

NOTAS DE AULA DO CURSO DE EE300

Romis Ribeiro de Faissol Attux e Cristiano Cordeiro Cruz

Campinas, segundo semestre de 2005

Capítulo 1 – Teoria da Relatividade

1.1 – Cinemática Clássica: a Transformação de Galileu

“Paulo estava no km 35 da rodovia às 12:45 de ontem”. “Carlos nasceu em São Paulo no dia 30 de dezembro”. “Encontre-me no café da esquina às 20 horas”.

Fazemos uso diariamente de expressões como essas para caracterizar determinados acontecimentos (o nascimento de Carlos, um encontro, etc.). Usualmente, podemos situar perfeitamente um *evento* no espaço e no tempo indicando sua localização e o instante de sua ocorrência. Em nosso universo, acreditamos ser possível caracterizar qualquer evento através de três coordenadas espaciais (e.g. latitude, longitude e altitude) e uma temporal (o momento). Dotado de tais grandezas, um observador **O** pode registrar eventos em seu sistema de referência, que denominaremos **O**(x,y,z,t). Em consonância com a nomenclatura tradicional, as coordenadas x, y e z dizem respeito ao espaço, enquanto a coordenada t expressa a dependência temporal.

Destarte, do ponto de vista de **O**, eventos são completamente caracterizados por um conjunto de quatro números. Podemos então indagar: será o sistema que acabamos de construir o único imaginável? A resposta deve ser negativa, como, aliás, a nossa vivência bem atesta: seria possível ver Carlos nascer ao lado de sua mãe, na sala de parto, por uma janela, ao passar por um corredor ou deitado numa maca. Movidos pela curiosidade científica, indagamos: é viável estabelecer alguma relação entre todos esses sistemas de coordenadas? Tomemos dois sistemas, **O**(x,y,z,t) e **O'**(x',y',z',t'). Para que explicitemos algum tipo de conexão entre eles, faz-se necessário conhecer como é o movimento relativo entre **O** e **O'**.

Caso o movimento seja uniforme, ou seja, **O'** se mova com velocidade constante em relação a **O** (o inverso também é válido), a Física Clássica tem uma resposta muito intuitiva para nossos anseios. Tal resposta tem a forma da *transformação de Galileu*. Suponhamos que **O'** se mova com velocidade **u** em relação a **O**, e que essa velocidade tenha a direção do eixo x. Consideremos ainda que os eixos x, y e z sejam paralelos a x', y' e z', respectivamente, e que, no instante $t = t' = 0$, as duas origens coincidam. Sob a égide de tais considerações, a transformação de Galileu pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}x' &= x - ut \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{1.1}$$

Note o leitor que a primeira expressão é estudada nos cursos de cinemática quando se lida com o movimento uniforme. As demais coordenadas espaciais não se alteram com a transformação, uma vez que a velocidade **u** tem a direção do eixo x.

A coordenada temporal também não se altera, o que merece consideração. Nesse fato, percebemos que a Física Clássica suporta a idéia de *tempo absoluto*, ou seja, de que o movimento relativo não altera a relação entre intervalos temporais medidos em cada um dos referenciais.

Podemos utilizar (1.1) para obter uma relação entre as velocidades em cada referencial. Como $t = t'$, podemos escrever:

$$dt = dt' \quad (1.2)$$

Se diferenciarmos as três primeiras equações de (1.1) com respeito ao tempo (não nos esqueçamos de (1.2)), chegaremos a:

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x - u \\ v_y' &= v_y \\ v_z' &= v_z \end{aligned} \quad (1.3)$$

A primeira equação de (1.3) é uma expressão da clássica *lei da adição das velocidades*.

EXEMPLO 1.1

Um observador O está parado numa estação. Um trem procedente de uma cidade distante passa por ele, e então O reconhece seu irmão, que está sentado numa poltrona do trem. No momento em que vê seu irmão, este último começa a correr no mesmo sentido do trem, rumo a uma porta, com uma velocidade de 6 m/s em relação ao vagão. O trem tem uma velocidade de 15 m/s em relação a O . Qual será a velocidade do irmão de O em relação à estação (e ao próprio O)?

Suporemos que o trem se move na direção e no sentido do eixo x . Podemos tomar como nossos referenciais O e o trem, que passa a ser, portanto, O' . Sabemos que a velocidade relativa entre eles é de 15 m/s. Este é, então, o valor de u . Temos a velocidade do irmão com relação ao vagão, que é:

$$v_x' = 6 \text{ m/s}$$

Conseqüentemente, podemos utilizar a primeira equação de (1.3) para obter o que desejamos, a velocidade do irmão em relação à estação, ou seja, v_x :

$$v_x = v_x' + u = 6 + 15 = 21 \text{ m/s}$$

Esse exemplo, que condiz com a nossa experiência cotidiana (e com o chamado “bom senso”) é típico da aplicação da lei da adição das velocidades.

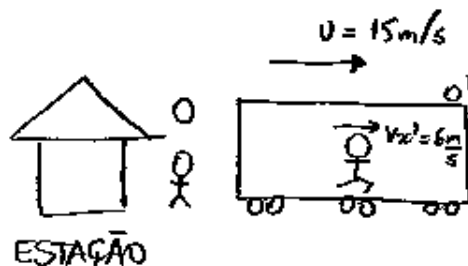


Figura 1.1: Ilustração do exemplo 1.1

A mecânica newtoniana está em harmonia com a transformação de Galileu. De fato, as leis de Newton são *invariantes* com respeito a essa transformação, o que pode ser percebido se notarmos, por exemplo, que a aceleração em **O** e **O'** é a mesma (o leitor pode verificar tal fato se repetir o procedimento que nos permitiu obter a transformação de velocidades). O que isso quer dizer? Quer dizer que a forma dessas leis físicas é idêntica em dois sistemas de referência que estejam em movimento relativo uniforme. De fato, tal é justamente o princípio da relatividade newtoniano: *as leis da mecânica são as mesmas para todos referenciais inerciais*.

Trata-se de uma lei muito interessante, pois, se as leis físicas fossem diferentes para dois referenciais em movimento uniforme, poderíamos, eventualmente, elevar um deles à categoria de “referencial privilegiado”, o que nos conduziria à idéia de *movimento absoluto*. No entanto, de acordo com o princípio acima exposto, não há experiência baseada na mecânica tradicional que nos permita determinar se nos encontramos em movimento ou em repouso. Uma conseqüência dessa assertiva é a conhecida constatação de que, idealmente, estar de olhos vendados num trem com velocidade uniforme em relação ao solo proporciona as “mesmas sensações” que estar de pé sobre o solo.

Seria, no entanto, muito natural perguntar: todas as leis físicas são invariantes com relação à transformação de Galileu? A resposta é *não*, e tal negativa nos conduzirá a um novo princípio da relatividade, proposto por Einstein em 1905.

1.1.1 – Interlúdio: o Eletromagnetismo e a Transformação de Galileu

James Clerk Maxwell tem seu nome associado a uma teoria física de elegância cativante: a *teoria eletromagnética*. Seria indubitavelmente apropriado tomá-la como cobaia de nossa investigação sobre o problema de invariância, que acabamos de discutir. Na verdade, como já sabiam os físicos no fim do século XIX, as leis do eletromagnetismo *não são invariantes* à transformação de Galileu. Essa transformação engendra “formas distintas” das equações de Maxwell para referenciais distintos, mesmo que eles estejam em movimento relativo uniforme. De acordo com o que discutimos na seção anterior, disso decorreria a constatação da existência de um referencial privilegiado, no qual as leis do eletromagnetismo teriam sua forma, digamos, mais simples [Ohanian, 1995]. Eis que fomos conduzidos a uma “absolutização” do movimento, a qual está intimamente ligada a uma

entidade que permeou o imaginário da maioria dos físicos até o começo do século XX: o éter.

1.2 – O Éter e a Experiência de Michelson-Morley

“Ondas sonoras não se propagam no vácuo!”. Esta frase já foi proferida por muitos garotos (e críticos) após (ou durante) a exibição de filmes de ficção científica. Não questionaremos esse fato...a Física indica, impassível, que o som precisa de um meio material para que possa se propagar.

Quando Maxwell predisse a existência de ondas eletromagnéticas, existência, aliás, suportada pelo trabalho experimental de Heinrich Hertz, era parte do “senso comum” que tais ondas também deveriam necessitar de um meio de propagação. A esse meio foi dado o nome de *éter*. Durante o século XIX, o éter povoou a mente dos físicos com diversas conjecturas.

Como seria o éter? Qual a sua composição? Era intangível? Essas foram algumas das questões levantadas sem demora. No entanto, obter respostas conclusivas parecia uma tarefa nada trivial. Alguns atribuíam a tal meio, por exemplo, a idéia de “repouso absoluto”, o que nos faz perceber a associação direta entre o éter e o referencial privilegiado que discutimos na seção 1.1.1, no qual as leis do eletromagnetismo têm sua forma mais simples e a luz se propaga com velocidade c . Em outros referenciais inerciais, a velocidade da luz seria obtida pela lei da adição das velocidades, o que não seria problema, pois, no mundo clássico, as equações de Maxwell não precisavam ser invariantes.

1.2.1 – O Vento de Éter

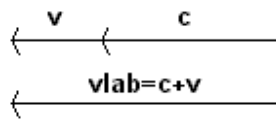
Num dia em que o ar se encontra em perfeita calmaria, imagine que você está na praia. Pense agora que você começa a correr e sinta o vento tocar sua face como se soprasse uma agradável brisa. Não se esqueça, no entanto, que o dia é de calmaria; porém, o movimento através do ar causou uma sensação equivalente a de um vento, o que não se afigura nada espantoso. Novamente, é uma questão de movimento relativo!

Da mesma forma que o seu movimento na praia provocou o surgimento de um vento, o movimento da Terra pelo éter deveria causar a existência de um *vento de éter*, possivelmente detectável. Em tese, esse vento deveria alterar a velocidade da luz se o movimento de translação de nosso planeta se desse através de um éter “estático” (como muitos imaginavam).

Pensemos um pouco sobre isso. Assumamos que o vetor \mathbf{v} represente a velocidade do vento em relação a um laboratório localizado em algum lugar da face da Terra.

