

2.2. Conducția căldurii în regim staționar

Temperatura nu variază în timp ($\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$) și deci ecuația generală a conducției devine:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c_p} = 0$$

sau,

$$\nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0$$

care reprezintă ecuația diferențială a căldurii în regim staționar (ecuația lui Poisson).

2.2.1. Transmiterea unidirecțională a căldurii

În coordonate carteziene, se consideră transmiterea căldurii și variația temperaturii numai în direcția axei x . Laplace-ianul temperaturii va avea forma:

$$\nabla^2 t = \frac{d^2 t}{d x^2}$$

iar ecuația diferențială a conducției căldurii:

$$\frac{d^2 t}{d x^2} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0$$

În coordonate cilindrice, se consideră transmiterea căldurii și variația temperaturii numai în direcția razei r . Laplace-ianul temperaturii va avea forma:

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d r} \left(r \cdot \frac{d t}{d r} \right)$$

iar ecuația diferențială a conducției căldurii:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d r} \left(r \cdot \frac{d t}{d r} \right) + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0$$

În coordonate sferice, se consideră transmiterea căldurii şi variaţia temperaturii numai în direcţia razei r . Laplace-ianul temperaturii va avea forma:

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2}(r \cdot t)$$

iar ecuaţia diferenţială a conducţiei căldurii:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2}(r \cdot t) + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0$$

2.2.1.1. Corpuri fără izvoare interioare de căldură

Corpul (sistemul) analizat nu are izvoare (surse) interioare de căldură, nici pozitive şi nici negative.

$$\dot{q}_v = 0$$

Ecuaţia diferenţială a conducţiei în regim staţionar fără izvoare interioare de căldură (ecuaţia lui Laplace) devine:

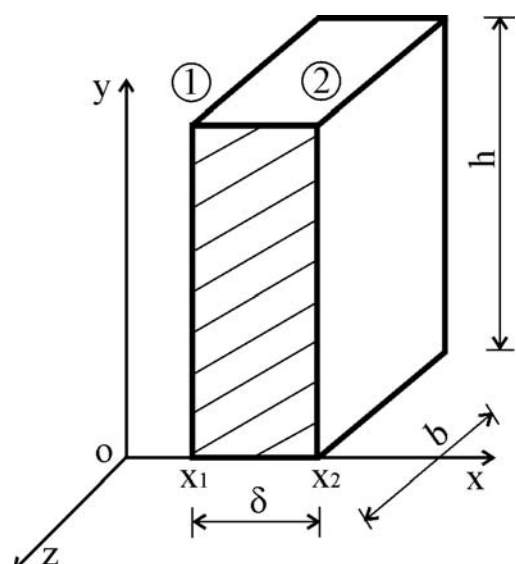
$$\nabla^2 t = 0$$

2.2.1.1.1. Conducţia prin pereţi

Studiul conducţiei prin pereţi urmăreşte determinarea câmpului de temperaturi şi a fluxului termic în diferiţi pereţi (plani, cilindrici şi sferici) pentru condiţii la limită impuse.

2.2.1.1.1.1. Conducţia prin pereţi plani paraleli

Se consideră un perete plan cu feţele paralele, realizat dintr-un material omogen şi izotrop având conductivitatea termică constantă. Grosimea peretelui este mult mai mică decât celelalte două dimensiuni (lungimea şi înălţimea) astfel încât efectele de capăt sunt neglijabile iar suprafeţele izoterme sunt planuri paralele cu feţele peretelui. Fluxul termic se transmite unidirecţional, perpendicular pe suprafeţele izoterme.



Ipoteze: $\lambda \neq \lambda(t)$

$$\delta \ll b$$

$$\delta \ll h$$

Ecuția diferențială a conducției prin perete are forma:

