Razones trigonométricas

Contenidos

Autor

- Prof. Liliana Dorín

Supervisor

- Lic. Mara Carneiro

1- Expresar en la unidad indicada los siguientes ángulos:

a) $120° = \ldots^{G}$

b) $38^{G} = \ldots°\ '\ ''$

c) $60°\ 10' = \ldots^{G}$

d) $15^{G}\ 24^{\text{min}} = \ldots°\ '\ ''$

e) $18°\ 24' = \ldots^{G}$

f) $10^{G}\ 13^{\text{min}} = \ldots°\ '\ ''$

g) $17^{G} = \ldots$ rad

h) $20^{G}\ 12^{M} = \ldots$ rad

i) $47^{G} = \ldots$ rad

2- Expresar en radianes los siguientes ángulos:

a) 90°

b) 180°

c) 45°

d) 270°

e) 720°

f) 225°

g) 360°

h) 30°

i) 60°

3- Expresar en grados sexagesimales los siguientes ángulos:

a) $\frac{p}{4}\,rad$

b) $\frac{p}{6}\,rad$

c) $\frac{3}{2}p\ rad$

d) $\frac{7}{6}p\ rad$

e) $\frac{4}{3}p\ rad$

4- Responder:

a) ¿Qué ángulo describe el minutero de un reloj en 30 minutos? ¿Y en 2 horas 15 minutos?

b) ¿Cuál es la amplitud del ángulo que forman las manecillas del reloj a las 9 horas y 45 minutos? ¿Y a las 10 horas y 20 minutos?

c) ¿Cuánto vale, expresado en radianes, cada uno de los ángulos interiores de un hexágono regular?

5- Completar usando los signos de mayor y menor (> y <) según el ejemplo:

	1^{er} cuadrante	2^{do} cuadrante	3^{er} cuadrante	4^{to}cuadrante
α (en grados)	$0° \leq \alpha < 90°$			
α (en radianes)				

6- Indicar con una X el cuadrante al que corresponde $\hat{a}$

Nota De aquí en adelante prescindiré de la palabra radianes en la expresión de un ángulo.

$\hat{a}$	1^{er} cuadrante	2^{do} cuadrante	3^{er} cuadrante	4^{to}cuadrante
65°				
210°				
$\frac{3}{2}p$				
-34°				
-125°				
$\frac{7}{4}p$				
$-\frac{9}{4}p$				

7- Hallar usando la calculadora:

a) sen 63° 30’	**e)** sen $\frac{p}{3}$ rad	**i)** tg $\frac{p}{4}$ rad
b) cos 104°	**f)** cosec 62° 28’	**j)** cos $\frac{2}{3}p$ rad
c) sec 76°	**g)** ctg 34° 10’	**k)** sec $\frac{p}{6}$ rad
d) tg 36° 20’	**h)** cosec $\frac{5}{6}p$ rad	**l)** ctg $\frac{3}{2}p$ rad

8- Vincular con flechas

Aclaración

Algunas respuestas son valores aproximados.

Aclaración

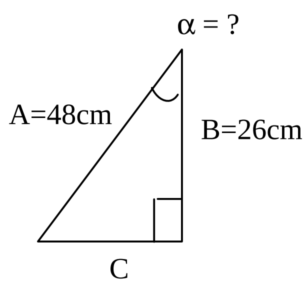
	● *Respuestas*
a) sen α = 0,601815	α = 45°
b) cos α = -0,069756	α = 48°
c) tg α = -1	α = 94°
d) sec α = 1,1802523	α = 62° 24’
e) cosec α = 1,1284089	α = 37°
f) ctg α = 0,900404	α = 32° 05’

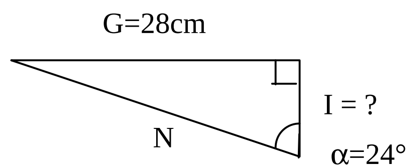
9- Señalar en distintos sistemas de ejes cartesianos los puntos siguientes y calcular en cada caso, el ángulo que forma su vector asociado con el eje de abscisas.

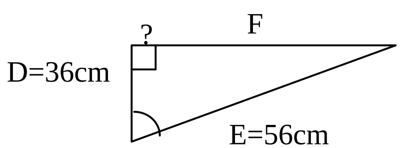
$P = (3 ; 5)$ $\qquad R = (7 ; -3)$ $\qquad T = (-\frac{1}{2} ; \frac{5}{3})$

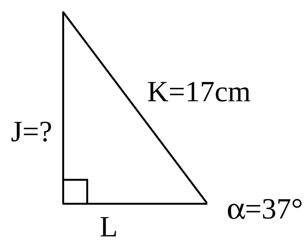
$Q = (-2 ; 4)$ $\qquad S = (-0{,}75 ; -5)$ $\qquad U = (\frac{7}{2} ; -6)$

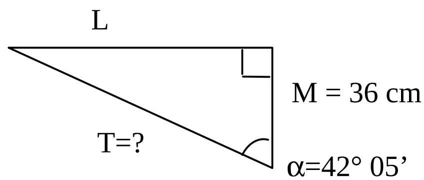
10- Utilizando las razones trigonométricas convenientes averiguar las incógnitas indicadas en cada triángulo.





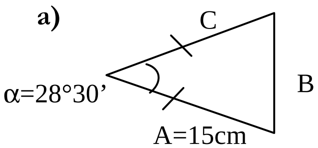




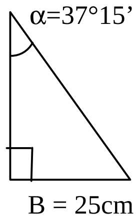


11- Hallar el perímetro y la superficie de las siguientes figuras:

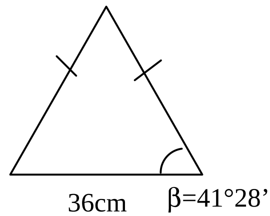
a)



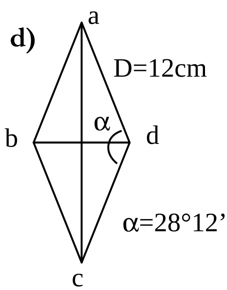
b)



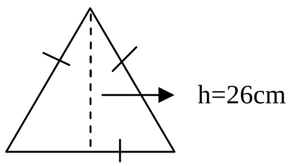
c)



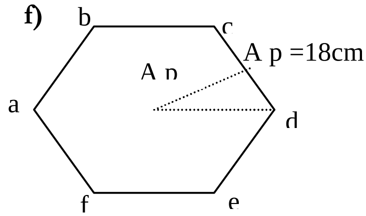
d)



e)



f)



Abcdef es
un hexágono

12- Problemas:

a) Calcular los 3 ángulos agudos de un triángulo isósceles, sabiendo que cada uno de los lados iguales mide el triple que la mitad de la base.

● *Respuesta* $\alpha = \beta = 70° 31' 43''$

b) En un cono del cual se sabe que la altura vale 10cm y el radio de la base 6cm; se quiere saber:

b₁) el valor de la generatriz.

● *Respuesta* 11,66 centímetros

b₂) el ángulo formado por la generatriz y el radio de la base.

● *Respuesta* $\alpha = 59° 2' 10''$

b$_3$) el ángulo formado por la generatriz y el segmento correspondiente a la altura del cono.