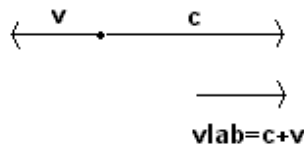


Imaginemos agora que um raio de luz fosse disparado na mesma direção e sentido de \mathbf{v} . Sob a ótica da Física Clássica, a velocidade do raio, do ponto de vista de um cientista parado no laboratório, seria $\mathbf{v} + \mathbf{lab}$:



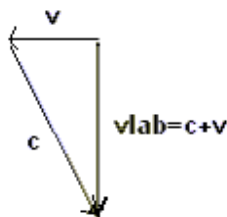
Percebe-se que $\|\mathbf{v}_{lab}\| = v_{lab} = c + v$. Assim, o cientista mediria, para o raio, uma velocidade $c + v$.

Se o raio se movesse em sentido contrário ao do vento, teríamos:



sendo $\|\mathbf{v}_{lab}\| = c - v$. Neste caso, a velocidade medida seria menor.

Se o raio se movesse em uma direção ortogonal à do vento, teríamos o seguinte cenário:



em que $v_{lab} = \sqrt{c^2 - v^2}$.

Esperava-se que a velocidade desse vento fosse igual à velocidade de translação da Terra em torno do Sol, que vale cerca de 30 km/s. Como $v \ll c$, exigia-se um aparato muito preciso para detectar qualquer efeito. Tal aparato foi construído no final do século XIX, como veremos a seguir.

1.2.2 – As experiências

Albert Abraham Michelson teve uma carreira marcada por importantes contribuições ao estudo da luz, as quais lhe renderam o Prêmio Nobel de Física de 1907 (o primeiro concedido a um cientista estadunidense). Uma de suas especialidades era medir a velocidade da luz, o que é de grande interesse prático. No final do século XIX, ele se dedicou à busca de evidências experimentais da existência do vento de éter. Para tanto, concebeu e construiu o chamado *interferômetro de Michelson*, cujo esquema simplificado apresentamos na Fig. 1.2 [Ohanian, 1995, Krane, 1983].

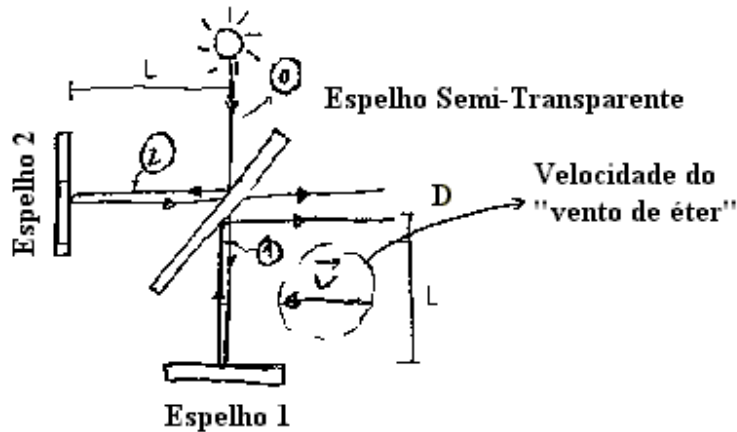


Figura 1.2 – Esquema Simplificado do Aparato

Um feixe de luz monocromática **0** atinge um espelho semi-transparente (EST). Como o próprio nome desse dispositivo indica, uma parte do feixe atravessa o espelho e forma o feixe **1**, enquanto a outra parte é refletida e forma o feixe **2**. Os feixes **1** e **2** são refletidos, respectivamente, pelos espelhos 1 e 2 (E1 e E2), e voltam ao EST. De lá, a luz deles proveniente é direcionada para um detector de franjas de interferência **D**.

Para melhor entendermos a razão de ser dessa refinada montagem, realizemos uma breve análise matemática. Entre a ida e a volta de **1**, transcorre um tempo t_1 , expresso por:

$$t_1 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (1.4)$$

Para obter t_1 , usamos o raciocínio desenvolvido na seção anterior. Para **2**, temos, para ida e volta:

$$t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{L(c-v) + L(c+v)}{c^2 - v^2} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \quad (1.5)$$

A diferença os estes dois intervalos de tempo é:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (1.6)$$

Se o comprimento de onda da luz emitida é λ , Δt se reflete numa diferença de fase $\Delta\phi$ entre os feixes (quando eles atingem **D**) de:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c}{\lambda} \Delta t \quad (1.7)$$

Tal diferença de fase produz um padrão de interferência passível de detecção, que é, por sua vez, a chave para a determinação da velocidade v . Eis, em linhas gerais, o plano de Michelson.

Para sua grande surpresa, ele *não detectou nenhum efeito conclusivo do vento de éter sobre a velocidade da luz*. Isso o levou a uma nova empreitada, dessa vez em conjunto com o químico Edward Morley, e com um aparato ainda mais preciso. Porém, uma vez mais não foi detectada nenhuma corrente de éter, para espanto dos dois cientistas e de Rayleigh, Kelvin, Lorentz e outros [Pais, 1995]. Realmente, o resultado negativo punha em xeque a concepção corrente acerca do eletromagnetismo, o que fez surgir um grande desconforto e algumas hipóteses interessantes.

Michelson e outros continuaram repetindo a experiência por algumas décadas, sem obter, jamais, resultados conclusivos a favor da existência do vento de éter. Aliás, um fato muito interessante ocorreu em 1921, quando Dayton Miller afirmou ter obtido um valor não-nulo para a velocidade da corrente de éter. O fato, desnecessário dizer, causou comoção, pois a relatividade já havia sido formulada (veremos a relevância disto a seguir) e Einstein era uma figura muito popular. Quando soube dos resultados de Miller, o alemão proferiu uma frase célebre: “O Senhor é sutil, mas não malicioso”, pois tinha uma profunda convicção da inexistência do éter e da correção dos resultados de Michelson e Morley [Pais, 1995].

1.3 – Os Postulados da Relatividade

Um dos artigos publicados por Einstein em 1905 pode ser considerado a pedra angular da teoria da relatividade. Nesse trabalho, intitulado “Da Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento”, encontramos os dois postulados fundamentais, que são os pilares de tal edifício teórico. Ambos são muito simples, e esperamos que sirvam para desmistificar a tão falada complexidade conceitual da relatividade:

1 – Todas as leis da Física são idênticas em todos referenciais inerciais.

2 – A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais.

O primeiro postulado é o princípio da relatividade levado às últimas conseqüências: todas (os grifos são nossos) as leis da Física são idênticas em todos referenciais inerciais. Não podemos contar com os fenômenos eletromagnéticos ou de qualquer outra natureza para nos dizer quem está, em termos absolutos, em movimento uniforme ou repouso. Trata-se da proclamação de igualdade entre referenciais inerciais: não há privilégios de nenhuma espécie! Essa era uma crença profunda de Einstein, uma convicção que permeia toda a sua formulação teórica. Ela deverá também estar em nossas mentes quando analisarmos a relatividade.

O segundo postulado afirma que a velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos referenciais inerciais. Trata-se de uma condição relevante, pois, se ela não fosse obedecida, o eletromagnetismo não se encaixaria no contexto do primeiro postulado. Os dois postulados, portanto, estão interligados.

A hipótese levantada acerca da velocidade da luz, de aparência inocente, contém uma drástica negação da cinemática clássica. Um exemplo pode indicar a razão.

EXEMPLO 1.2

Suponha que um astronauta A está em repouso relativamente a uma estação espacial. Ele vê duas naves se aproximarem com velocidade $0.5c$, uma de cada lado, em rota de colisão. De repente, a nave que vem da esquerda (NE) dispara um fecho de luz na direção da outra nave (ND) para avisar o piloto do risco iminente. Qual será a velocidade desse fecho relativamente a cada nave e ao astronauta A?

A lei da adição das velocidades fornece as seguintes respostas:

$$V_{\text{raioNE}} = c$$

pois o emissor está acoplado à nave, estando em repouso em relação a esta. Do ponto de vista do astronauta, a velocidade do fecho será:

$$V_{\text{raioA}} = c + 0.5c = 1.5c$$

Do ponto de vista da outra nave, a velocidade será:

$$V_{\text{raioND}} = V_{\text{NdrelativaNE}} + c = c + c = 2c$$

Os resultados obtidos parecem bastante razoáveis. Porém, o segundo postulado afirma que, do ponto de vista de todos, a velocidade do raio será c ! Assim, teríamos:

$$V_{\text{raioA}} = c$$

$$V_{\text{raioNE}} = c$$

$$V_{\text{raioND}} = c$$

Isso já mostra que a transformação de Galileu foi irremediavelmente abandonada.

Trata-se, certamente, de um postulado espantoso *a priori*, pois a nossa intuição parece estar de acordo com a cinemática clássica. No entanto, nossa intuição foi formada a partir da observação de fenômenos que envolvem velocidades muito inferiores à da luz, o que impede a confrontação entre as duas cinemáticas apenas pela vivência cotidiana.

A relatividade, por si mesma, já foi exposta nesta seção. Passaremos agora à análise de algumas conclusões decorrentes dos dois postulados que acabamos de discutir.

1.4 – A Dilatação do Tempo

Uma consequência muito importante dos dois postulados é a abolição da idéia de tempo absoluto. Como vimos na equação (1.1), a Cinemática Clássica prega que a passagem do tempo se dá no mesmo “ritmo” em dois referenciais em movimento relativo uniforme. Veremos que, do ponto de vista relativístico, isso não é verdade. Um exemplo [Krane, 1983] pode nos ajudar a entender melhor o que ocorre.

EXEMPLO 1.3

Dois observadores, O e O' , presenciam um mesmo fenômeno: o disparo, por O , de um fecho de luz. Esse fecho é refletido por um espelho, e volta ao canhão emissor. Estudaremos a ocorrência a partir dos pontos de vista de ambos os referenciais, os quais estão interligados pelo fato de que O' se move com velocidade u em relação a O . A direção dessa velocidade é ortogonal àquela de propagação do raio.

Vejamos, primeiramente, como a coisa se dá na ótica de O . A Fig. 1.3 mostra um esquema.