$$\nabla^2 t = \frac{d^2 t}{d x^2} = 0$$

Fig. 2.3: Peretele plan paralel

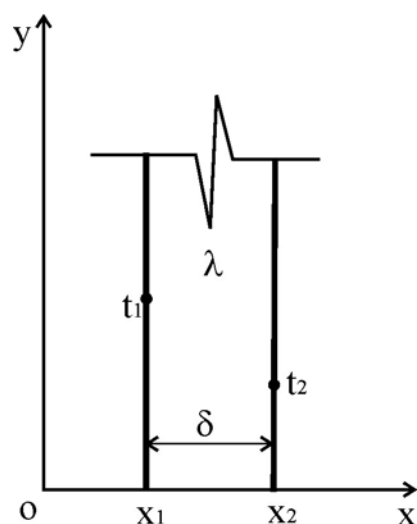
Soluția generală a câmpului de temperaturi se determină prin integrarea ecuației căldurii:

$$\frac{d^2 t}{d x^2} = 0 \rightarrow \frac{d}{d x} \left(\frac{d t}{d x} \right) = 0 \rightarrow \frac{d t}{d x} = C_1$$

$$t = C_1 \cdot x + C_2 \quad [^\circ\text{C}]$$

Remarcă: Variația temperaturii în perete este liniară.

Cazul peretelui cu temperaturi cunoscute pe fețe
(condiții la limită de speța întâi)



Ipoteze: $x_1 \leq x \leq x_2$

$$t_1 > t_2$$

Pentru determinarea soluției particulare a câmpului de temperaturi, se impun condițiile la limită de speța întâi:

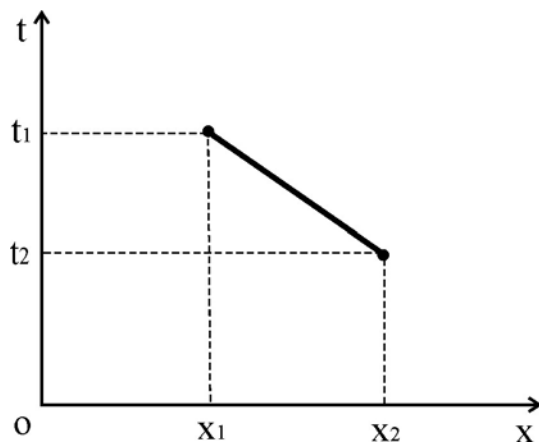
$$\text{la } x = x_1 \rightarrow t = t_1$$

$$\text{la } x = x_2 \rightarrow t = t_2$$

Fig. 2.4: Schița peretelui

$$\begin{cases} t = C_1 \cdot x + C_2 \\ t_1 = C_1 \cdot x_1 + C_2 \\ t_2 = C_1 \cdot x_2 + C_2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} t & x & 1 \\ t_1 & x_1 & 1 \\ t_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} t \cdot (x_1 - x_2) - x \cdot (t_1 - t_2) + t_1 \cdot x_2 - t_2 \cdot x_1 &= 0 \\ t \cdot (x_2 - x_1) &= t_1 \cdot x_2 - t_1 \cdot x_1 + t_1 \cdot x_1 - t_2 \cdot x_1 - x \cdot (t_1 - t_2) \\ t \cdot (x_2 - x_1) &= t_1 \cdot (x_2 - x_1) + x_1 \cdot (t_1 - t_2) - x \cdot (t_1 - t_2) \\ t \cdot (x_2 - x_1) &= t_1 \cdot (x_2 - x_1) - (t_1 - t_2) \cdot (x - x_1) \end{aligned}$$



$$t = t_1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot (t_1 - t_2) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

$$t = t_1 - \frac{x - x_1}{\delta} \cdot (t_1 - t_2) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Fig. 2.5: Distribuția temperaturii în pereții plan paralel

Caz particular: Originea sistemului se află pe fața din stânga a peretelui.