● *Respuesta* $\beta = 30° 57' 49''$

c) Un octógono regular está inscripto en un círculo cuyo radio es de 10cm. Calcular el perímetro del octógono.

● *Respuesta* 61,23 centímetros

d) Desde un balcón del segundo piso de un edificio se ve un objeto en el suelo, ubicado a 5 m de la pared, bajo un ángulo de depresión de 48° . Desde otro balcón del cuarto piso se ve el mismo objeto, bajo un ángulo de depresión de 63°21´

d$_1$) ¿Cuál es la distancia existente entre los balcones de 2 pisos consecutivos?

● *Respuesta* 2,77 metros

d$_2$) ¿A cuántos metros ve el objeto un observador situado en el cuarto piso?

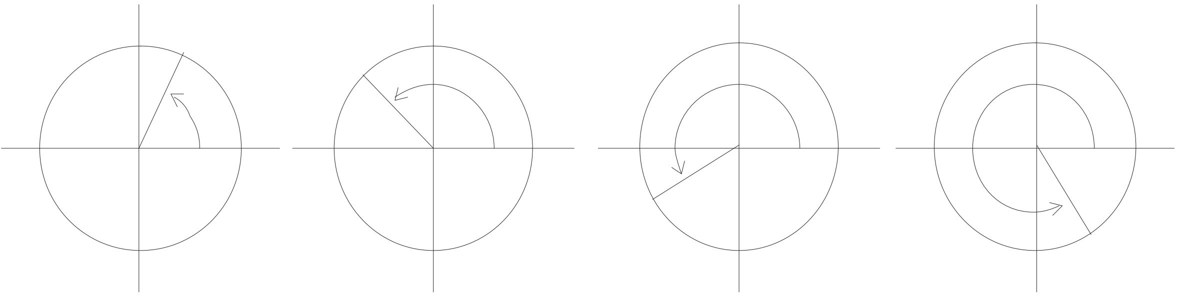
● *Respuesta* 11,11 metros

e) Una caja de forma prismática de base rectangular tiene 14cm de largo, 16cm de ancho y 8cm de altura. Se quiere saber cuál es el ángulo formado por la diagonal de la caja y la diagonal de la base (ambas partes del mismo vértice).

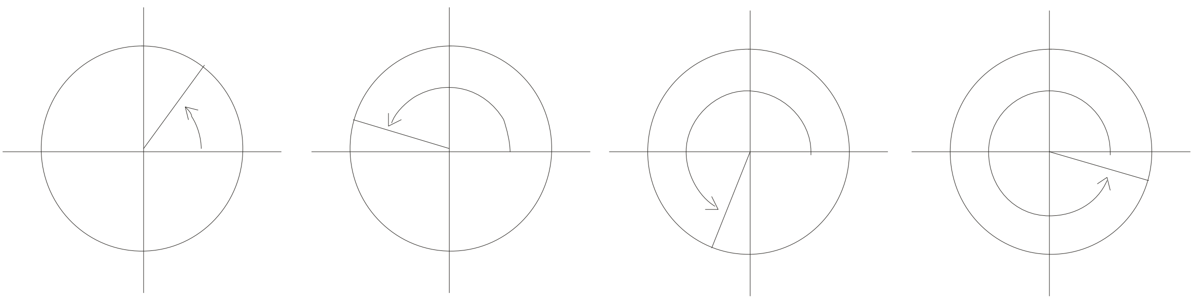
● *Respuesta* $\alpha = 20° 37' 14''$

13-

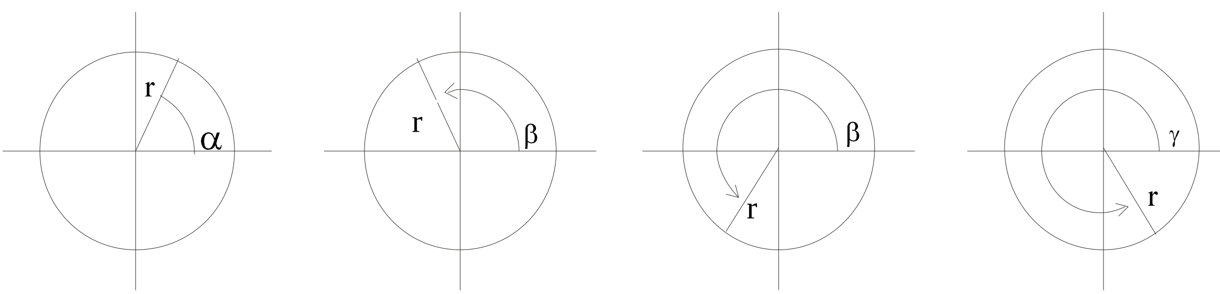
a) **Representar con distinto color el sen** a **y el cos** a **en cada caso: (en la circunferencia trigonométrica).**



b) **Señalar con color la tg** a **en cada caso dentro de la circunferencia trigonométrica**



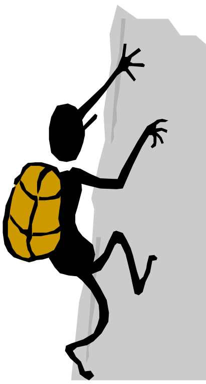
14- Teniendo en cuenta que r siempre es un número positivo, completar con el signo correspondiente en cada situación.



sen α	sen β	sen β............	sen γ
cos α	cos β	cos β............	cos γ
tg α	tg β	tg β..............	tg γ

15- A partir de lo averiguado en el ejercicio 14, extraer conclusiones y completar el siguiente cuadro con color.

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS 4 CUADRANTES



1^er C	**2^do C**
sen α.......	sen α ......
cos α.......	cos α ......
tg α.........	tg α.........
3^er C	**4^to C**
sen α.......	sen α ......
cos α	cos α ......
tg α.........	tg α.........

16- Aplicando el cuadro anterior, dibujar esquemas posibles de los ángulos pedidos. (Tener en cuenta que corresponden solamente a ángulos menores que un giro).

a) $\alpha/\text{sen}\ \alpha > 0 \wedge \text{tg}\ \alpha > 0$

b) β tiene el cos negativo y el sen positivo.

c) γ tiene la tg negativa y el cos positivo.

d) $\varepsilon/\text{sen}\ \varepsilon > 0 \wedge \cos \varepsilon < 0$

e) ϖ tiene el cos negativo y la tg negativa.

f) $\alpha/\text{tg}\ \alpha < 0 \wedge \cos \alpha > 0$

17- Hallar mentalmente e indicar el signo de los siguientes ángulos:

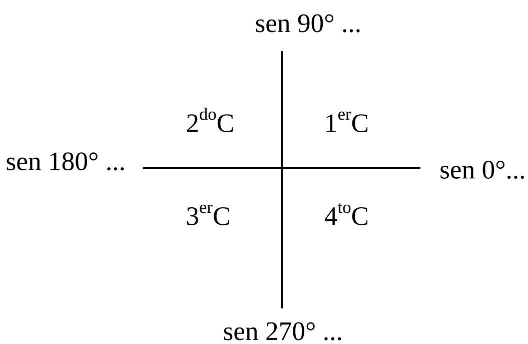
a) sen 108° **e)** sec (-57°) **i)** ctg (-92°)

