

Capitolul 2

CONDUCTIA CĂLDURII

2.1. Generalități

În cadrul transferului de căldură prin conducție se urmărește determinarea câmpului de temperaturi (a modului de variație a temperaturii) și a fluxului termic transferat în interiorul corpului studiat.

Distribuția temperaturii poate fi determinată din legea de conservare a energiei (căldurii) pe baza Principiului I al termodinamicii, care precizează că fluxul termic generat în interiorul unui sistem (corp) servește la variația în timp a energiei interne a sistemului și a căldurii cedate prin graniță către mediul înconjurător.

$$\dot{Q}_{gen} = \frac{dU}{d\tau} + \frac{\delta Q}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau} + \dot{Q} \quad [\text{W}]$$

unde \dot{Q}_{gen} reprezintă fluxul termic generat în interiorul corpului în W, U energia internă totală în J, τ timpul în s și \dot{Q} fluxul termic ce străbate granița sistemului (corpului) în W.

Se definește fluxul izvoarelor interioare de căldură și se notează cu \dot{q}_v , densitatea volumică a fluxului termic generat în interiorul corpului:

$$\dot{q}_v = \frac{\delta \dot{Q}_{gen}}{dV} \quad [\text{W/m}^3]$$

Fluxul izvoarelor interioare de căldură poate avea valori pozitive sau negative.

Fluxul termic unitar conductiv într-un punct din interiorul corpului rezultă din legea lui Fourier și este direct proporțional cu gradientul local de temperatură.

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad } t \quad [\text{W/m}^2]$$

2.1.1. Ecuatia generală a conductiei căldurii

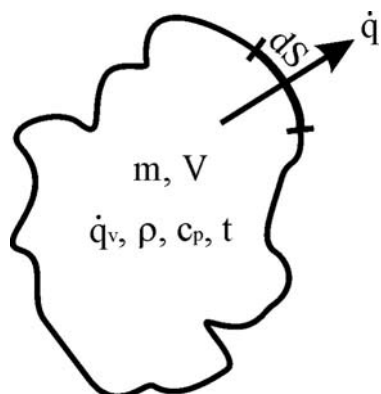


Fig. 2.1: Corp oarecare

Se consideră un corp omogen și izotrop având surse (izvoare) interioare de căldură și care schimbă căldură cu mediul înconjurător.

$$\dot{Q}_{gen} = \int_V \dot{q}_v \cdot dV$$

$$\frac{dU}{d\tau} = \int_V \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot dV$$

$$\dot{Q} = \int_S \dot{q} \cdot dS$$

$$\int_V \dot{q}_v \cdot dV = \int_V \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot dV + \int_S \dot{q} \cdot dS$$

Se aplică teorema lui Gauss-Ostrogradski ($\int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_V \text{div} \vec{\varphi} \cdot dV$), pentru cazul particular în care fluxul termic străbate granița sistemului pe direcția normalei la suprafață:

$$\int_S \dot{q} \cdot dS = \int_V \text{div} \vec{q} \cdot dV \quad \rightarrow \quad \dot{q}_v = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} + \text{div} \vec{q}$$

Substituind fluxul termic unitar din legea lui Fourier, rezultă:

$$\dot{q}_v = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} - \text{div}(\lambda \cdot \text{grad } t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\text{div}(\lambda \cdot \text{grad } t) + \dot{q}_v}{\rho \cdot c_p}$$

În cazul în care conductivitatea termică este constantă ($\lambda = \text{const.}$), obținem:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \text{div}(\text{grad } t) + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c_p} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c_p}$$

unde a este difuzivitatea termică în m^2/s și ∇^2 este operatorul Laplace.

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad \text{și} \quad \nabla^2 t = \text{div}(\text{grad } t)$$

2.1.2. Cazuri particulare ale ecuației conductiei

1) **Ecuția lui Fourier:** $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t$

(conducția fără izvoare interioare de căldură, $\dot{q}_v = 0$)

2) **Ecuția lui Poisson:** $\nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0$

(conducția în regim staționar, $\partial t / \partial \tau = 0$)

3) **Ecuția lui Laplace:** $\nabla^2 t = 0$

(conducția fără izvoare interioare de căldură, $\dot{q}_v = 0$
și în regim staționar, $\partial t / \partial \tau = 0$)