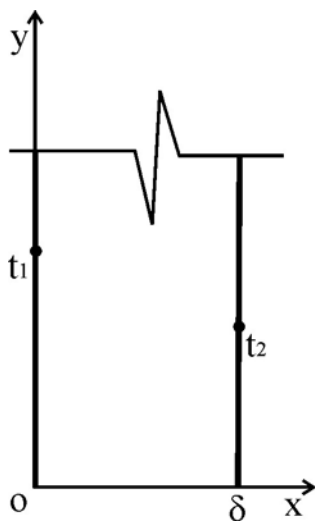


Fig. 2.6: Cazul particular

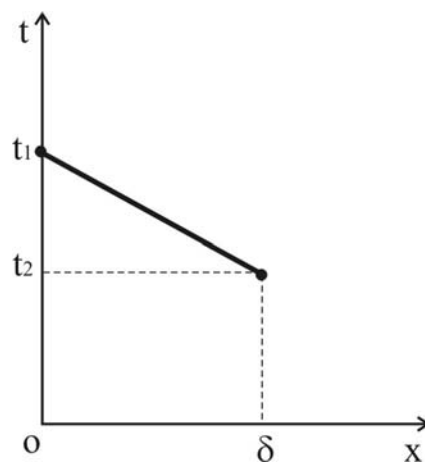


Fig. 2.7: Distribuția temperaturii

Rezultă că $x_1 = 0$ și $x_2 = \delta$ iar soluția particulară a câmpului de temperaturi devine:

$$t = t_1 - \frac{x}{\delta} \cdot (t_1 - t_2) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Fluxul termic unitar se determină din legea lui Fourier:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\lambda}{x_2 - x_1} \cdot (t_1 - t_2) = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W/m}^2]$$

Notă: Raportul dintre conductivitatea termică și grosimea peretelui poartă numele de **conductanță termică unitară**.

$$\frac{\lambda}{\delta} = \frac{\dot{q}}{t_1 - t_2} \quad [\text{W/m}^2 \cdot \text{K}]$$

Fluxul termic total care străbate peretele va fi:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = \frac{\lambda \cdot S}{\delta} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W}]$$

Notă Produsul dintre conductanța termică unitară și suprafața peretelui poartă numele de **conductanță termică totală**.

$$\frac{\lambda \cdot S}{\delta} = \frac{\dot{Q}}{t_1 - t_2} \quad [\text{W/K}]$$

Remarcă: Fluxurile termice, atât cel unitar cât și cel total, nu depind de coordonata x , ele rămânând constante în orice secțiune a peretelui.

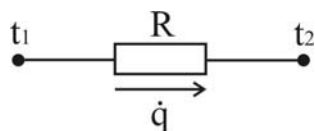


Fig. 2.8: Schema electrică analogă pentru fluxul unitar

$$\dot{q} = \frac{t_1 - t_2}{R} \quad [\text{W/m}^2]$$

unde R reprezintă rezistența termică conductivă unitară:

$$R = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{t_1 - t_2}{\dot{q}} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{K/W}]$$

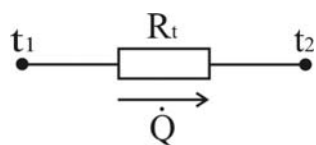


Fig. 2.9: Schema electrică analogă pentru fluxul total

$$\dot{Q} = \frac{t_1 - t_2}{R_t} \quad [\text{W}]$$

unde R_t reprezintă rezistența termică conductivă totală:

$$R_t = \frac{\delta}{\lambda \cdot S} = \frac{t_1 - t_2}{\dot{Q}} \quad [\text{K/W}]$$

Cazul peretelui la care se cunosc temperatura pe o față și fluxul termic unitar

(condiții la limită de speța întâi și a doua)

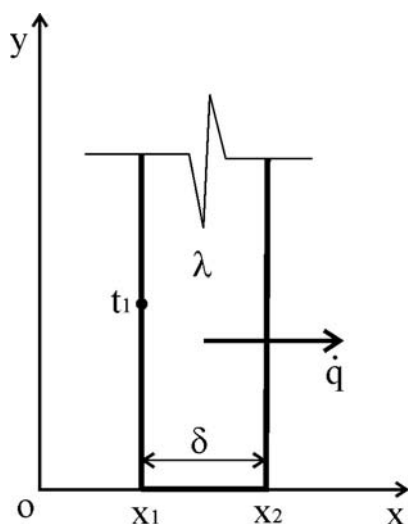


Fig. 2.10: Schița peretelui

Soluția generală a câmpului de temperaturi se determină prin integrarea ecuației lui Fourier:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} \quad \rightarrow \quad dt = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot dx$$