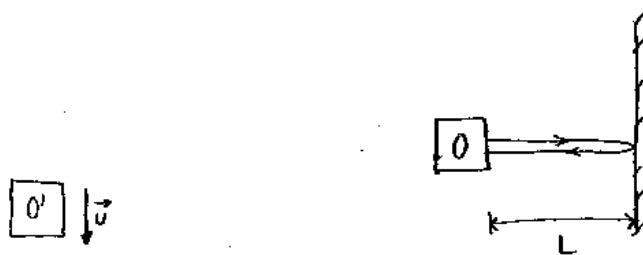


Figura 1.3 – Ponto de Vista de O

O intervalo de tempo decorrido entre a emissão e a volta é:

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad (1.8)$$

Passemos agora ao ponto de vista de O' . O esquema está na Fig. 1.4.

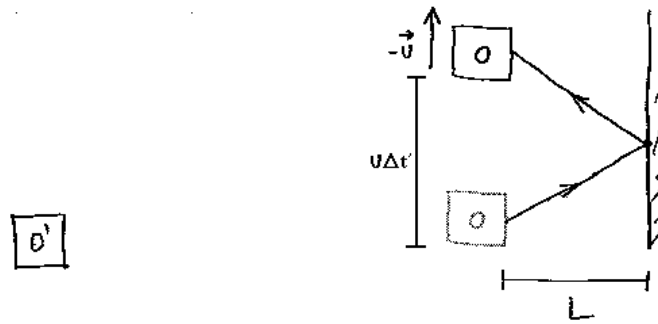


Figura 1.4 – Ponto de Vista de O'

A distância total percorrida pelo raio é, neste caso:

$$\Delta x' = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{u\Delta t'}{2}\right)^2} \quad (1.9)$$

sendo $\Delta t'$ o tempo gasto entre a ida e a volta do raio.

Como propõe o segundo postulado, a velocidade da luz, do ponto de vista de O', também deve ser c. Assim, podemos escrever, a partir de (1.9):

$$c = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{u\Delta t'}{2}\right)^2}}{\Delta t'} \quad (1.10)$$

Reescrevendo (1.8), obtemos:

$$L = \frac{c\Delta t}{2} \quad (1.11)$$

Substituindo (1.11) em (1.10), chegamos a:

$$c = \frac{2\sqrt{\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u\Delta t'}{2}\right)^2}}{\Delta t'} \quad (1.12)$$

Após algumas manipulações, (1.12) nos leva a:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1.13)$$

Essa é a expressão matemática da *dilatação do tempo*, um dos mais célebres efeitos relativísticos. É possível mostrar que $\Delta t' \geq \Delta t$ para $u < c$, o que justifica o emprego do termo “dilatação”.

A equação (1.13) é um símbolo de ruptura com o conceito clássico de tempo. Dois observadores em movimento relativo irão discordar quanto à medida do tempo de duração de um fenômeno qualquer. Do ponto de vista de O, os relógios de O' serão mais lentos que os seus, e, do ponto de vista de O', os relógios de O é que serão mais lentos. E ambos terão razão, pois lidamos com o princípio da relatividade.

1.5 – A Contração do Comprimento

Uma segunda consequência dos dois postulados é que as medidas de comprimento também são relativas. Isso significa que, segundo a teoria da relatividade, dois observadores em movimento relativo uniforme poderão obter medidas discrepantes para um comprimento qualquer.

O que isso quer dizer?

Imagine que você esteja num trem em movimento a segurar uma régua de 30cm numa direção paralela à dos trilhos. Seu irmão, que o vê passar a partir de um banco da estação, obterá uma medida de comprimento para a régua menor que 30cm. Da mesma forma, se o seu irmão estivesse segurando a régua, seria você quem iria medir um comprimento menor para a régua.

Vale frisar que a contração se dá apenas na direção do movimento, ou seja, não há discrepância no que se refere a medidas nas outras direções ortogonais. Um exemplo [Krane, 1983] similar ao da seção anterior pode nos ajudar a ver as coisas de forma mais clara.

EXEMPLO 1.4

Novamente, dois observadores, O e O', estudam a emissão de um raio por O e sua posterior reflexão. O' move-se com velocidade u em relação a O, agora numa direção paralela à do raio de luz.

Analisemos, em primeiro lugar, o ponto de vista de O. A Fig. 1.5 traz um esquema da situação.

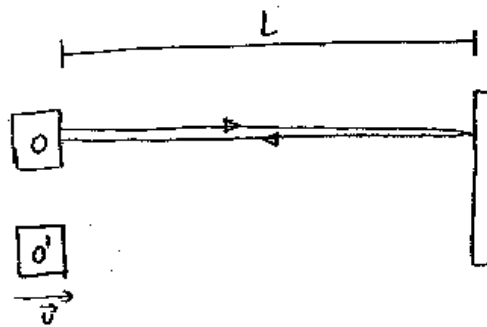


Figura 1.5 – Ponto de Vista de O

Podemos escrever:

$$2L = c\Delta t \quad (1.14)$$

sendo Δt o intervalo de tempo decorrido entre a ida e a volta do raio.

Passemos agora ao outro observador. Na Fig. 1.6, está representado o ponto de vista de O' no instante do disparo.

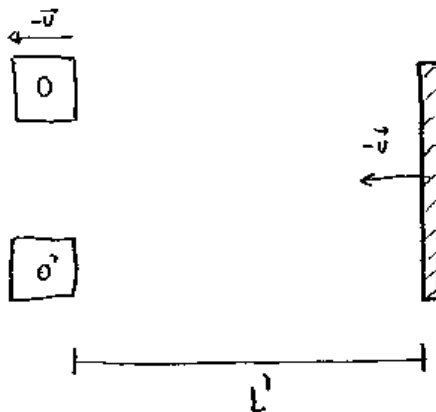


Figura 1.6 – Ponto de Vista de O' no Instante do Disparo

Vejamos, primeiramente, o que ocorre até a reflexão. A Fig. 1.7 ilustra a situação.

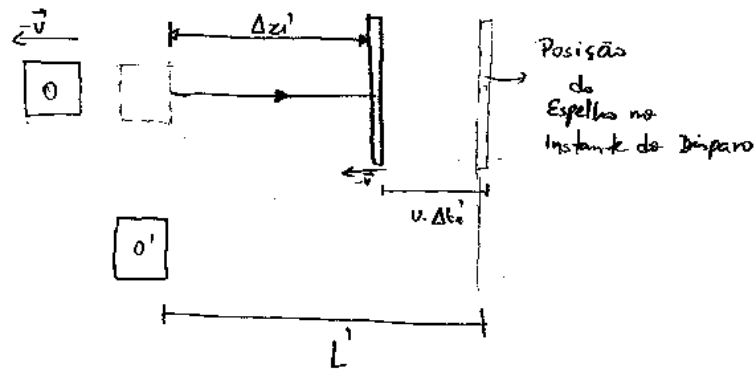


Figura 1.7 – Esquema até a Reflexão

A distância percorrida pelo raio, $\Delta x_1'$, é:

$$\Delta x_1' = L' - u \cdot \Delta t_1' \quad (1.15)$$

sendo $\Delta t_1'$ o intervalo de tempo decorrido entre a emissão e a reflexão.

De (1.15) obtemos:

$$\Delta t_1' = \frac{L'}{c + u} \quad (1.16)$$

Passemos agora à investigação da volta do raio. A Fig. 1.8 traz um esquema.

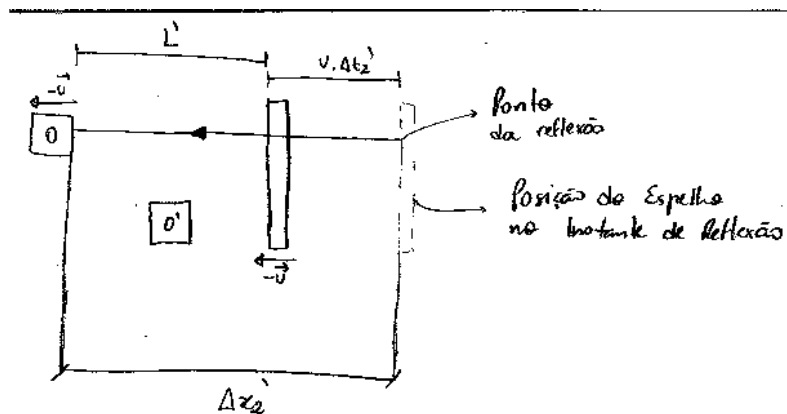


Figura 1.8 – Esquema da Reflexão até a Volta

Neste caso, a distância percorrida pelo raio de luz, da reflexão até a volta, é:

$$\Delta x_2' = L' + u \cdot \Delta t_2' \quad (1.17)$$

Manipulando (1.17), obtemos:

$$\Delta t'_2 = \frac{L'}{c - u} \quad (1.18)$$

Sendo $\Delta t'$ o tempo total do ponto de vista de O' , podemos escrever:

$$\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2 = \frac{L'}{c + u} + \frac{L'}{c - u} = \frac{2L'c}{c^2 - u^2} \quad (1.19)$$

Substituindo a fórmula da dilatação do tempo, (1.13), que relaciona Δt e $\Delta t'$ em (1.19), obtemos:

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (1.20)$$

Da expressão (1.20) decorre que $L' \leq L$, para $u < c$. Daí a denominação dada ao fenômeno: *contração do comprimento*.

Observando as equações (1.13) e (1.20), percebemos a existência de um fator comum às duas. Tal fator,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1.21)$$

recebe o nome de *fator de Lorentz*, em homenagem a Hendrik Lorentz, físico holandês que foi um dos precursores da relatividade. Aliás, a contração do comprimento é também denominada *contração de Lorentz-FitzGerald* em homenagem ao já mencionado físico e ao físico irlandês George FitzGerald. O motivo da homenagem é que ambos chegaram a (1.20) antes de Einstein, embora numa perspectiva conceitual distinta.

1.6 – O Efeito Doppler

Quando passa por nós uma ambulância com a sirene ligada, experimentamos sensações auditivas distintas durante sua aproximação e seu afastamento. Isso ocorre graças a um efeito físico, o *efeito Doppler*, cujo nome é uma homenagem a Christian Doppler, cientista austríaco que primeiro o descreveu.

