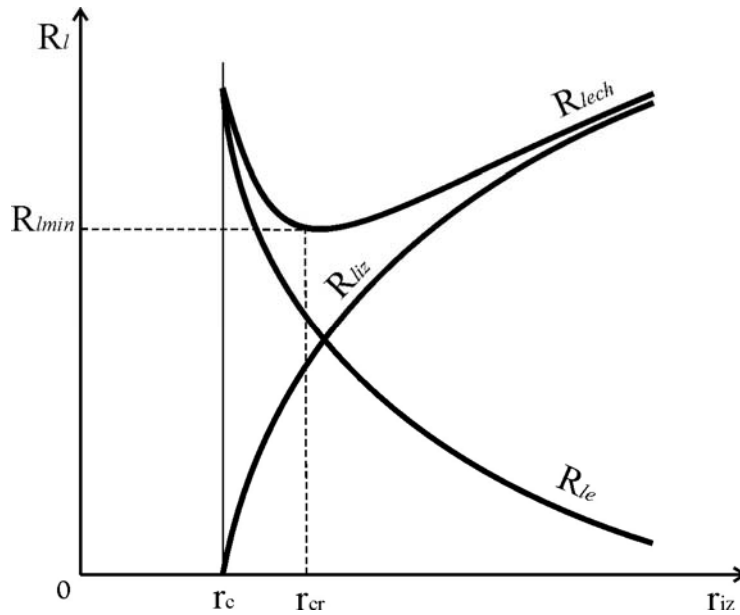


Fig. 2.39: Variația rezistenței termice liniare în funcție de raza izolației

Rezistența termică liniară echivalentă are un extrem (un minim) corespunzător unei mărimi a razei izolației numită **rază critică** r_{cr} . Valoarea acesteia se poate determina prin anularea derivatei de ordinul întâi a expresiei rezistenței termice liniare echivalente:

$$\left. \frac{dR_{lech}}{dr_{iz}} \right|_{r_{iz}=r_{cr}} = \frac{l}{2\pi \cdot \lambda_{iz} \cdot r_{iz}} - \frac{l}{2\pi \cdot \alpha_e \cdot r_{iz}^2} \bigg|_{r_{iz}=r_{cr}} = 0$$

$$r_{cr} = \frac{\lambda_{iz}}{\alpha_e}$$

Fluxul termic liniar este invers proporțional cu rezistența termică liniară echivalentă, și deci va avea un maxim corespunzător razei critice.

$$\dot{Q}_l = \frac{t_c - t_e}{R_{lech}} = \frac{2\pi \cdot \alpha_e \cdot \lambda_{iz} \cdot r_{iz}}{\alpha_e \cdot r_{iz} \cdot \ln \frac{r_{iz}}{r_c} + \lambda_{iz}} \cdot (t_c - t_e) = \dot{Q}_l(r_{iz})$$

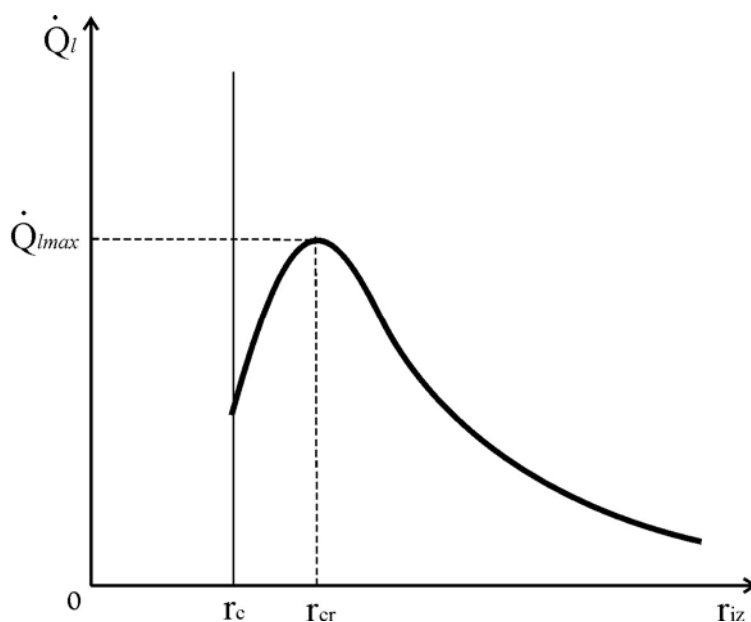


Fig. 2.40: Variația fluxului termic liniar în funcție de raza izolației

Concluzie: Pentru a fi eficientă (pentru a reduce fluxul termic), o izolație termică aplicată unei suprafețe cilindrice trebuie să aibă raza exterioară mai mare decât raza critică.

$$r_{iz} > r_{cr}$$

În cazul în care raza suprafeței cilindrice ce urmează a fi izolată este mai mare decât raza critică, izolația termică, indiferent de grosimea ei, va reduce fluxul termic transferat. În caz contrar, pentru a fi eficientă, izolația termică va trebui să aibă grosimea mai mare decât cea critică:

$$\delta_{iz} > \delta_{cr} = r_{cr} - r_c = \frac{\lambda_{iz}}{\alpha_e} - r_c \quad [\text{m}]$$