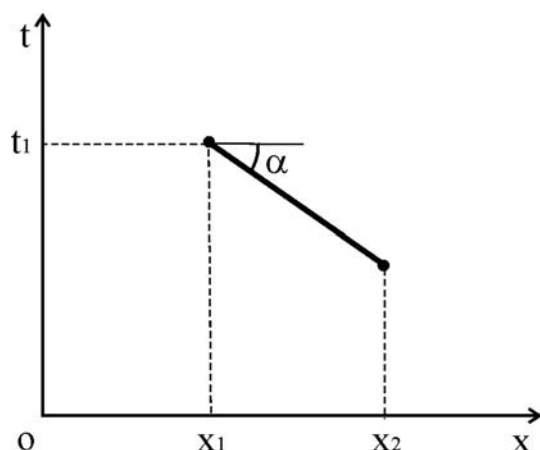
$$t = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot x + C \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Soluția particulară a câmpului de temperaturi rezultă din impunerea condiției la limită de speța întâi:

$$\text{la } x = x_I \rightarrow t = t_I$$

$$t|_{x=x_I} = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot x_I + C = t_I \quad \rightarrow \quad C = t_I + \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot x_I$$

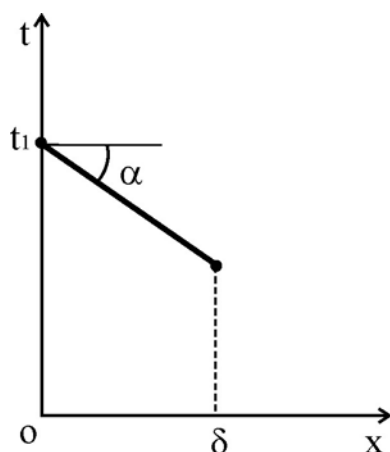
$$t = t_I - \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot (x - x_I) \quad [^{\circ}\text{C}]$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{q}}{\lambda} \quad [\text{K/m}]$$

Fig. 2.11: Distribuția temperaturii în perete

Pentru cazul particular în care originea sistemului se află pe fața din stânga a peretelui, rezultă că $x_1 = 0$ și $x_2 = \delta$, iar soluția particulară a câmpului de temperaturi devine:



$$t = t_1 - \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot x \quad [^{\circ}\text{C}]$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{q}}{\lambda} \quad [\text{K/m}]$$

Rezultă temperatura t_2 :

$$t_2 = t_1 - \frac{\dot{q}}{\lambda} \cdot \delta = t_1 - \delta \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Fig. 2.12: Distribuția temperaturii

Cazul peretelui având conductivitatea termică variabilă cu temperatura

În realitate, conductivitatea termică variază cu temperatura, $\lambda = \lambda(t)$, iar pentru majoritatea materialelor această variație poate fi considerată liniară:

$$\lambda = \lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \quad [\text{W/m} \cdot \text{K}]$$

Conform legii lui Fourier, fluxul termic unitar devine:

$$\dot{q} = -\lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \cdot \frac{dt}{dx} \quad [\text{W/m}^2]$$

Soluția generală a câmpului de temperaturi atunci când se cunoaște fluxul termic unitar rezultă din integrarea ecuației lui Fourier:

$$(1 + b \cdot t) \cdot dt = -\frac{\dot{q}}{\lambda_o} \cdot dx \quad \rightarrow \quad t + \frac{b}{2} \cdot t^2 = -\frac{\dot{q}}{\lambda_o} \cdot x + C$$

$$t^2 + \frac{2}{b} \cdot t + \frac{2 \cdot \dot{q}}{b \cdot \lambda_o} \cdot x - \frac{2 \cdot C}{b} = 0 \quad \rightarrow \quad t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2 \cdot \dot{q}}{b \cdot \lambda_o} \cdot x + \frac{2 \cdot C}{b}}$$

Soluția particulară a câmpului de temperaturi se determină din impunerea condiției la limită:

$$\text{la } x = x_I \rightarrow t = t_I$$

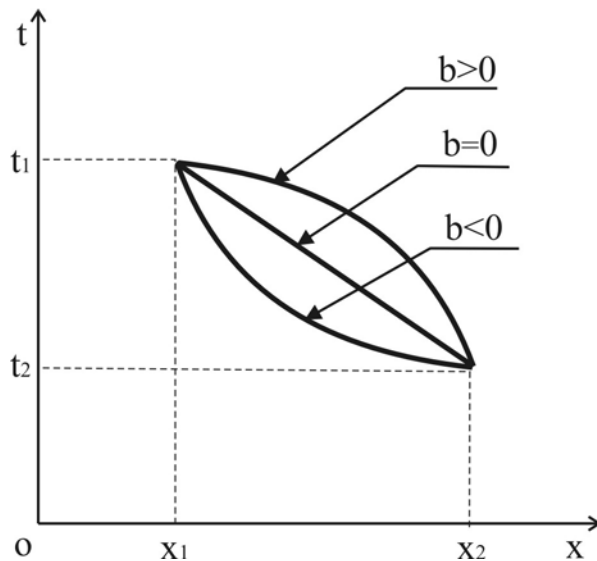
$$t|_{x=x_I} = -\frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2 \cdot \dot{q}}{b \cdot \lambda_o} \cdot x_I + \frac{2 \cdot C}{b}} = t_I$$

$$\left(t_I + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{2 \cdot \dot{q}}{b \cdot \lambda_o} \cdot x_I + \frac{2 \cdot C}{b}$$

$$C = \frac{b}{2} \cdot \left(t_I + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot b} + \frac{\dot{q}}{\lambda_o} \cdot x_I$$

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(t_I + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{2 \cdot \dot{q}}{b \cdot \lambda_o} \cdot (x - x_I)} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Remarcă: Temperatura variază după o funcție parabolică având concavitățile date de semnul coeficientului b .



Pentru $b > 0$, rezultă $\frac{d^2 t}{dx^2} < 0$,
și deci curba este convexă.

Pentru $b < 0$, rezultă $\frac{d^2 t}{dx^2} > 0$,
și deci curba este concavă.

Fig. 2.13: Distribuția temperaturii în perete

În cazul în care se cunosc temperaturile pe cele două fețe, fluxul termic unitar se determină prin integrarea ecuației lui Fourier între limitele peretelui:

$$\dot{q} = -\lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \cdot \frac{dt}{dx} \quad \rightarrow \quad \dot{q} \cdot dx = -\lambda_o \cdot (1 + b \cdot t) \cdot dt$$

$$\dot{q} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = -\lambda_o \cdot \int_{t_1}^{t_2} (1 + b \cdot t) \cdot dt$$

$$\dot{q} \cdot (x_2 - x_1) = \lambda_o \cdot (t_1 - t_2) + \frac{b \cdot \lambda_o}{2} \cdot (t_1^2 - t_2^2)$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_o}{x_2 - x_1} \cdot (t_1 - t_2) \cdot \left(1 + b \cdot \frac{t_1 + t_2}{2} \right)$$

Se notează cu t_m media aritmetică a temperaturilor pe cele două fețe:

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_o \cdot (1 + b \cdot t_m)}{x_2 - x_1} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W/m}^2]$$

Cazul peretelui având suprafețele scăldate de fluide (condiții la limită de speța a treia)

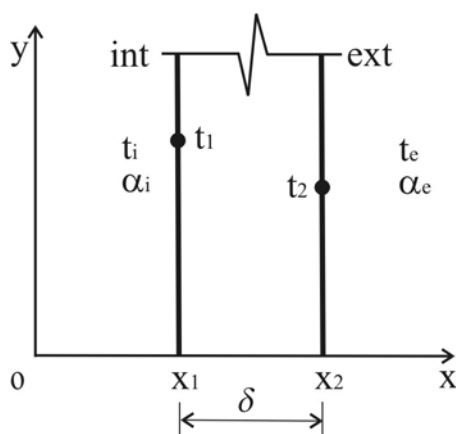
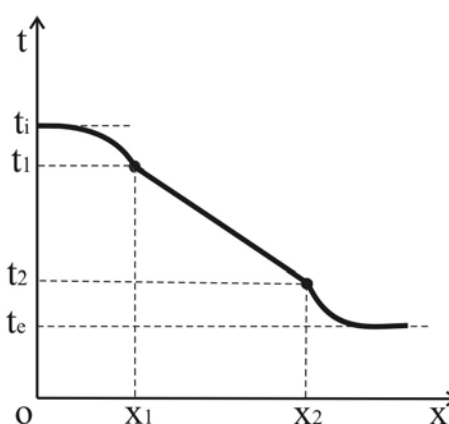