Analisemos o tratamento dado ao efeito Doppler no contexto de ondas sonoras. Seja **S** uma fonte que emite uma onda sonora de frequência f e **O** um observador que mede, para a mesma onda, uma frequência f' . A teoria clássica fornece as seguintes relações:

$$f' = f \frac{v + v_o}{v - v_s} \quad (1.22)$$

caso fonte e observador estejam se aproximando, e

$$f' = f \frac{v - v_o}{v + v_s} \quad (1.23)$$

caso fonte e observador estejam se afastando. v_o e v_s são as velocidades de fonte e observador em relação ao meio de propagação (e.g. o ar). v é a velocidade de propagação da onda no meio.

Classicamente, quando se estudava o efeito em ondas luminosas, eram usadas as mesmas fórmulas, sendo modificados apenas os valores das grandezas envolvidas. No entanto, do ponto de vista da relatividade, tal intercâmbio não é satisfatório.

Como vimos anteriormente, o éter não tinha nenhum papel no programa de Einstein. Assim, v_o e v_s seriam velocidades medidas em relação a que meio? Sem um meio, poderíamos nos sentir tentados a dizer “em relação a um referencial privilegiado qualquer (e.g. o éter), talvez um em repouso com relação às estrelas fixas”. Isso traria de volta a noção de movimento absoluto, que não condiz com o espírito da teoria. É necessário obter uma fórmula que leve em conta apenas o movimento relativo entre fonte e observador.

Que resposta têm os dois postulados? Através da transformação de Lorentz, que estudaremos no próximo capítulo, é possível mostrar que uma onda eletromagnética de frequência f tem uma frequência

$$f' = f \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}} \quad (1.24)$$

do ponto de vista de um observador que se aproxima da fonte de luz com velocidade u . Caso observador e fonte estejam se afastando, basta trocar u por $-u$ na equação acima.

A expressão (1.24) é perfeitamente condizente com os dois postulados, com o espírito da relatividade. Vale mencionar que Einstein obteve uma fórmula mais geral que (1.24), a qual previa um desvio Doppler mesmo se a direção de propagação da onda não fosse a mesma da velocidade u . Assim, a relatividade levou à descoberta do *efeito Doppler transversal* [Pais, 1995].

1.7 – A Transformação de Lorentz

Conforme discutimos, a teoria da relatividade contraria o espírito da transformação de Galileu. É, portanto, de capital importância obter uma transformação que seja coerente com os dois postulados. Na realidade, quando Einstein escreveu o seu célebre primeiro artigo sobre a relatividade, essa transformação já havia sido obtida por mais de um cientista, embora em contextos distintos [Pais, 1995]. Porém, no trabalho de 1905, Einstein chega à transformação a partir dos dois postulados, o que deu uma dimensão profundamente nova ao conjunto de equações que expomos agora:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}
\end{aligned}
\tag{1.25}$$

A obtenção de (1.25) parte de hipóteses similares às discutidas quando expusemos a transformação de Galileu (1.1), ou seja: que \mathbf{u} é paralelo ao eixo x , que os eixos são paralelos entre si, e que as origens coincidem no instante inicial.

Imediatamente, percebemos a presença do fator de Lorentz na primeira expressão e na última. É possível notar ainda que a coordenada temporal não mais é preservada, o que, tendo em vista os efeitos discutidos nas últimas seções, não chega a surpreender. No entanto, nota-se que t' depende de t e de x , o que revela uma íntima conexão entre tempo e espaço. Hermann Minkowski explorou a fundo tal conexão e estabeleceu um formalismo matemático baseado no conceito de espaço-tempo, que depois foi de grande valia para o próprio Einstein durante as suas pesquisas sobre relatividade geral. Por fim, frisamos que, conforme é esperado, as leis do eletromagnetismo são invariantes com relação à transformação de Lorentz, ao contrário do que ocorria com a transformação de Galileu.

A partir de (1.25), e tendo em vista que $dt' \neq dt$, obtemos a transformação de velocidades:

$$\begin{aligned}
v_x' &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x \cdot u}{c^2}} \\
v_y' &= v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \\
v_z' &= v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}
\end{aligned}
\tag{1.26}$$

Conforme também era esperado, a lei clássica de adição de velocidades não é mais válida. Também chama a atenção o fato de as velocidades v_y' e v_z' dependerem de v_x , o que não ocorria no caso clássico. Matematicamente, isto decorre da expressão de dt' . Intuitivamente, podemos pensar em todos estes fatores como “mecanismos” para

transformar velocidades no cenário delineado pelos postulados, no qual a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais.

1.8 – A Relatividade da Simultaneidade

Temos, de fato, intuição da simultaneidade de dois eventos? Dois eventos simultâneos para um observador são simultâneos do ponto de vista de todos observadores? São perguntas de grande relevância, que põem em xeque nosso senso comum. Podemos pensar: ora, se duas coisas acontecem ao mesmo tempo, não há o que discutir, elas serão simultâneas também para os demais observadores. Porém, a relatividade tem uma resposta diferente: a simultaneidade de dois eventos não é absoluta.

Mais uma vez, lançaremos mão de um exemplo para esclarecer essa discussão.

EXEMPLO 1.6

Imagine que você deseja sincronizar dois relógios, ou seja, fazer com que eles comecem a operar no mesmo instante. Para realizar tal tarefa, você os coloca a uma mesma distância de uma fonte luminosa. Assim, quando a fonte for ativada, a luz atingirá os relógios no mesmo momento e dará início ao trabalho de ambos.

Suponha que um cientista O' , que se move com velocidade u_x em relação ao aparato, observe o mesmo fenômeno. A Fig. 1.10 traz um esquema da situação [Krane, 1983].

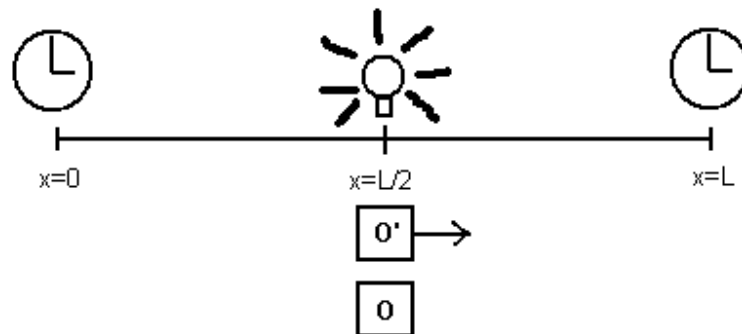


Figura 1.10

Do ponto de vista de O , temos:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0 \\
 x_2 &= L \\
 t_1 &= t_2 = \frac{L}{2c}
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

sendo x_1 a posição do primeiro relógio, x_2 a posição do segundo, t_1 o instante de tempo em que o raio atinge o primeiro relógio e t_2 o instante em que o raio atinge o segundo. O instante $t = 0$ é o momento em que a luz deixa a fonte.

Para que conheçamos o ponto de vista de \mathbf{O}' , aplicaremos a transformação de Lorentz:

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{u \cdot x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L}{2c} - \frac{u \cdot 0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{L}{2c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1.28)$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{u \cdot x_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L}{2c} - \frac{uL}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1.29)$$

Tais equações nos conduzem a:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \frac{\frac{uL}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \neq 0 \quad (1.30)$$

Isso nos mostra que os dois eventos não serão simultâneos do ponto de vista de \mathbf{O}' . De fato, $t'_2 < t'_1$, o que indica que o relógio 2 começará a funcionar mais cedo desse ponto de vista, não havendo, portanto, sincronismo. A negação da simultaneidade absoluta provoca também uma importante mudança de paradigma em relação à Física Clássica.

Podemos atribuir a validade de (1.30) ao termo espacial presente na transformação t' (1.25), o que indica que a relatividade da simultaneidade se liga intimamente à concepção de espaço-tempo. Convém frisar que dois eventos com a mesma posição são sempre simultâneos do ponto de vista de todos referenciais.

Para concluir a seção, apresentamos um trecho do livro “O Valor da Ciência”, de Henri Poincaré [Poincaré, 1995], que belamente antecipou concepções relativísticas sobre o tempo:

“Não temos intuição direta da simultaneidade, nem a da igualdade entre duas durações. Se cremos ter esta intuição, é uma ilusão.”

1.9 – O Paradoxo dos Gêmeos

Um dos mais célebres experimentos imaginários da Física Moderna é o *paradoxo dos gêmeos*. Convém que analisemos brevemente tal construção mental.

Dois gêmeos, João e Joana, estão sobre a Terra. João resolve partir, num foguete, para uma viagem. Ao chegar, viajando com uma velocidade próxima à da luz, a um ponto distante do espaço, ele resolve voltar. Retorna, então, a nosso planeta. Ao chegar, percebe com grande surpresa que sua irmã já é avó, enquanto ele ainda é um adolescente.

De fato, à primeira vista isso não nos causa surpresa, pois vimos que a passagem do tempo é relativa. Porém, conforme a relatividade indica, não há referenciais inerciais privilegiados, o que leva à contradição: como um dos irmãos é mais velho? Ora, se João está em movimento com relação a Joana, Joana também está em movimento com respeito a João. Conseqüentemente, ambos deveriam “ter o direito” de se considerarem mais jovens e mais velhos: surge um paradoxo.

A chave para eliminar tal impasse é atentar para o fato de que apenas um dos gêmeos (João) sofre aceleração (para retornar), o que torna seu referencial “diferenciado”. Isso gera uma assimetria que, de certa maneira, soluciona o paradoxo. Um experimento baseado no transporte de relógios de altíssima precisão (que fazem o papel dos gêmeos) em aviões levou a resultados favoráveis a essa interpretação (e, portanto, à relatividade) [Halliday e Resnick, 1994].

1.11 - Dinâmica Relativística: Massa e Momento Linear

Até agora, vínhamos estudando as conseqüências dos dois postulados que se relacionam mais diretamente à cinemática. Entretanto, como veremos, a proposta relativística conduz também a mudanças profundas na concepção da dinâmica.