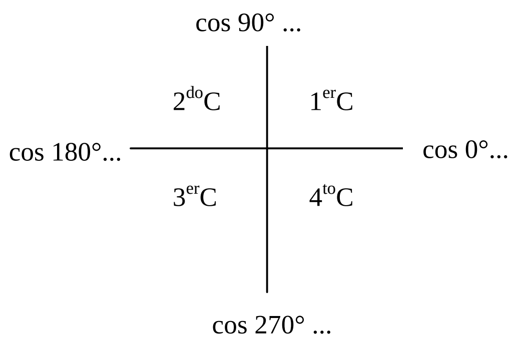
b) sen (-40°) **f)** tg 192° **j)** sec 46°

c) cos 200° **g)** cosec 280° 15’ **k)** cos (-118°)

d) sec 17° **h)** tg 146° 28’ **l)** cos 94° 13’

18- Completar con los valores correspondientes:





19- Aplicar la Relación Pitagórica y la relación entre el sen, el cos y la tg de a para encontrar los valores de las restantes razones trígono-métricas en cada uno de los siguientes casos:

a) $\text{sen}\,\alpha = 0{,}98 \wedge \alpha \in 2^{do}\,C$ **e)** $\text{sen}\,\alpha = -0{,}7 \wedge \alpha \in 4^{to}\,C$

b) $\cos\alpha = -0{,}8 \wedge \text{tg}\,\alpha > 0$ **f)** $\text{cosec}\,\alpha = -2{,}17 \wedge \cos\alpha < 0$

c) $\cos\alpha = -\frac{2}{5} \wedge \alpha \in 2^{do}\,C$ **g)** $\sec\alpha = -4{,}3 \wedge \alpha \in 2^{do}\,C$

d) $\sec\alpha = -\frac{4}{3} \wedge \text{sen}\,\alpha < 0$ **h)** $\cos\alpha = \frac{1}{4} \wedge \text{sen}\,\alpha < 0$

20- Verificar las identidades siguientes:

a) $\cos \alpha - \text{ctg}\, \alpha \,.\, \text{sen}\, \alpha = 0$

b) $\text{sen}\, \alpha \,.\, \sec \alpha \,.\, \text{ctg}\, \alpha = 1$

c) $\text{ctg}\, \alpha\, (-3\text{tg}\, \alpha) = -3$

d) $-4\, (\sec \alpha)^{-1}\, .\, \text{tg}\, \alpha = -4\, \text{sen}\, \alpha$

e) $\text{tg}\, \alpha + \text{ctg}\, \alpha = \dfrac{1}{sen\, a\ .\cos a}$

f) $\dfrac{sen\ \text{x} + \text{tg x}}{1 + \cos \text{x}} = \text{tg x}$

g) $1 + \text{ctg}^2\, \alpha = \text{cosec}^2\, \alpha$

h) $\dfrac{sen\ \text{x}}{1 - \cos \text{x}} = \dfrac{1 + \cos \text{x}}{\text{sen x}}$

21- Calcular usando las relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo y completar:

	0	$\frac{p}{6} = 30°$	$\frac{p}{4} = 45°$	$\frac{p}{3} = 60°$	$\frac{p}{2} = 90°$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos					
tg					

22- Utilizando exclusivamente las tablas anteriores, calcular:

● *Respuestas*

a) $\text{sen } 30° + \frac{1}{2}\cos 0° \,.\, (-\text{tg } 45°)$ — 0

b) $\frac{\cos 60°}{-\text{tg } 30°} - 4\text{tg } 60° + (\cos 90° - \text{sen } 0°)$ — $-\frac{9}{2}.\sqrt{3}$

c) $\text{sen}^2\, 45° - (3\text{tg } 30° + 2\text{sen } 45°)^2 + \cos 45° \,.\, \text{tg } 60° \,.\, 4$ — $-\frac{9}{2}$

d) $\frac{1}{3}\,(-\text{sen } 90° + 2\cos 180°) + (\cos 45° - \text{sen } 270°)^2$ — $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

e) $\frac{\cos^2 30° + \cos^2 60° - \text{ctg}^2\, 45°}{2 sen\, 45° \,.\, \cos 45°}$ — 0

f) $(\text{tg } 360° + 2\cos 360°)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{-sen 45°}{\cos 180°} - \text{sen } 270°\right)^2$ — $-\frac{3}{2}$

23₁- Hallar el valor de la cotangente, secante y cosecante de a, sabiendo que 0 £ a £ 2p (sin usar calculadora). Justificar.

a) $\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\wedge\; \alpha \in 3^{er}\text{ C}$

b) $\text{tg } \alpha = 0 \;\wedge\; \alpha \in 2^{do}\text{ C}$

c) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \;\wedge\; \alpha \in 2^{do}\text{ C}$

d) $\cos \alpha = 0 \;\wedge\; \alpha \in 2^{do}\text{ C}$

23₂- Encontrar el valor de a , en cada caso del ítem anterior sin usar la calculadora. Justificar.

24- Hallar x, si es posible, sabiendo que :

Nota Recordar las 2 identidades más usuales.

● *Respuestas*

a) sen α = $\frac{x+1}{5}$ y $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{3x-\frac{1}{2}}$ — $x = \frac{1}{4}$

b) cos α = 3 –2x y sen α = 6x + 2 — Sol = { }

c) tg α = $\sqrt{6}$; sen α = 4 – 2x ; cos α = $\sqrt{\frac{49}{6}}$ — $x = -\frac{3}{2}$

d) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}x + 1$ y $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — Sol = { }

e) tg α = $\sqrt{2} - 4x$ y $\sec a = 3\sqrt{2} + 4x$ — $x = -\frac{15}{64}.\sqrt{2}$

25- Hallar x siendo 0° £ x < 180°

● *Respuestas*

a) tg (2x + 25°) = -1 — $x \in \{55°; 145°\}$

b) sen $(\frac{1}{2}x - 5°) = tg\,45°$ — Sol = { }

c) sen (2x – 16°) = cos 90° — $x \in \{\ 8°\ ;\ 98°\ \}$

d) 4 cos 3x = $-2\sqrt{2}$ — $x \in \{\ 45°\ \}$

e) tg (x + 50°) = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ — x = 160°

f) ctg (2π - x) = -tg $(\frac{p}{2} + x)$ — Sol = { }

26- Obtener con la calculadora las 6 razones trigonométricas de:

a) $\alpha = 60°$ y $\beta = 30°$

b) $\gamma = 78°$ y $\alpha = 12°$

c) $\varepsilon = 36°$ y $\beta = 54°$

d) $\alpha = 48°$ y $\beta = 42°$

27- Comparar los valores obtenidos en cada ítem del ejercicio anterior. Extraer conclusiones.

Completar con color:

Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera del primer cuadrante son iguales a ……………………........

Simbólicamente (en grados sexagesimales)	**(En radianes)**
sen α = ...	sen α = ...
cos α = ...	cos α = ...
tg α = ...	tg α = ...
ctg α = ...	ctg α = ...
sec α = ...	sec α = ...
cosec α =......	cosec α = ..

28- Completar aplicando las relaciones existentes entre dos ángulos complementarios.

a) sen 70° = ...

b) cos 38° =.........

c) tg 63° 20’ = ...

d) ctg 19° 05’ = ...

e) sec 66° 20’ = ...

f) cos 46° = ...

g) sen 36° =.....

h) tg 75° = ...

i) ctg 83° = ...