Fig. 2.14: Schița peretelui



2.15: Variația temperaturii

Se consideră temperatura interioară mai mare decât cea exterioară.

$$t_i > t_l > t_2 > t_e$$

Fluxul termic unitar se determină din legea de conservare:

$$\begin{cases} \dot{q} = \alpha_i \cdot (t_i - t_l) & \text{flux convectiv la interior} \\ \dot{q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_l - t_2) & \text{flux conductiv în perete} \\ \dot{q} = \alpha_e \cdot (t_2 - t_e) & \text{flux convectiv la exterior} \end{cases} \quad \begin{cases} t_i - t_l = \dot{q} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \\ t_l - t_2 = \dot{q} \cdot \frac{\delta}{\lambda} \\ t_2 - t_e = \dot{q} \cdot \frac{1}{\alpha_e} \end{cases}$$

$$t_i - t_e = \dot{q} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_e} \right)$$

$$\dot{q} = \frac{t_i - t_e}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_e}} \quad [\text{W/m}^2]$$

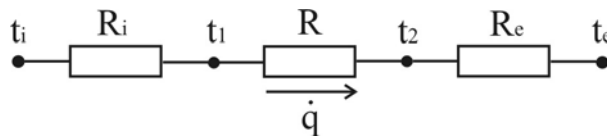


Fig. 2.16: Schema electrică analogă pentru fluxul unitar

$$\dot{q} = \frac{t_i - t_e}{R_i + R + R_e} = \frac{t_i - t_e}{R_{ech}} \quad [\text{W/m}^2]$$

unde:

$R_i = \frac{1}{\alpha_i}$ este rezistența termică convectivă unitară la interior în $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$,

$R = \frac{\delta}{\lambda}$ este rezistența termică conductivă unitară în $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$,

$R_e = \frac{1}{\alpha_e}$ este rezistența termică convectivă unitară la exterior în $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$ și

$R_{ech} = R_i + R + R_e$ este rezistența termică unitară echivalentă în $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$.

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = \frac{t_i - t_e}{\frac{l}{\alpha_i \cdot S} + \frac{\delta}{\lambda \cdot S} + \frac{l}{\alpha_e \cdot S}} \quad [\text{W}]$$

Fig. 2.17: Schema electrică analoagă pentru fluxul total

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_e}{R_{ti} + R_t + R_{te}} = \frac{t_i - t_e}{R_{tech}}$$

unde:

$R_{ti} = \frac{l}{\alpha_i \cdot S}$ este rezistența termică convectivă totală la interior în K/W,

$R_t = \frac{\delta}{\lambda \cdot S}$ este rezistența termică conductivă totală în K/W,

$R_{te} = \frac{l}{\alpha_e \cdot S}$ este rezistența termică convectivă totală la exterior în K/W și

$R_{tech} = R_{ti} + R_t + R_{te}$ este rezistența termică totală echivalentă în K/W.

Cazul peretelui multistrat având suprafețele scăldate de fluide (condiții la limită de speța a treia și a patra)