Dentre os vários princípios físicos existentes, as leis de conservação ocupam um lugar de destaque. É difícil imaginar um mundo no qual energia ou massa seja criada arbitrariamente, ou em que o momento linear de um conjunto de partículas seja modificado num sistema fechado. Considera-se, portanto, de grande interesse analisar tais princípios à luz da relatividade.

Uma primeira “cobaia” pode ser a lei da conservação do momento linear. Essa lei, em termos simples, afirma que o momento linear total de um sistema no qual não há influência de forças externas se conserva. Do ponto de vista do princípio da relatividade, dado que essa lei se aplica a um sistema qualquer, é fundamental que ela continue sendo válida para todos os observadores em movimento uniforme relativamente ao sistema em questão. A mecânica clássica relaciona observadores em movimento uniforme através da transformação de Galileu, e propõe a seguinte expressão para o momento linear \mathbf{p} de uma partícula:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1.31)$$

sendo \mathbf{v} a velocidade da partícula em um referencial \mathbf{O} .

Pode-se verificar que a expressão (1.31) conduz à esperada conclusão de que, caso a conservação do momento valha para um observador \mathbf{O} qualquer, ela valerá para todos demais observadores em movimento uniforme em relação a \mathbf{O} , desde que a relação entre observadores seja a expressa pela transformação de Galileu. Em outras palavras, isso

significa que o princípio clássico da relatividade é válido para o “pacote” equação (1.31)/transformação de Galileu.

No entanto, sabemos que, do ponto de vista da relatividade, a transformação de Galileu não é adequada: é a transformação de Lorentz que define a relação entre observadores distintos de uma maneira coerente com os postulados fundamentais. Porém, será que essa transformação forma, em conjunto com a equação (1.31), um “pacote coerente” com o princípio da relatividade de Einstein? A equação (1.31), tão intimamente ligada ao cenário clássico, mantém sua solidez no contexto relativístico? Passemos à investigação.

Seja a seguinte colisão, que é vista por um observador **O** da maneira exibida na Fig. 1.11. Duas partículas, marcadas antes da colisão com os rótulos 1 e 2, chocam-se e permanecem juntas em repouso. Suas massas são todas iguais a m [Krane, 1983].

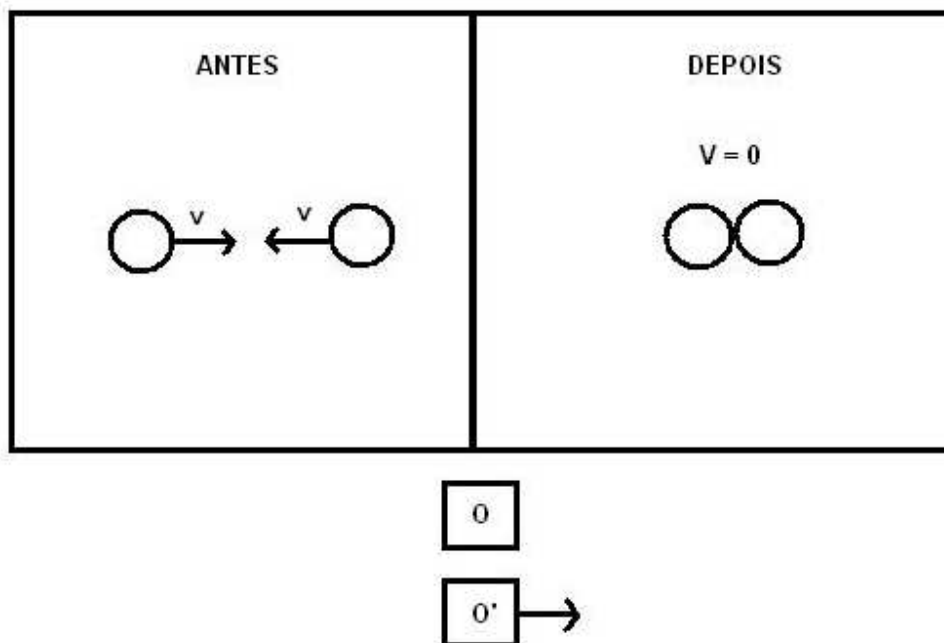


Figura 1.11

Passemos a uma análise “clássica” desta colisão. Vejamos, em primeiro lugar, o ponto de vista de **O**. Calculemos o momento linear total antes da colisão:

$$\mathbf{p}_{\text{antes}} = (mv - mv) \cdot \mathbf{a}_x = 0 \cdot \mathbf{a}_x \quad (1.32)$$

Agora, o momento linear total depois da colisão:

$$\mathbf{p}_{\text{depois}} = (2m)0\mathbf{a}_x = 0 \cdot \mathbf{a}_x \quad (1.33)$$

Com isso, concluímos que o momento foi conservado, o que, aliás, não chega a surpreender. Tentemos agora analisar como um observador **O'**, com velocidade \mathbf{u} (na

direção x) em relação a O , vê o fenômeno. Para que possamos obter as velocidades no novo referencial, utilizaremos a transformação de Galileu, expressa na equação (1.3).

$$\mathbf{p}'_{\text{antes}} = [m(v-u) + m(-v-u)]\mathbf{a}_x = (-2mu)\mathbf{a}_x \quad (1.34)$$

Calculemos o momento após a colisão:

$$\mathbf{p}'_{\text{depois}} = (2m)(0-u)\mathbf{a}_x = (-2mu)\mathbf{a}_x \quad (1.35)$$

Vemos que o momento, mais uma vez, conservou-se.

Não nos esqueçamos, entretanto, que nosso objetivo é buscar um ponto de vista relativístico, o que nos proíbe o uso da lei clássica de adição de velocidades. Isso significa que é preciso transformar as velocidades através das equações de Lorentz. Vejamos qual será o ponto de vista de O' :

$$\mathbf{p}'_{\text{antes}} = \left[m \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}} + m \frac{-v-u}{1+\frac{vu}{c^2}} \right] \mathbf{a}_x \quad (1.36)$$

$$\mathbf{p}'_{\text{depois}} = \left[2m \frac{0-v}{1-\frac{0v}{c^2}} \right] \mathbf{a}_x = -2m\mathbf{v}\mathbf{a}_x \quad (1.37)$$

Percebemos que o momento linear não se conserva. A conclusão é que a expressão clássica do momento é incapaz de engendrar um cenário em que a lei de conservação seja válida para todos os referenciais inerciais. Para que nos mantenhamos fiéis às idéias mais essenciais do programa relativístico, faz-se necessário buscar uma nova definição para o momento linear.

O que seria razoável esperar, num primeiro momento, da expressão que buscamos? Para velocidades muito menores que a da luz, é razoável alimentar a expectativa de que a fórmula relativística forneça valores próximos aos obtidos através de sua contraparte clássica. Em particular, é lícito imaginar que, para uma velocidade nula, o momento linear seja também nulo.

A expressão capaz de atender a esses requisitos básicos e, além disso, conservar o momento linear sob a égide da transformação de Lorentz, é:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.38)$$

sendo m_0 a massa da partícula medida por um observador em repouso relativamente a ela e \mathbf{v} a velocidade da partícula do ponto de vista deste mesmo observador. Tal expressão é comumente reescrita como:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \text{ com } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.39)$$

sendo m entendida como uma *massa relativística* que aumenta com a velocidade v .

Recomendamos, desde já, muito cuidado com essa nova interpretação do conceito de massa. No caso, ela nos oferece uma ponte entre o “novo mundo” e a expressão clássica do momento. Não obstante, se fôssemos aplicá-la sem maiores considerações, por exemplo, à lei de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, chegaríamos a um resultado incoerente. O mesmo ocorreria se a usássemos na fórmula clássica da energia cinética. Entretanto, uma vez que esteja o leitor ciente dessas armadilhas, torna-se altamente desejável que reflita sobre a relatividade de uma grandeza tão fundamental.

Havendo, pois, definido o momento linear no contexto da nova dinâmica, estamos prontos para a conquista de novas fronteiras. Podemos, por exemplo, indagar: qual é a expressão relativística da força? Embora estejamos acostumados a pensar na fórmula $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, a expressão “mais geral” é

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt, \quad (1.40)$$

ou seja, a força é a variação temporal do momento linear. Tal expressão continua válida no contexto relativístico, desde que usemos a expressão (1.38), que não levará a $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

1.12 – Dinâmica Relativística: Energia Cinética

Definidos momento e força, tratemos de considerar a noção de energia cinética. Suponhamos que uma partícula seja acelerada, na direção x , a partir do repouso, até uma velocidade v . Podemos, como na física clássica, fazer uso do fato de que o trabalho realizado pela força é igual à variação da energia cinética da partícula, ou seja:

$$\tau = \Delta E_c = E_{c\text{final}} - E_{c\text{inicial}} \quad (1.41)$$

sendo τ o trabalho e E_c a energia cinética. No contexto por nós delimitado, a definição clássica do trabalho fornece:

$$\tau = \int_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} F \cdot dx \quad (1.42)$$

Podemos escrever, partir de (1.40), que:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (1.43)$$

sendo p definido como em (1.38). Dispensamos as notações vetoriais por estarmos lidando apenas com a direção x .

Substituindo (1.43) em (1.42), obtemos:

$$\tau = \int_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} F \cdot dx = \int_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} \frac{dp}{dt} \cdot dx = \int_{v_{\text{inicial}}}^{v_{\text{final}}} v \cdot dp \quad (1.44)$$

Utilizemos a fórmula da integração por partes

$$\int v \cdot dp = vp - \int p \cdot dv \quad (1.45)$$

em conjunto com (1.45), e tenhamos em mente que $v_{\text{inicial}} = 0$:

$$\tau = \frac{m_0 \cdot v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int_b^v \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot dv \quad (1.46)$$

Para que resolvamos a integral, é vantajoso fazer a substituição:

$$u = v^2/c^2 \rightarrow du = (2v/c^2) \cdot dv \quad (1.47)$$

Ela então se torna:

$$\int_b^{v^2/c^2} \frac{m_0 \cdot c^2 \cdot du}{2 \cdot \sqrt{1-u}} = m_0 \cdot c^2 \left[-\sqrt{1-u} \right]_0^{v^2/c^2} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] \quad (1.48)$$

Voltando a (1.46), obtemos, após algumas manipulações:

$$\tau = E_{\text{cfinal}} - E_{\text{cinicial}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (1.49)$$

Como supusemos que a partícula foi acelerada a partir do repouso, temos $E_{\text{cinicial}} = 0$, o que, por fim, leva-nos a:

$$E_c = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 \cdot c^2 (\gamma - 1) \quad (1.50)$$

que é a fórmula da energia cinética relativística.