29- Calcular el ángulo x sabiendo que es agudo.

Nota: Recordar las relaciones existentes entre 2 ángulos complementarios.

		Respuestas
a)	cos 3x = sen 38°	17° 20’
b)	cos 53° = sen $(\frac{1}{2}x - 5°)$	84°
c)	sec (40° + 4x) = cosec (2x –10°)	10°
d)	tg $(45° + \frac{1}{3}x)$ = ctg 18°	81°
e)	sen (2x + 1°) = tg 46° 30’	17° 07’ 55”
f)	tg (x + 28°) = cos 35°	11° 19’ 21”
g)	cosec (x – 42°) = sec 2x	44°
h)	sen $\left[2(x - \frac{3}{4})\right]$ = tg 40° 28’	30° 01’ 25”

30- Probar las identidades siguientes: (Aclarar si es necesario el conjunto de existencia).

a) cosec $(\frac{p}{2} - a)$ (-cosec α) = - (ctg α + tg α)

b) cosec α - sen α = $\cos^2$ α (sen α)$^{-1}$

c) (1 – tg α) (1 + tg α) = 2 – $\sec^2$ α

d) $\cos^2 (\frac{p}{2} - a)$ - sen^2 α . $\cos^2$ α = sen^4 α

e) $\text{cosec}^2\ \alpha - 1 = \dfrac{\cos ec^2 a}{\cos ec^2 (\frac{p}{2} - a)}$

f) $\dfrac{1 + tg a}{ctg a + 1} = ctg(\frac{p}{2} - a)$

g) $\dfrac{1}{1 + \text{ctg}^2 (\frac{p}{2} - a)} = \cos^2 \alpha$

h) $\dfrac{1 + tg^2 a}{2tg a} = \dfrac{\sec a \,.\, \sec(\frac{p}{2} - a)}{2}$

31- Expresar las razones trigonométricas siguientes en función del ángulo a, perteneciente al primer cuadrante.

a) sen (180° + α)

b) cos (90° + α)

c) tg (- α)

d) ctg (180° - α)

e) sen (180° - α)

f) sen (360° - α)

g) tg $(\frac{p}{2} - a)$

h) ctg (2π - α)

i) sec (90° + α)

j) ctg (- α)

k) ctg (90° - α)

l) sec $(\frac{p}{2} + a)$

32- Calcular y dejar expresado en función de a exclusivamente.

	Respuestas
a) cos (180° - α) + sen (90° - α)	0
b) 2 sen (90° + α) – tg (180° + α) – tg(-α)	2 cos α

c) sen $(\frac{p}{2} - a)$ + 3 cos (2π + α) — -2 cos α

d) $[-\cos(p-a) - \cos(2p-a)].3$ — -6 cos α

e) 3 sen (360° + α) + $\cos(\frac{p}{2}+a) + \frac{1}{2}sen(p-a)$ — $\frac{5}{2}sen a$

f) $\frac{tg(p+a)}{tg(-a)} + \frac{\cos(p-a)}{sen(p+a)}$ — -1 -ctg α

g) $\frac{-sen(-a)+3\cos(\frac{p}{2}+a)}{sen(\frac{p}{2}+a)-\cos(p-a)}$ — -tg α

33- Escribir V o F. Justificar.

a) sen^2 x + cos^2 (-x) = 1

b) cos (π - x) + cos x =0

c) tg (π - x) . ctg (π - x) = - 1

d) ∃ x /cos x = 3

e) ∀ x , sen x = -sen (-x)

f) sen^2 (-x) + cos^2 (-x) = -1

g) ∃ x /sen x = $-\frac{5}{4}$

h) ∃ x /cos x = 0,8

34- Hallar el valor del ángulo x, siendo 0 £ x £ 360°.

● *Respuestas*

a) 3 sen x –3 = 0 — x = 90°

b) sen x = -cos x — x ∈ { 135° ; 315° }

c) 1 – cos^2 x = $\frac{1}{4}$ — x ∈ { 30° ; 150° ; 210° ; 330° }

d) tg (2x + 10°) = 1 — x ∈ { 17°30’ ; 197°30’ }

e) sec 4x = 1 — x ∈ { 0° ; 90° }

f) $\text{sen } x - \text{sen } x \cdot \cos x = 0$ $\qquad x \in \{ 0° ; 360° \}$

g) $-2 \text{ sen } x \cdot \cos x - 2 \cos x = 0$ $\qquad x \in \{ 90° ; 270° \}$

h) $2 (\text{sen}^2 x - \cos^2 x) = -1$ $\qquad x \in \{ 30° ; 150° ; 210° ; 330° \}$

i) $4 \text{ sen } x \cdot \cos x + 2 \text{ sen } x = 0$ $\qquad x \in \{ 0 ; 120° ; 180° ; 240° \}$

35- Verificar las siguientes identidades:

a) $\text{sen } (180° + \alpha) \cdot \cos (180° - \alpha) \cdot \text{tg } \alpha = \text{sen}^2 (180° - \alpha)$

b) $\sec (90° - \alpha) + \sec (90 + \alpha) = 0$

c) $\cos (\frac{p}{2} + x) + sen(\frac{p}{2} + x) = -\cos(2p + x) + sen(-x)$

d) $(\text{sen } x + \cos x)^2 + (\cos x - \text{sen } x)^2 = 2$

e) $\text{ctg } (90° + \alpha) + \cos (90° + \alpha) \cdot \text{cosec } (\frac{p}{2} - a) = -2 \text{ tg } \alpha$

f) $\cos x + \cos (\pi - x) = \cos (x + \pi) + \cos (-x)$

g) $\text{sen } (2\pi + \alpha) \cdot \text{ctg } (2\pi + \alpha) \cdot \cos (2\pi - \alpha) = \cos^2 \alpha$

h) $\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$

i) $\dfrac{sen(180° + a) + \cos(180° + a) + \cos a}{sen(180° - a)} = -1$ $\qquad (\alpha \neq k\pi)$

Para profundizar

36- Hallar x: Aclarar previamente cuáles valores no pueden ser respuesta, en caso necesario.