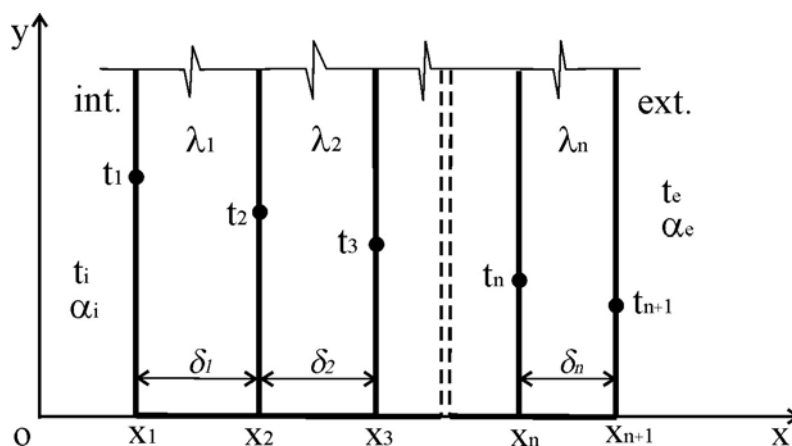


Fig. 2.18: Schema peretelui multistrat

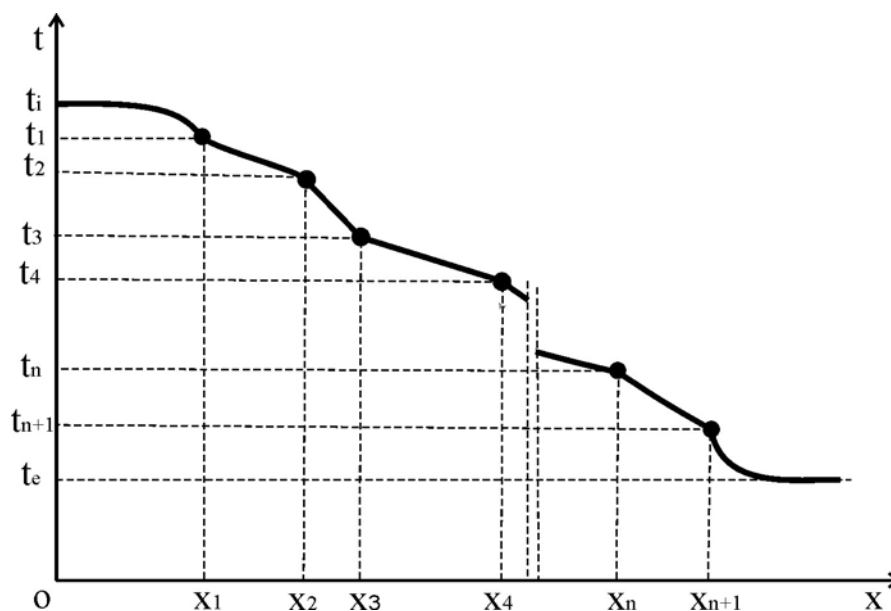


Fig. 2.19: Variația temperaturii

Fluxul termic unitar se determină din legea de conservare:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{q} = \alpha_i \cdot (t_i - t_1) & \text{flux convectiv la interior} \\ \dot{q} = \frac{\lambda_1}{\delta_1} \cdot (t_1 - t_2) & \text{flux conductiv în stratul 1} \\ \dot{q} = \frac{\lambda_2}{\delta_2} \cdot (t_2 - t_3) & \text{flux conductiv în stratul 2} \\ \text{-----} & \\ \dot{q} = \frac{\lambda_n}{\delta_n} \cdot (t_n - t_{n+1}) & \text{flux conductiv în stratul n} \\ \dot{q} = \alpha_e \cdot (t_{n+1} - t_e) & \text{flux convectiv la exterior} \end{array} \right.$$

$$\dot{q} = \frac{t_i - t_1}{\frac{1}{\alpha_i}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1}} = \frac{t_2 - t_3}{\frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \dots = \frac{t_n - t_{n+1}}{\frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{n+1} - t_e}{\frac{1}{\alpha_e}}$$

$$\dot{q} = \frac{t_i - t_e}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_e}} = \frac{t_i - t_e}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{\lambda_j} + \frac{1}{\alpha_e}} \quad [\text{W/m}^2]$$

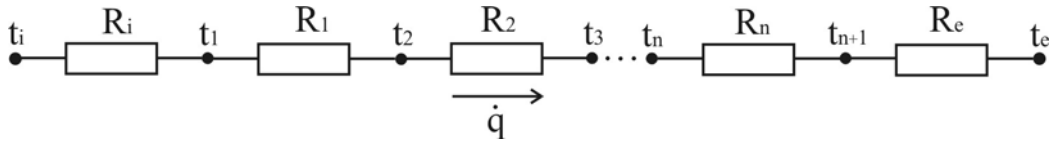


Fig. 2.20: Schema electrică analoagă pentru fluxul unitar

$$\dot{q} = \frac{t_i - t_e}{R_i + R_1 + R_2 + \dots + R_n + R_e} = \frac{t_i - t_e}{R_{ech}} \quad [\text{W/m}^2]$$

unde:

$R_i = \frac{l}{\alpha_i}$ este rezistența termică convectivă unitară la interior în $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$,

$R_j = \frac{\delta_j}{\lambda_j}$ este rezistența termică conductivă unitară a stratului "j" în $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$,

$R_e = \frac{l}{\alpha_e}$ este rezistența termică convectivă unitară la exterior în $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$ și

$R_{ech} = R_i + \sum_{j=1}^n R_j + R_e$ este rezistența termică unitară echivalentă în $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$.