1.13 - Relação entre Massa e Energia

Poderíamos reescrever (1.50) como:

$$E_c = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = E - E_0 \quad (1.51)$$

Manipulando (1.51), chegamos a:

$$E = E_c + E_0 \quad (1.52)$$

Podemos interpretar (1.52) como uma manifestação de que a *energia total* de uma partícula, $E = \gamma m_0 c^2$, é a soma da energia cinética, associada ao movimento, e de uma energia de repouso E_0 . Esta energia é dada por:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (1.53)$$

sendo, como já dissemos, m_0 a massa de repouso da partícula.

É pertinente que façamos uma breve reflexão. O raciocínio que acabamos de expor, cujo ponto de partida foi a obtenção de uma fórmula para o momento linear coerente com a idéia de conservação e com a transformação de Lorentz, conduziu-nos a resultados intrigantes. A equação (1.53), por exemplo, mostra, com sua simplicidade desconcertante, que a massa de repouso de uma partícula é também uma forma de energia. Sustenta, inversamente, que qualquer quantidade de energia tem a si associada uma quantidade equivalente de massa. Massa e energia, para a relatividade, são, por assim dizer, faces da mesma moeda. A expressão para a energia total, $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$, simplesmente reafirma o que foi dito, com a ressalva de que nela a massa envolvida é a relativística, maior que a de repouso graças à energia cinética. Com isso, percebemos que essa modalidade de energia se liga intimamente à dilatação da massa, que discutimos quando abordamos o momento linear.

A comprovação do intercâmbio massa-energia foi, desde a primeira hora, um assunto de grande interesse. Einstein, em seu artigo de 1906, "A inércia de um corpo depende de seu conteúdo energético?", sugeriu que as energias liberadas por reações envolvendo sais de rádio talvez pudessem permitir uma verificação adequada de (1.53). Na verdade, comprovações mais sólidas (e trágicas) vieram com o avanço do estudo das reações nucleares, as quais liberam energias suficientemente grandes para levar a uma variação sensível da massa dos reagentes. Experimentos dessa natureza são amplamente favoráveis à relatividade.

Um outro aspecto dinâmico muito relevante diz respeito à energia cinética. Vejamos, para uma massa de repouso de 1kg., como a mesma varia de acordo com o fator v/c (velocidade da partícula em relação à da luz).

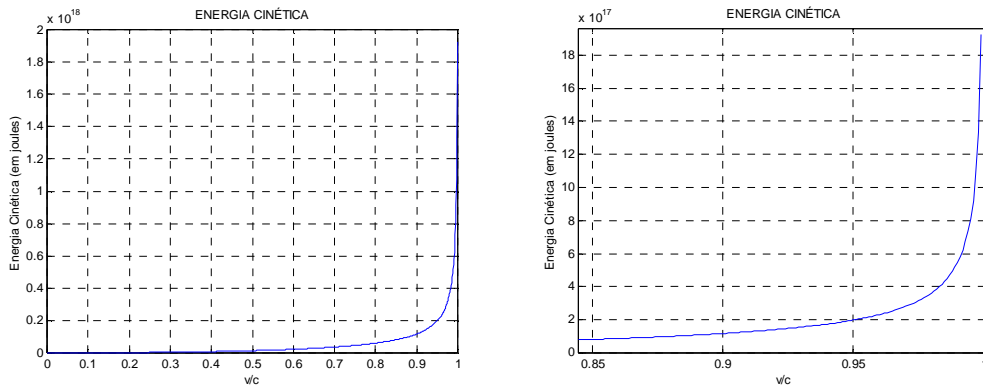


Figura 1.12

Conforme nos mostram o primeiro gráfico e sua ampliação, representados na Fig. 1.12, a energia cinética da partícula tende a aumentar de forma cada vez mais pronunciada à medida que v tende a c . Além disso, para acelerar a partícula até a velocidade da luz, seria preciso um trabalho infinito, ou seja, nada que possua massa de repouso não-nula pode atingir a velocidade da luz.

Uma outra forma de internalizar esses conceitos é sugerida pela análise da expressão para a força relativística, dp/dt :

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right] \cdot a = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \cdot a \quad (1.54)$$

Imaginemos que seja aplicada a uma partícula em repouso, com $m_0 = 1\text{kg}$, uma força de 1N . Sua aceleração seria, do ponto de vista da física clássica, constante e igual a 1m/s^2 . No entanto, uma aceleração constante permitiria que, por exemplo, $6 \cdot 10^8$ segundos depois do experimento, a partícula se movesse com o dobro da velocidade da luz, o que, como acabamos de ver, é inadmissível na teoria da relatividade. Como (1.54) já adianta, a aceleração de uma partícula, para uma força constante, depende de sua velocidade. Na Fig. 1.13, mostramos qual será a aceleração da partícula sob influência de uma força de 1N , em função da relação v/c , para a relatividade e para a física clássica.

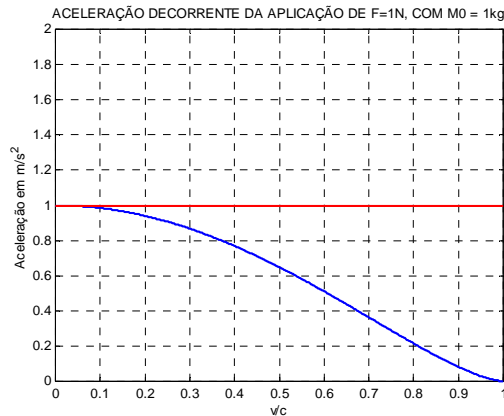


Figura 1.13

Notamos que, quanto maior a velocidade da partícula, menos consegue a força de 1N prosseguir com o aumento de velocidade, ao contrário do que ocorria no caso clássico. Quando a velocidade tende à da luz, a aceleração tende a zero, o que condiz com as conclusões por nós obtidas a partir do estudo da energia cinética. Essa visível diminuição nos remete, mais uma vez, à idéia de aumento da massa, da “inércia” da partícula, com o aumento da velocidade.

Vale a pena ainda exibir um conjunto de fórmulas que relacionam diretamente o momento e a energia do ponto de vista de um observador **O** com as mesmas grandezas do ponto de vista de um observador **O'**, que, como de costume, move-se com velocidade u (na direção x) em relação a **O**:

$$\begin{aligned}
 p'_x &= \frac{p_x - \frac{u \cdot E}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\
 p'_y &= p_y \\
 p'_z &= p_z \\
 E' &= \frac{E - p_x \cdot u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

sendo $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ e $\mathbf{p}' = (p'_x, p'_y, p'_z)$ respectivamente os momentos para **O** e **O'**, e E e E' a energia total para estes observadores. Foi Max Planck quem primeiro explicitou essas relações, num dos primeiros artigos “relativísticos” influenciados, mas não escritos, por Einstein [Pais, 1995]. Seria justo citar que Planck e Max von Laue estiveram entre os primeiros cientistas a procurar o jovem Einstein para manifestar interesse em seu trabalho sobre a relatividade. Einstein, mais tarde, manifestaria a Planck sua gratidão nestes termos: “O senhor foi o primeiro a defender a teoria da relatividade” [Pais, 1995].

Voltemo-nos para um outro aspecto importante. Sabemos que, na mecânica clássica, a lei da conservação do momento e a lei da conservação da energia são princípios distintos.

Na relatividade, como, aliás, pode-se deduzir de (1.55), as duas leis estão intimamente unidas. Em termos mais precisos, elas se tornam aspectos de um único princípio de conservação. Assim, por exemplo, para que o momento linear se conserve do ponto de vista de todos os possíveis observadores inerciais, é preciso que a energia total também se conserve, e vice-versa [Symon, 1982]¹. Também é muito importante atentar para o fato de que as leis de conservação da massa e da energia se fundem numa única lei. Não faz mais sentido buscar isoladamente a conservação dessas grandezas.

A dinâmica relativística, como era esperado, fornece resultados muito próximos aos clássicos para velocidades muito menores que a da luz. Em outras palavras, a Física Clássica continua “válida” para uma determinada gama de aplicações.

Por fim, vale a pena mencionar que experimentos realizados com partículas dotadas de altas velocidades têm dado origem a resultados notavelmente próximos aos previstos pelas expressões apresentadas. Particularmente, já se conseguiu acelerar elétrons até velocidades muito próximas à da luz, sem que, no entanto, tenha sido possível ultrapassá-la. Para a relatividade, nas palavras do escritor Isaac Asimov, a velocidade da luz é o “limite de velocidade definitivo”, muito distante dos habituais 80 km/h [Halliday e Resnick, 1994].

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 1

A. Einstein e outros, *The Principle of Relativity* (coletânea de artigos originais sobre relatividade), Dover, 1924.

R. Eisberg, *Fundamentals of Modern Physics*, Wiley, 1961.

D. Halliday, R. Resnick, *Fundamentos da Física*, LTC, 1994.

K. Krane, *Modern Physics*, Wiley, 1983.

H. Ohanian, *Modern Physics*, Prentice Hall, Second Edition, 1995.

A. Pais, *Sutil é o Senhor: a Ciência e a Vida de Albert Einstein*, Nova Fronteira, 1995.

H. Poincaré, *O Valor da Ciência*, Contraponto, 1995.

R. Serway, *Physics for Scientists and Engineers*, Saunders College Publishing, Third Edition, 1990.

M. Simonsen, *Ensaio Analítico*, Fundação Getúlio Vargas, 1994.

K. Symon, *Mecânica*, Editora Campus, Sexta Edição, 1982.

¹ No exemplo de colisão apresentado anteriormente, é fundamental que se aplique a lei da conservação da energia total relativística para que se obtenha a massa de repouso do conjunto formado pelas duas partículas após a colisão (note que a energia cinética do par não pode simplesmente “desaparecer”).