● *Respuestas*

a) $-\text{sen}\ (-x) = 2\ \left[\left(1-\cos^2\right).(p-x)\right]$ $\qquad$ $x \in \left\{\frac{p}{6};\frac{5}{6}p;p\right\}$

b) $\text{sen}\ (\pi - x) + 2 = -\frac{1}{senx}$ $\qquad$ $x = \frac{3}{2}p$

c) $tg^2\ x + tg\ (2\pi + x) = 0$ $\qquad$ $x \in \left\{\frac{3}{4}p;p;\frac{7}{4}p;2x\right\}$

d) $(ctg^2\ x)^{-1} = -1 + \frac{4}{3}.\sqrt{3}\ tgx$ $\qquad$ $x \in \left\{\frac{p}{6};\frac{p}{3}\right\}$

e) $\frac{2}{\sec^2(90° + x)} = 1 - tg\ x\ .\ \cos\ (-x)$ $\qquad$ $x = \left\{\frac{3}{2}p\right\}$

f) $\text{cosec}\ x - \sec\ (\frac{p}{2} + x) = tg\ (\pi + x)$ $\qquad$ Sol = { }

37- Verificar las siguientes identidades

Nota para el docente: De aquí en más, hasta el final del libro, queda a criterio del docente exigir o no la aclaración del conjunto de existencia, en caso que fuera necesario).

a) $tg\ (\frac{p}{2} - x)\ .\ tg\ (180° + x) + \text{sen}\ (2\pi - x) = 1 - \text{sen}\ x$

b) $\cos\ (2\pi - x)\ .\ tg\ (\pi + x) - \text{cosec}\ x = tg\ (90° + x)\ .\ \cos\ (2\pi + x)$

c) $-1 - \text{sen}\ x - \text{sen}\ (360° - x) = \cos\ (2\pi - x)\ .\ \sec\ (p - x)$

d) $\frac{\sec(p + x) + \cos x}{sen(2p - x) + \cos(90° + x)} = \frac{1}{2}(ctg\ x)^{-1}$

e) $$\frac{ctg\ x + ctg\ y}{ctg(\frac{p}{2} - x) + ctg(\frac{p}{2} - y)} = ctg\ y$$

38- Verificar las siguientes identidades:

(Tener en cuenta que $tg^2\ \alpha + 1 = \sec^2\ \alpha$)

a) $$\frac{tg\ x}{tg\ x - tg\ y} + \frac{ctg\ x}{ctg\ x - ctg\ y} = sen\frac{p}{2}$$

b) $$2(1 - \cos^2 x)\ (tg\ x)^{-1} - ctg\ \frac{7}{4}p = (sen\ x + \cos x)^2$$

c) $$(tg\ x + ctg\ x)\ .\ sen\ x\ .\ \cos x = tg\frac{9}{4}p$$

d) $$sen^2 x\ .\ \cos^2 x + sen^4 x = -ctg\ \frac{7}{4}p\ - (1 - sen^2 x)$$

e) $$\frac{sen\ x + \cos x}{- sen(2p - x)} + (-tg\ \frac{5}{4}p) = \frac{sen^2(\frac{p}{2} + x) + \cos^2(\frac{p}{2} - x)}{tg\ x}$$

f) $$\sec^4 x - \sec^2 x = tg^2\ x + tg^4\ x$$

g) $$\frac{\sec(p - x).\cos(-x)}{\sec(90° + x)} + \frac{ctg(180° - x)}{\cos ec(p + x)} = sen\ x + \cos x$$

Conceptos importantes y procedimientos resolutivos

Sistemas de medición de ángulos

Sistema sexagesimal

<u>Unidad de medida: EL GRADO SEXAGESIMAL</u>

$$1° = \frac{1\hat{R}}{90}$$

$\Rightarrow$ $1' = \frac{1°}{60}$ 1 minuto sexagesimal

$1'' = \frac{1'}{60}$ 1 segundo sexagesimal

Como cada unidad secundaria es igual a sesenta unidades del orden inmediato inferior, este sistema de medición <u>no</u> <u>forma</u> <u>parte</u> del Sistema Métrico Decimal.

Consecuencias:

1 ángulo llano $\longrightarrow$ 180°

1 ángulo de un giro $\longrightarrow$ 360°

Ejemplo

$\alpha = 17° \, 20'$
$\beta = 108° \, 10' \, 28''$

Expresar: $\alpha = 21° \, 17'$ en minutos sexagesimales
$\alpha = 1260' + 17'$
$\alpha = 1277'$

¿Cuál es la amplitud de $\beta = 1518'$, expresada en grados sexagesimales?
Dividiendo por 60, se obtiene $\beta = 25° \, 18'$

Sistema Horario

En 1 hora, el minutero del reloj "barre" un ángulo de un giro completo, por lo tanto se puede establecer un nuevo sistema de medidas en el cual:

$$1 \text{ h} \Leftrightarrow 360° \Leftrightarrow 1 \text{ giro completo}$$

$$1 \text{ min} = \frac{1h}{60} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ h} = 60 \text{ min}$$

$$1 \text{ seg} = \frac{1\text{min}}{60} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ min} = 60 \text{ seg}$$

Ejemplo

En un lapso de media hora,
¿Cuántos grados sexagesimales "barre" el minutero de un reloj?

$$\frac{1}{2} \text{ giro} \Leftrightarrow 180°$$

Desde las 8 h 45 min hasta las 9 h 25 min, ¿cuántos minutos horarios transcurrieron? ¿cuál ángulo barrió el minutero expresado en el sistema sexagesimal, y el centesimal?

$$60 \text{ min} \Leftrightarrow 360\,°$$

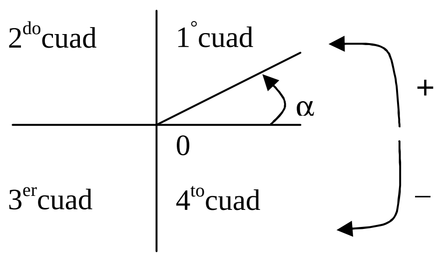
$$40 \text{ min} \Leftrightarrow X = 240\,°$$

$$1° \Leftrightarrow \frac{10^{G}}{9}$$

$$240° \Leftrightarrow X = 266,\widehat{6}^{G}$$

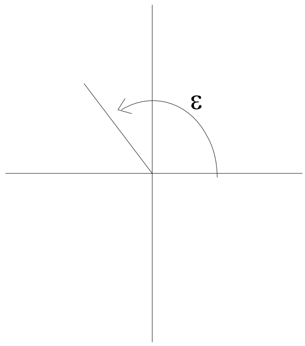
Sistema Circular

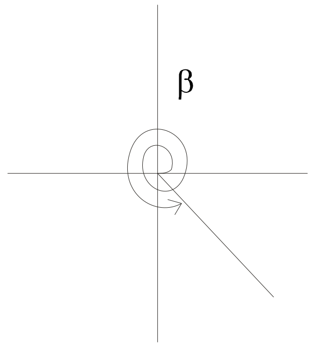
Ángulos orientados en un sistema cartesiano

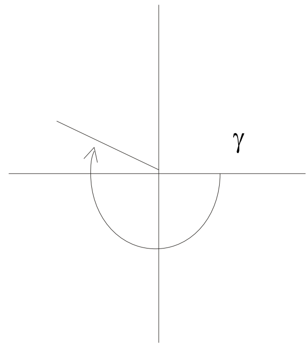


- El vértice es el origen de coordenadas
- Lado inicial: semieje positivo de las X

- Orientación: + si su sentido es contrario al del movimiento de las agujas del reloj.
  \- si su sentido es coincidente con el movimiento de las agujas del reloj.
- El ángulo puede realizar uno o más giros completos en cualquiera de los 2 sentidos.
- Se considera al plano cartesiano dividido en 4 cuadrantes, como lo indica la figura.