În funcție de numărul și tipul sistemului de coordonate, Laplace-ianul temperaturii are următoarele expresii:

a) după cele trei direcții carteziene: $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

b) numai după direcția razei cilindrice: $\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dt}{dr} \right) = \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr}$

c) numai după direcția razei sferice: $\nabla^2 t = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2} (r \cdot t) = \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dt}{dr}$

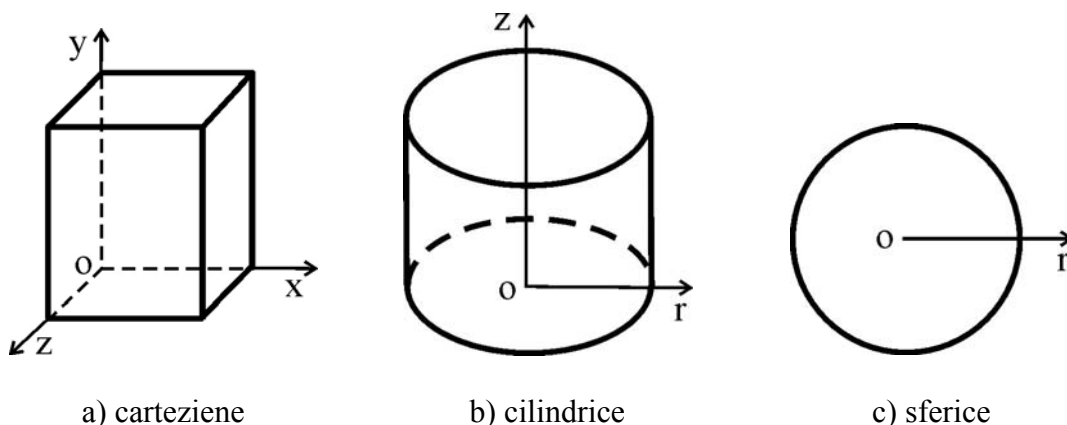


Fig. 2.2: Sisteme de coordonate spațiale

2.1.3. Condiții de unicitate

Prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale conducției se obțin soluțiile generale care pot fi particularizate prin impunerea condițiilor de unicitate.

Condiții inițiale: La momentul inițial $\tau = 0$, se cunoaște valoarea inițială a temperaturii t_{ini} :

$$\text{la } \tau = 0 \rightarrow t = t(\vec{r}, \tau) = t|_{\tau=0} = t_{ini}$$

Condiții la limită (de graniță sau de frontieră): La granița sau la frontiera sistemului (la limita corpului), în funcție de speța condiției, se cunosc:

1) Temperatura t_p , (condiții la limită de speța I - de tip Dirichlet).

$$\text{la } \vec{r} = \vec{r}_p \rightarrow t = t(\vec{r}, \tau) = t|_{\vec{r}=\vec{r}_p} = t_p$$

2) Fluxul termic unitar \dot{q}_p sau gradientul de temperatură $\partial t / \partial n$ (condiții la limită de speța a II-a - de tip Neumann).

$$\text{la } \vec{r} = \vec{r}_p \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(\vec{r}, \tau) = \dot{q}|_{\vec{r}=\vec{r}_p} = \dot{q}_p = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_p}$$

3) În cazul contactului direct între corp și un fluid, fluxul termic unitar se exprimă în funcție de coeficientul de convecție α și de temperaturile graniței t_p și ale fluidului t_f (condiții la limită de speța a III-a).

$$\text{la } \vec{r} = \vec{r}_p \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(\vec{r}, \tau) = \dot{q}|_{\vec{r}=\vec{r}_p} = \alpha \cdot (t_p - t_f)$$

4) În cazul contactului direct dintre două corpuri, temperatura și fluxul termic sunt funcții continue (condiții la limită de speța a IV-a).

$$\text{la } \vec{r} = \vec{r}_p \rightarrow t'_p = t''_p \quad \text{și} \quad \dot{q}'_p = \dot{q}''_p$$

Condiții de simetrie: Într-un element de simetrie (plan, axă sau punct) fluxul termic și gradientul de temperatură sunt zero iar temperatura are o valoare extremă (minimă sau maximă):

$$\text{la } \vec{r} = \vec{r}_o \rightarrow \dot{q}|_{\vec{r}=\vec{r}_o} = \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_o} = 0$$