Capítulo 2 – Teoria Quântica da Radiação

Sem dúvida, a Teoria Quântica é uma construção científica de notável originalidade e solidez experimental. Além de ter sido um dos pilares da física do século XX, essa teoria também levou a importantes mudanças de paradigma em domínios como o da filosofia da ciência. O alcance das idéias suscitadas pelo ramo então emergente pode ser intuído se não nos esquecermos de que seus fundamentos foram perscrutados por figuras da estatura de Einstein, Bohr, Schrödinger e outros. Parte desse debate, aliás, será objeto de discussão no capítulo 4.

Embora o domínio de aplicação da teoria quântica seja vasto, sua origem nos remete a um esforço muito específico: um trabalho de Planck dedicado à elucidação de aspectos fundamentais da emissão de radiação térmica. Convém, portanto, que iniciemos nosso estudo por essas idéias pioneiras.

O objetivo deste capítulo é situar historicamente as investigações acerca da chamada “radiação de um corpo negro”. Após definir os limites do problema, partiremos do cenário delineado por Kirchhoff e visitaremos algumas hipóteses que culminam na lei de Planck, cuja concordância com a experimentação é excelente.

2.1 – Corpo Negro e Radiação de Cavidade

A superfície de todo corpo que se encontra em uma temperatura maior que $T = 0K$ emite energia na forma de radiação térmica, a qual possui natureza eletromagnética. Para que possamos bem caracterizar tal fenômeno, precisamos obter respostas a questões fundamentais: qual será o conteúdo espectral desta radiação, ou seja, que frequências estarão presentes e em que “proporção”? Como a temperatura do corpo influirá no espectro emitido? Há alguma lei que relacione as grandezas pertinentes? Pensemos em nossas próprias experiências com a radiação térmica. Sabemos que o nosso corpo, que usualmente se encontra a uma temperatura de cerca de 310K, emite calor. Apesar disso, não conseguimos ver um corpo humano numa sala escura, o que significa que a maioria da radiação emitida, em tais condições, deve ter comprimentos de onda distintos daqueles capazes de excitar nosso aparelho visual². Uma barra de ferro aquecida, por sua vez, torna-se incandescente, o que indica que o aumento de sua temperatura provoca, de alguma maneira, um deslocamento do espectro para regiões mais próximas da faixa visível. Isso nos leva a intuir que o aumento da temperatura deve fazer com que se eleve o conteúdo espectral em altas frequências.

A radiação térmica que emerge de um corpo é gerada pelo movimento aleatório dos átomos que o constituem. Antes que a radiação atinja a superfície, ela é absorvida e emitida diversas vezes, o que tende a levá-la a um estado de equilíbrio térmico com os átomos. Esse processo complexo, aliás, termina por dar um aspecto contínuo ao espectro de emissão.

A emissão dessa radiação, como era de se esperar, está ligada às propriedades da superfície do corpo, que pode, em tese, bloquear parcialmente as ondas eletromagnéticas presentes em seu interior [Ohanian, 1995]. De certa maneira, há uma relação estreita entre a

² Equipamentos de visão noturna são construídos para captar esses comprimentos de onda predominantes, os quais pertencem à região espectral do infravermelho.

característica de emissão de um corpo e seu potencial de absorção, o que pode ser atestado por princípios fundamentais da termodinâmica. Num caso extremo, poderíamos conceber um corpo dotado de uma perfeita capacidade de absorção, ou seja, um sorvedouro ideal de toda a radiação incidente. Esse ente ideal recebe, graças a essa característica, o nome de *corpo negro*.

Do ponto de vista teórico, está perfeitamente determinado o que é um corpo negro, mas, na prática, não é simples imaginar a que pode corresponder um construto dessa natureza. Uma possibilidade, já aventada por Kirchhoff no âmbito dos esforços descritos na próxima seção, tornou-se um padrão: uma cavidade com algumas características peculiares. Normalmente, usa-se para emular um corpo negro uma caixa metálica com paredes à mesma temperatura e com um pequeno orifício. É lícito supor que um raio que adentre a caixa pelo orifício sofrerá sucessivas reflexões nas paredes, e, muito provavelmente, será absorvido. Ora, isso quer dizer que a caixa terá uma característica ideal de absorção, que é exatamente o que esperamos de um corpo negro! A Fig. 2.1 ilustra essa idéia.

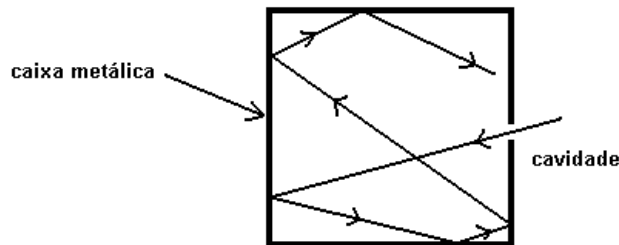


Figura 2.1

Como as características de interesse dessa caixa devem ser muito próximas das previstas para um corpo negro, não se espante o leitor ao se deparar com a expressão “*radiação de cavidade*”.

2.2 – O Teorema de Kirchoff

Num trabalho clássico, publicado em 1859, Gustav Kirchoff lançou a fundação do estudo da radiação térmica. Ele mostrou, a partir de bases puramente termodinâmicas, que um corpo capaz de absorver toda a radiação nele incidente (ou seja, um corpo negro) teria uma característica de emissão que seria função apenas de sua temperatura e da frequência de interesse. Em outras palavras, as propriedades de tal emissor não guardariam qualquer relação com fatores como formato, material constituinte etc., o que, sem dúvida, conduziria a busca a um domínio muito mais tratável e produtivo do ponto de vista físico.

Para que possamos expressar a importante contribuição de Kirchoff em termos mais rigorosos, denominemos $E_f df$ a quantidade de energia emitida pelo corpo negro, por unidade de área e por unidade de tempo, no intervalo delimitado pelas frequências f e $f+df$. Podemos entender a função E_f , que denominaremos *emitância espectral*, como uma espécie de densidade de potência emitida para uma dada frequência. O teorema de Kirchoff afirma que tal função pode ser escrita da seguinte forma:

$$E_f = E_f(f,T) \quad (2.1)$$

onde f é a frequência da radiação e T é a temperatura do corpo negro. Trazer a dependência para bases tão simples já é uma contribuição estupenda, mas Kirchoff foi ainda mais longe e, como já antecipamos, sugeriu o uso de um “forno” a temperatura uniforme dotado de uma cavidade como êmulo de um corpo negro [Born, 1986]. Por fim, o eminente físico conclamou seus pares à busca dessa função [Pais, 1995], cuja enorme importância advém, num certo sentido, da marcante simplicidade da relação expressa em (2.1). Kirchoff não poderia fazer idéia da extensão da influência que seu apelo teria sobre o futuro da ciência.

2.3 – A Lei de Stefan-Boltzmann

Em 1879, Josef Stefan propôs que a “energia total” emitida por um corpo seria proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta (em kelvin). Ludwig Boltzmann, em 1884, mostrou que a lei proposta por Stefan é válida, com tal grau de generalidade, apenas para corpos negros [Pais, 1995]. Com isso, chegamos à lei de Stefan-Boltzmann, que representaremos da seguinte forma:

$$E_{\text{total}} = \sigma T^4 \quad (2.2)$$

sendo $\sigma = 5.6703 \cdot 10^{-8}$ watt/(m².K⁴). À luz da função $E_f(f,T)$, por nós definida na seção anterior, podemos detalhar a equação (2.2):

$$E_{\text{total}} = \int_0^{\infty} E_f(f, T).df = \sigma T^4 \quad (2.3)$$

Ainda não se conhecia a forma de E_f , mas já era possível, graças a uma engenhosa argumentação baseada na termodinâmica e no eletromagnetismo, ter conhecimento de uma importante propriedade de tal função.

2.4 – A Lei do Deslocamento de Wien

É hora de travarmos contato com mais um dos protagonistas desta busca: Wilhelm Wien. Em 1893, ele propôs a célebre *lei do deslocamento*:

$$E_f(f,T) = f^3 \cdot F(f/T) \quad (2.4)$$

cuja dedução se baseou em considerações extraídas da termodinâmica e do eletromagnetismo. Trata-se de uma lei de grande alcance teórico, mais restritiva que o resultado de Stefan e Boltzmann: a função que desejamos encontrar deve ser constituída pelo produto entre um termo cúbico e uma função da razão entre f e T . De fato, todas as leis que veremos a seguir obedecem, sem escapatória, à lei do deslocamento.

Usualmente, o trabalho experimental não se dirige à busca de $E_f(f, T)$, mas sim de $E_\lambda(\lambda,T)$, que, como podemos de imediato perceber, deve ter íntima relação com a emitância em frequência. Sabia-se, desde os primeiros experimentos envolvendo a radiação de cavidade, que a função E_λ tinha um máximo pronunciado em um comprimento de onda λ_{max} . Sabia-se ainda que o valor de λ_{max} diminuía com a temperatura. A lei proposta por Wien recebe este nome justamente por indicar como se dá este deslocamento. Para analisar

a emitância em termos de comprimentos de onda, temos de nos lembrar que a função E_f indica uma densidade de energia para o intervalo df . Por analogia, devemos fazer:

$$E_f(f,T).df = E_\lambda(\lambda,T).d\lambda \quad (2.5)$$

Como $\lambda = c/f$, temos:

$$df = (-c/\lambda^2).d\lambda \quad (2.6)$$

O sinal negativo indica que o aumento do comprimento de onda significa uma diminuição em frequência e vice-versa. Temos, portanto,

$$E_\lambda(\lambda,T) = (-c/\lambda^2). E_f(f,T) \quad (2.7)$$

A lei do deslocamento pode então ser escrita como:

$$E_\lambda(\lambda,T) = (c^4/\lambda^5).F(c/\lambda T) \quad (2.8)$$

O sinal negativo pôde ser desprezado, pois consideramos uma variação $d\lambda$ positiva. Para que obtenhamos o comprimento de onda para o qual há máxima emissão, precisamos derivar E_λ com respeito a λ e igualar o resultado a zero:

$$\frac{c^4}{\lambda^5} \left\{ \frac{-5}{\lambda} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) - \frac{c}{\lambda^2 T} F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \right\} = 0 \quad (2.9)$$

Percebemos que o máximo, caso exista, obedecerá à restrição [Born, 1986]

$$\lambda_{\max}.T = \text{constante}_1 \quad (2.10)$$

Esta é a forma pelo qual λ_{\max} se desloca: de maneira inversamente proporcional à temperatura do corpo. A constante acima vale $2.898.10^{-3}$ m.K. A expressão (2.10) pode ser escrita em frequência como sendo³:

$$f_{\max} = \text{constante}_2 .T \quad (2.10b)$$

sendo a constante igual a $5.880.10^{10}$ Hz/K.