$\varepsilon = 140°$
$\varepsilon \in 2^{do}$ cuad

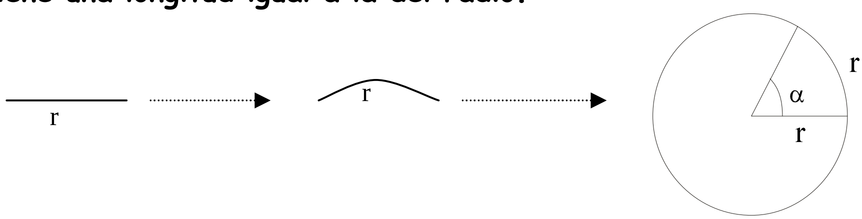
$\beta = 315° + 360° = 675°$
$\beta \in 4^{to}$ cuad

$\gamma = -210°$
$\gamma \in 2^{do}$ cuad

Sistema Circular

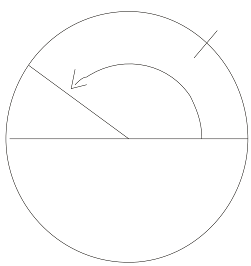
Unidad de medida ⟶ EL RADIÁN

Un ángulo central de UN RADIÁN es aquel en el cual el arco que abarca tiene una longitud igual a la del radio.

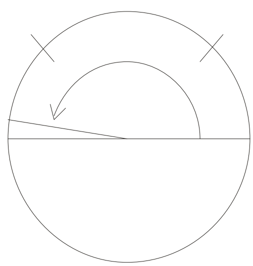


$\alpha = 1$ radián

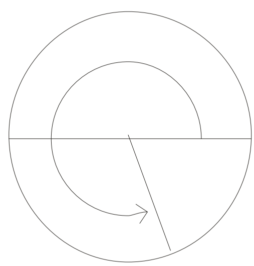
Ejemplo



$\alpha = 2$ rad



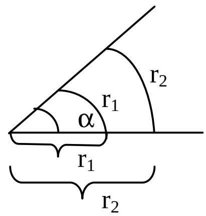
$\beta = 3$ rad



$\gamma = 5$ rad

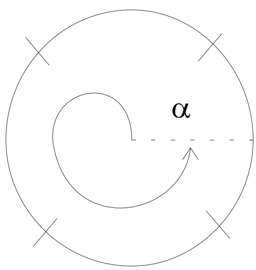
IMPORTANTE

Como las longitudes de los arcos que corresponden a un ángulo central dado son proporcionales a sus radios, resulta que el ángulo de un radián es ÚNICO y es independiente de la longitud de radio que se tome.



Equivalencias con el sistema sexagesimal

Longitud de la circunferencia: $2\pi\, r \Rightarrow 360° \Leftrightarrow 2\pi$ radianes



$\alpha = 360° = 6{,}28 \ldots$ rad $= 2\pi$ radianes

Consecuencia:

$180° = \pi$ rad

$90° = \frac{p}{2} rad$

$720° = 4\pi$ rad

etc.

$1° = \frac{p}{180}$ rad

1 radián $= \frac{180°}{p} = 57°\ 19'$

Nota de ahora en adelante para nombrar un ángulo en el sistema circular no se usará más la palabra "radianes".

Ej: $45° = \frac{p}{4}$.

Cada ángulo orientado se corresponde, entonces, con un número real

$$180° \Leftrightarrow 3{,}14...$$
$$360° \Leftrightarrow 6{,}28...$$
$$45° \Leftrightarrow 0{,}785...$$
$$\text{etc.}$$

PASAJES DE UN SISTEMA A OTRO

Expresar 120° en radianes

$$360° \;\_\; 2\pi$$
$$120° \;\_\; x = \frac{120° \, . \, 2p}{360°} = \frac{2}{3}p$$

Nota Se suele expresar como "fracción de π".

Expresar 270° en radianes

$$180° \;\_\; \pi$$
$$270° \;\_\; x = \frac{270° \, . \, p}{180°} = \frac{3}{2}p$$

Expresar $\frac{5}{6}p$ en el sistema sexagesimal

$$\pi \;\_\; 180°$$
$$\frac{5}{6}p \;\_\; x = \frac{\frac{5}{6}p \, . \, 180°}{p} = 150°$$

o bien, como $\pi \Leftrightarrow 180°$

$$\frac{5}{6}p = \frac{5}{6}.180° = 150°$$

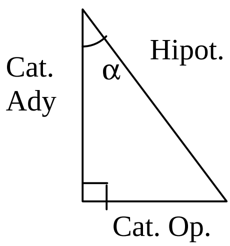
Razones Trigonométricas
(Revisión)

En todo triángulo rectángulo, se verifican siempre las siguientes relaciones para cada ángulo agudo:

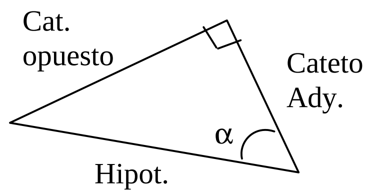
$$\text{sen } \alpha = \frac{cat.op.}{hip.} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{hip.}{cat.op.}$$

$$\cos \alpha = \frac{cat.ady.}{hip.} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{hip.}{cat.ady.}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{cat.op.}{cat.ady.} \qquad \text{ctg } \alpha = \frac{cat.ady.}{cat.op.}$$



o bien



Consecuencias: $\textbf{cosec } a = \frac{1}{sen a}$

$$\textbf{sec } a = \frac{1}{\cos a} \qquad \textbf{y además} \qquad \textbf{tg } a = \frac{sen a}{\cos a}$$

$$\textbf{ctg } a = \frac{1}{tg a} \qquad \backslash \quad \textbf{ctg } a = \frac{\cos a}{sen a}$$

Aclaración

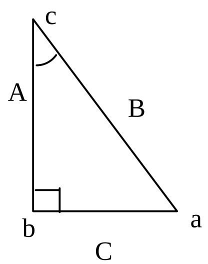
Aclaración

Tener en cuenta siempre, que el denominador debe ser <u>diferente</u> de 0.

Relación Pitagórica

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$$

REVISIÓN DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS USANDO LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



A = 17 cm
$\hat{c}$ = 48°
B = ?
$\hat{a}$ = ?
C = ?

Nota Se usan las letras mayúsculas A, B y C para expresar los lados opuestos a $\hat{a}, \hat{b}$ y $\hat{c}$, para facilitar la notación.

Calculo de B:

$$\cos\ \hat{c} = \frac{A}{B}$$

$$\cos 48° = \frac{17cm.}{B}$$

$$B = \frac{17cm.}{0{,}67}$$

$$\boxed{B = 25{,}37\ \text{cm.}}$$

Calculo de $\hat{a}$:

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$$

$$\hat{a} = 180° - (90° + 48°)$$

$$\boxed{\hat{a} = 42°}$$

Calculo de C:

$$\text{tg } \hat{c} = \frac{C}{A}$$

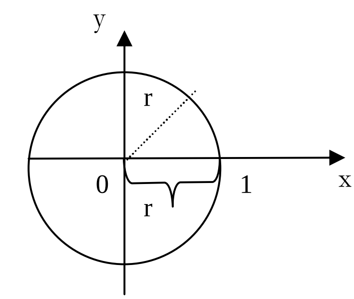
$$\text{tg } 48° = \frac{C}{17cm.}$$

1,1 . 17 cm. = C

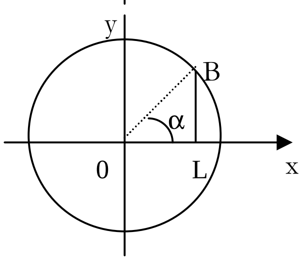
$$\boxed{18{,}7 \text{ cm.} = C}$$

Representación del sen a, cos a y tg a en un sistema de ejes

Se puede visualizar gráficamente el sen , el cos y la tg de un ángulo en un sistema de ejes cartesianos si se traza con centro en el origen del sistema 1 circunferencia de radio 1, llamada CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA.