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = \frac{t_i - t_e}{\frac{l}{\alpha_i \cdot S} + \frac{\delta_1}{\lambda_1 \cdot S} + \frac{\delta_2}{\lambda_2 \cdot S} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n \cdot S} + \frac{l}{\alpha_e \cdot S}}$$

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_e}{\frac{l}{\alpha_i \cdot S} + \frac{l}{S} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{\lambda_j} + \frac{l}{\alpha_e \cdot S}}$$

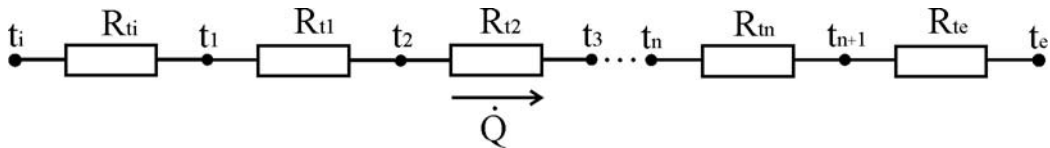


Fig. 2.21: Schema electrică analoagă pentru fluxul total

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = \frac{t_i - t_e}{R_{ti} + R_{tl} + R_{tl2} + \dots + R_{tn} + R_{te}} = \frac{t_i - t_e}{R_{tech}} \quad [\text{W}]$$

unde:

$R_{ti} = \frac{l}{\alpha_i \cdot S}$ este rezistenţa termică convectivă totală la interior în K/W,

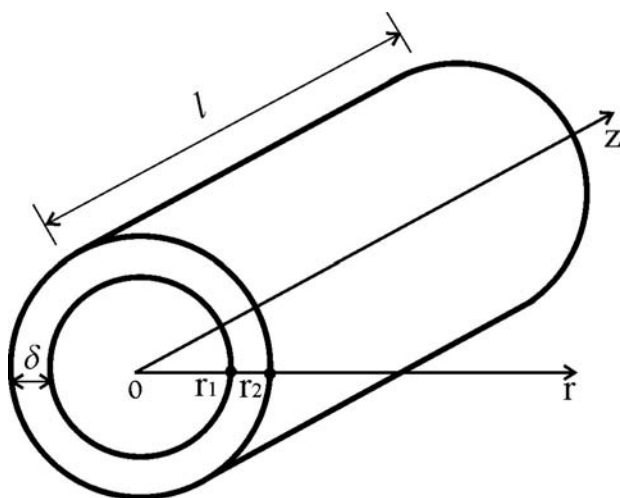
$R_{tj} = \frac{\delta_j}{\lambda_j \cdot S}$ este rezistenţa termică conductivă totală a stratului "j" în K/W,

$R_{te} = \frac{l}{\alpha_e \cdot S}$ este rezistenţa termică convectivă totală la exterior în K/W şi

$R_{tech} = R_{ti} + \sum_{j=1}^n R_{tj} + R_{te}$ este rezistenţa termică totală echivalentă în K/W.

2.2.1.1.1.2. Conducţia prin pereţi cilindrici coaxiali

Se consideră un perete cilindric de grosime constantă (suprafeţele peretelui sunt coaxiale), realizat dintr-un material omogen şi izotrop cu conductivitatea termică constantă. Raza suprafeţei exterioare a peretelui, r_2 , se consideră mult mai mică decât lungimea (înălţimea) lui, l , astfel încât suprafeţele izoterme sunt suprafeţe cilindrice coaxiale şi paralele cu feţele peretelui iar fluxul termic se propagă pe direcţia razei, perpendicular pe suprafeţele izoterme.



Ipoteze: $\lambda \neq \lambda(t)$

$$r_2 \ll l$$

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dn} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr}$$

Fig. 2.22: Peretele cilindric coaxial

Ecuatia diferenţială a conducţiei prin perete are forma:

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dt}{dr} \right) = 0$$