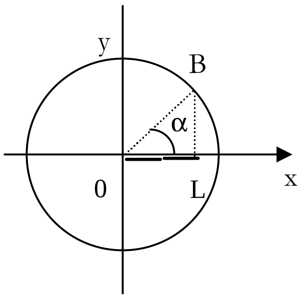
CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA



Si se señala un α cualquiera, queda determinado un punto B sobre la circunferencia:

En $\overset{\triangle}{0BL}$: como $\text{sen } \alpha = \dfrac{\overline{BL}}{\overline{OB}}$ y $\overline{OB} = 1$

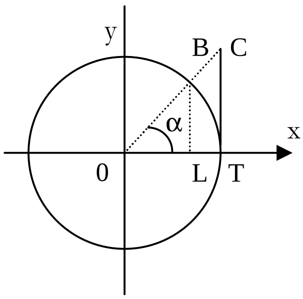
$\Rightarrow \quad \text{sen } \alpha = \overline{BL}$



En $\overset{\triangle}{OBL}$:

Como $\cos \alpha = \dfrac{\overline{OL}}{\overline{OB}}$ y $\overline{OB} = 1$

$\Rightarrow \cos \alpha = \overline{OL}$



En $\overset{\triangle}{OCT}$:

Como $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\overline{CT}}{\overline{OT}}$ y $\overline{OT} = 1$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \overline{CT}$

Consecuencias:

Si α crece de 0° hasta 90°
- → el seno CRECE desde 0 hasta 1.
- → el coseno DECRECE desde 1 hasta 0.
- → la tangente CRECE desde 0 y se hace arbitrariamente grande.

Consecuencia:

Signos de las razones trigonométricas en los 4 cuadrantes

II c	**I c**
sen +	sen +
sen -	sen -
III c	**IV c**

II c	**I c**
cos -	cos +
cos -	cos +
III c	**IV c**

II c	**I c**
tg -	tg +
tg +	tg -
III c	**IV c**

Valores de las Razones Trigonométricas de 0°; 90°; 180°; 270°; 360°

	0	$\frac{p}{2}$	p	$\frac{3}{2}p$	$2p$
	0°	90°	180°	270°	360°
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tg	0	-	0	-	0

Valores de las Razones Trigonométricas de 0°; 30°; 45°; 60°; 90°

	0	$\frac{p}{6}$	$\frac{p}{4}$	$\frac{p}{3}$	$\frac{p}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Relación entre las Razones Trigonométricas de 2 ángulos complementarios

Sen α y $90° - \alpha$

Las razones trigonométricas de α son iguales a las co-razones trigonométricas de su complementario:

sen α = cos $(90° - \alpha)$

cos α = sen $(90° - \alpha)$

tg α = ctg $(90° - \alpha)$

Ídem para ctg α, sec α, cosec α.

APLICACIÓN:

I) Calcular utilizando exclusivamente las tablas anteriores:

a. $\dfrac{sen30°}{tg\dfrac{p}{4}}$ - (2 tg$\dfrac{p}{6}$ -tg 60°) . $\sqrt{3}+sen\dfrac{p}{2}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1}-(2.\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}).\sqrt{3}+1$$

$$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{3}\sqrt{3}).\sqrt{3}+1=\frac{1}{2}-(-1)+1= \quad \boxed{\frac{5}{2}}$$

II) Aplicar la Relación Pitagórica y los vínculos existentes entre las Razones Trigonométricas para calcular los valores del sen, cos y/o tg del ángulo dado.

a. sen α = 0,43 $\wedge\, a \in$ 2° cuadrante

sen^2 α + cos^2 α = 1

cos α = $\pm\sqrt{1-sen^2 a}$

como α ∈ 2° cuadrante ⇒ cos α = - $\sqrt{1-(0,43)^2}$

cos α = - $\sqrt{1-0,1849}$

cos α = - $\sqrt{1-0,8151}$

$$\boxed{\cos\alpha = -0,9}$$

tg α = $\dfrac{sen\,a}{\cos a} \Rightarrow tg\,a = \dfrac{0,43}{-0,9} \Rightarrow$ $\boxed{tg\,a = -0,4\widehat{7}}$

Identidades

Una identidad es una igualdad entre dos expresiones que contienen una o más variables y tal que se verifica siempre, independientemente del valor de la/s variable/s.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180° \text{ (en todo triángulo)} \\ x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) \end{array}\right\} \text{Son Identidades}$$

Para verificar una identidad, se usan todas las reglas, propiedades, valores y sg. de las razones trigonométricas.

El procedimiento más habitual y sencillo es el de reemplazar todas las razones por otra expresión donde figure sen α o cos α.

Ejemplo

Verificar:

I) $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 0$

$\operatorname{sen} \alpha - \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cancel{\cos} a} \cdot \cancel{\cos} a = 0$ reemplazando…

$$\boxed{0 = 0}$$

II) $\text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha = \dfrac{1}{tg a + ctg a}$

$\downarrow$ Pasaje de término

$$\text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{sen a}{\cos a} + \frac{\cos a}{sen a}\right) = 1$$

$\downarrow$ Sumando y simplificando factores

$$\cancel{\text{sen}\ \alpha} \cdot \cancel{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{sen^2 a + \cos^2 a}{\cancel{\cos a} . \cancel{sen a}}\right) = 1$$

$\downarrow$ Usando la Relación Pitagórica

$$\boxed{1 = 1}$$

III) $-5 + tg^2\ \alpha = -\dfrac{5}{1 - sen^2 a} + 6tg^2\ \alpha$

$$-5 + \frac{sen^2 a}{\cos^2 a} = -\frac{5}{\cos^2 a} + \frac{6sen^2 a}{\cos^2 a}$$

Reemplazando...
(usando la Relación Pitagórica)

$$\frac{-5\cos^2 a + \text{sen}^2 a}{\cos^2 a} = \frac{-5 + 6\text{sen}^2 a}{\cos^2 a}$$

Sumando...

$$\frac{-5(1 - sen^2 a) + sen^2 a}{\cos^2 a} = \frac{-5 + 6sen^2 a}{\cos^2 a}$$

Reemplazando (usando la Relación Pitagórica)

$$\boxed{\frac{-5 + 6sen^2 a}{\cos^2 a} = \frac{-5 + 6sen^2 a}{\cos^2 a}}$$

Identidades Útiles

$$\text{Sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{Sec}^2\,\alpha - 1 = \text{tg}^2\,\alpha$$

Conjunto de existencia: es aquel formado por todos los valores de la variable que hacen posible la identidad, teniendo en cuenta alguna limitación propia de la misma.

Ejemplo

$$\text{cosec}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{\cos a} \,.\, \text{ctg}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha$$

Restricción: $\cos\alpha \neq 0$

Conjunto de existencia

$$E = \left\{ x \in \Re \,/\, x \neq (2K+1)\frac{p}{2}, K \in Z \right\}$$

En los ejercicios **I)** ; **II)** ; **III)** :

I) es válida para todo número real

II) $\text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\alpha \neq 0$

$\text{tg}\,\alpha \neq -\,\text{cgt}\,\alpha$

$\text{tg}\,\alpha \neq -\dfrac{1}{tg a}$

$\text{tg}^2\,\alpha \neq -1$

$\text{Tg}^2\,\alpha$ siempre $\neq -1$ por lo tanto esta identidad se verifica para <u>todo número real.</u>

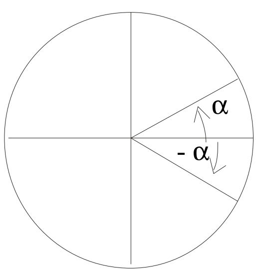
III) es válida para todo número real excepto para $\alpha = (2K + 1)\frac{p}{2}$

(ya que sen $\alpha \neq 1$).

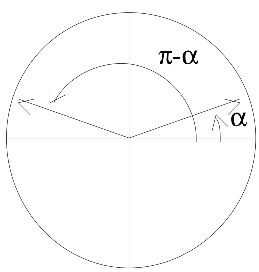
Reducción al primer cuadrante
Algunas relaciones útiles

	Ángulos opuestos. α y $-\alpha$	Ángulos suplementarios. α y $\pi - \alpha$	Ángulos que difieren en π. α y $\pi + \alpha$	Ángulos que suman 1 giro. α y $2\pi - \alpha$	Ángulos que difieren en 1 giro. α y $2\pi + \alpha$
Valores absolutos de las razones trigonométricas	Iguales	Iguales	Iguales	Iguales	Iguales
Signos	4^{to} cuadrante	2^{do} cuadrante	3^{er} cuadrante	4^{to} cuadrante	1^{er} cuadrante

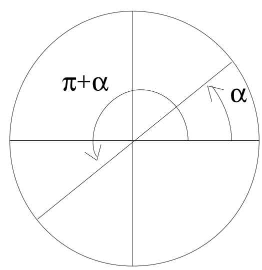
α y $-\alpha$ son opuestos



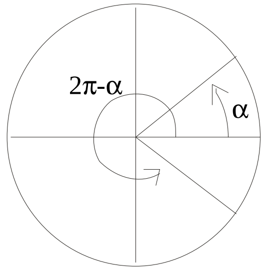
α y $\pi - \alpha$ son suplementarios
Ej.: 30° y 150°



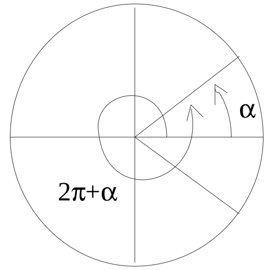
α y $\pi + \alpha$ difieren en π
Ej.: 30° y 210°



α y 2π - α completan 1 giro
Ej.: 40° y 320°



α y $2\pi + \alpha$ difieren en 1 giro
Ej.: 40° y 400°



Ejemplo

sen α = -sen $(-\alpha)$

tg $(\pi - \alpha)$ = -tg α

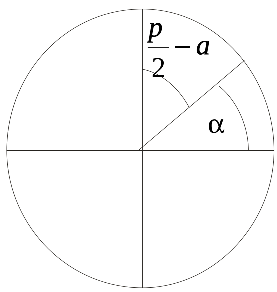
cos $(2\pi + \alpha)$ = cos α

cos α = cos $(-\alpha)$

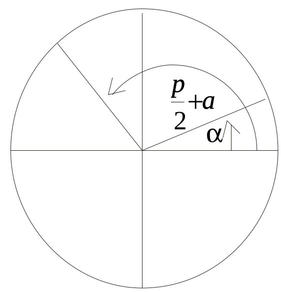
cosec $(\pi - \alpha)$ = cosec α

sen $(2\pi - \alpha)$ = -sen α

	Ángulos complementarios α y $\frac{p}{2} - \alpha$	Ángulos que difieren en $\frac{p}{2}$ α y $\frac{p}{2} + \alpha$
Valores absolutos de las razones trigonométricas.	Iguales a los de las co-razones.	Iguales a los de las co-razones.
Signos	1er cuadrante	2do cuadrante



α y $\frac{p}{2} - \alpha$ son complementarios
Ej.: 50° y 40°



α y $\frac{p}{2} + \alpha$ difieren en $\frac{p}{2}$
Ej.: 30° y 120°

Ejemplo

$\text{sen}\left(\frac{p}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$

$\text{tg}\left(\frac{p}{2} + \alpha\right) = -\text{tg}\ \alpha$

Aplicación:

I) **Expresar las razones trigonométricas siguientes en función exclusiva del ángulo** a **perteneciente al primer cuadrante.**

a. $\cos(180° + \alpha) = -\cos \alpha$
Justificar: $180° + \alpha \in$ 3° cuadrante $\Rightarrow$ su cos es negativo.

b. $\text{tg}\left(\frac{p}{2} + \alpha\right) = -\text{ctg}\ \alpha$ $\frac{p}{2} + \alpha \in$ 2° cuadrante $\Rightarrow$ la tg es negativa.

c. $\sec(2\pi - \alpha) = \sec \alpha$
$2\pi - \alpha \in$ 4° cuadrante $\Rightarrow$ cos es positivo $\Rightarrow$ sec es positiva.

II) **Escribir expresiones equivalentes a las dadas, haciendo figurar exclusivamente ángulos agudos positivos.**

a. $\cos 93° = \cos(90° + 3°) = -\text{sen}\ 3°$

b. $\text{tg}\ 240° = \text{tg}(180° + 60°) = \text{tg}\ 60°$

c. $\text{sen}\ 290° = \text{sen}(360° - 70°) = -\text{sen}\ 70°$ o bien

$\text{sen}\ 290° = \text{sen}(-70°) = -\text{sen}\ 70°$

d. $\cos 148° = \cos(180° - 32°) = -\cos 32°$ o bien

$\cos 148° = \cos(90 + 58°) = -\text{sen}\ 58° = -\cos 32°$

III) <u>Ecuaciones:</u> Calcular x, siendo 0° £ x £ 360°.

a. $4 \cos x + 4 = 0$

$4 \cos x = -4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 180°}$

$\cos x = -1$

b. $3 \cos x \,.\, \text{sen } x + 3 \cos x = 0$

$3 \cos x\, (\text{sen } x + 1) = 0$

$3 \cos x = 0 \quad \vee \quad \text{sen } x + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \quad \vee \quad \text{sen } x = -1$

$\boxed{\text{Sol: } x \in \left\{ \frac{p}{2} ; \frac{3}{2}p \right\}}$

c. $\text{sen } x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2senx}$

$(\text{sen } x - \frac{3}{2}) \,.\, 2 \text{ sen } x = -1$

$2 \text{ sen}^2 x - 3 \text{ sen } x + 1 = 0$

$\text{sen } x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \; < \; \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

$\text{sen } x = 1 \quad \vee \quad \text{sen} = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Sol: } x \in \left\{ \frac{p}{6} ; \frac{5}{6}p ; \frac{p}{2} \right\}}$

Aclaración En todas las ecuaciones se debe siempre VERIFICAR todas las soluciones halladas; ¡puede que alguna no sea válida!

Aclaración