Note que $\lambda_{\max} \cdot f_{\max} \neq c$. A razão para isto é que a relação entre E_f e E_λ não é “trivial”, pois o comprimento de onda é inversamente proporcional à frequência, e, por serem as funções densidades, sua forma depende do intervalo da variável de interesse (f ou λ), definido segundo (2.6).

³ Como exercício, busque o leitor deduzir de (2.4) a relação em frequência.

Podemos ainda provar que a lei do deslocamento de Wien tem, como caso particular, a lei de Stefan-Boltzmann. Para tanto, voltemos à forma da equação (2.4). Realizemos a integral para todas as frequências, como em (2.3):

$$E_{\text{total}} = \int_0^{\infty} E_f(f, T).df = \int_0^{\infty} f^3.F(f/T).df = T^4 \int_0^{\infty} x^3.F(x).dx = T^4.\sigma \quad (2.11)$$

que é justamente a forma expressa em (2.2). A mudança de variável efetuada foi $x = f/T$.

2.5 – A Lei de Wien

Desde o desafio inicial de Kirchoff, surgiram diversas expressões para E_f . A maioria delas foi “esquecida” com o passar dos anos, mas houve uma que marcou época, e foi considerada, por algum tempo, a resposta definitiva ao problema. Trata-se da lei da radiação de Wien, o mesmo cientista que propôs a lei do deslocamento⁴. Sua expressão, publicada em 1896, tem a seguinte forma:

$$E_f(f, T) = \alpha f^3.\exp(-\beta f / T) \quad (2.12)$$

sendo α e β parâmetros livres.

Trata-se de uma função que une um termo cúbico a um fator exponencial de maneira consistente com a lei do deslocamento. O produto das duas parcelas gera um perfil dotado de um máximo pronunciado, o que, tendo em vista os resultados experimentais de então, era esperado. A Fig. 2.2 traz um gráfico da função (2.12), com as melhores constantes, para algumas temperaturas.

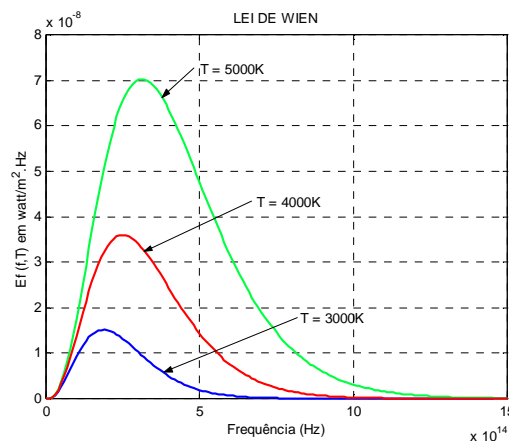


Figura 2.2

Friedrich Paschen testou a expressão proposta por Wien no domínio o infravermelho próximo (de $\lambda = 1\mu\text{m}$ a $8\mu\text{m}$), onde obteve uma boa concordância com os dados obtidos. Paschen chegou a afirmar: “Parece muito difícil encontrar uma outra função

⁴ Wien receberia, em 1911, o prêmio Nobel de Física “por suas descobertas envolvendo as leis que governam a radiação de calor”.

que represente os dados com tão poucas constantes” [Pais, 1995]. Tal veredicto imperou por alguns anos, durante os quais parecia ser a equação (2.12) a resposta para a indagação de Kirchoff. No entanto, o avanço das possibilidades experimentais permitiu que houvesse estudos na faixa do infravermelho longínquo, domínio em que a lei de Wien, como veremos, não seria capaz de se sustentar.

2.6 – A Lei de Rayleigh-Einstein-Jeans

Até que ponto a Física Clássica pode nos levar na análise do problema da radiação do corpo negro? O que ela tem a nos dizer? Podemos, a partir de seu arcabouço teórico, encontrar a resposta definitiva para a indagação de Kirchoff? Os trabalhos de Lord Rayleigh, Albert Einstein e James Jeans forneceram uma perturbadora resposta a essas questões.

Voltemos a nossa caixa metálica dotada de uma cavidade. Supõe-se que a radiação térmica na cavidade seja composta por ondas estacionárias, cada uma correspondente a um “modo de vibração” [Ohanian, 1995]. Cada modo, por sua vez, pode ser associado à idéia de um oscilador harmônico. Através de um raciocínio baseado principalmente no eletromagnetismo, chega-se a uma equação que relaciona a energia média dos osciladores à função E_f procurada:

$$E_f(f, T) = \frac{2\pi f^2}{c^2} \epsilon_{\text{med}} \quad (2.13)$$

onde ϵ_{med} é a energia média a que nos referimos.

O passo final é determinar o valor dessa energia média, o que, como logo veremos, é a escolha fundamental. Na abordagem clássica, faz-se uso do *teorema da equipartição*, um sólido resultado da Física Estatística que produz a seguinte fórmula para a energia média:

$$\epsilon_{\text{med}} = kT \quad (2.14)$$

sendo k a constante de Boltzmann, que vale $1,3807 \cdot 10^{-23}$ J/K. Se desejarmos verificar de maneira um pouco mais detalhada como se chega a (2.14), precisaremos recorrer a um resultado muito elegante, o teorema de Boltzmann. Segundo esse teorema, a ocorrência de um oscilador com energia ϵ se daria com probabilidade relativa $\exp(-\epsilon/kT)$. Portanto,

$$p(\epsilon) = \frac{\exp(-\epsilon/kT)}{\int_0^{\infty} \exp(-\epsilon/kT) \cdot d\epsilon} \quad (2.15)$$

sendo a integral do denominador necessária para fazer com que a integral de $p(\epsilon)$ de zero a infinito seja igual a um, como requer uma função de densidade de probabilidade. Empregando a definição de média de uma variável aleatória qualquer,

$$x_{\text{med}} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx \quad (2.15)$$

chegamos à expressão:

$$\varepsilon_{\text{med}} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon \cdot \exp(-\varepsilon/kT) \cdot d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \exp(-\varepsilon/kT) \cdot d\varepsilon} = kT \quad (2.17)$$

De posse desse valor, podemos voltar a (2.13) e obter a fórmula desejada:

$$E_f(f, T) = \frac{2\pi f^2}{c^2} kT \quad (2.18)$$

que é a *lei de Rayleigh-Einstein-Jeans*. Essa lei, como afirmamos, representa, de certa maneira, o limite ao qual se pode chegar através dos caminhos da Física Clássica. Na Fig. 2.3, mostramos as curvas previstas por (2.18) para algumas temperaturas.

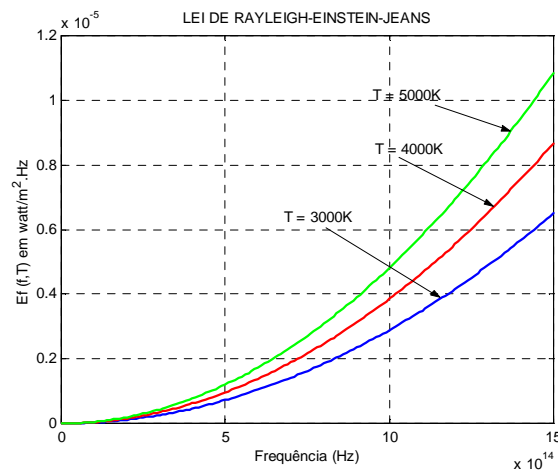


Figura 2.3

Convém expor um pouco da história dessa fórmula, narrada em [Pais, 1995]. Lord Rayleigh sugeriu, em 1900, que se aplicasse a idéia de equipartição, que delineamos acima, ao problema da radiação de cavidade. A partir dessa noção crucial, ele obteve uma expressão do tipo:

$$E_f(f, T) = c_1 \cdot f^2 \cdot T \quad (2.19)$$

sem, no entanto, calcular c_1 . Podemos perceber que esta equação tem (2.18) como um caso particular. Ele também já percebe que esta lei devia ser encarada como um caso-limite para baixas frequências. O motivo para isso é o seguinte: como podemos notar, (2.18) e (2.19) levam a valores de E_f que aumentam explosivamente com o aumento de f . Trata-se de um comportamento totalmente incoerente com a experiência, razão pela qual se dá a ele o sugestivo nome de *catástrofe ultravioleta* (vide Fig. 2.3). Para solucionar, *ad hoc*, tal problema, Rayleigh sugeriu a introdução de um fator de corte exponencial, o que gerou uma lei do tipo:

$$E_f(f,T) = c_1 \cdot f^2 \cdot T \cdot \exp(-c_2 \cdot f / T) \quad (2.20)$$

que ficou conhecida como *lei de Rayleigh*.

Em 1905, Einstein chegou à equação (2.18) ao comentar o resultado de Planck (que veremos na próxima seção). No mesmo ano, Rayleigh enviou uma carta à revista Nature, na qual calculou a constante c_1 e obteve um valor distinto do correto por um fator de 8. Em 1905, James Hopwood Jeans corrigiu o erro de Rayleigh e chegou à expressão final. Devido a essa cronologia, percebemos a razão pelo qual a equação (2.18), usualmente denominada *lei de Rayleigh-Jeans*, poderia, conforme sugere Abraham Pais, receber o nome de lei de Rayleigh-Einstein-Jeans.

Apesar de coerente com o espírito das mais sólidas formulações teóricas da época, saiba-se de antemão que a lei era bastante problemática. A primeira dificuldade, é a já mencionada catástrofe ultravioleta ($E_f \rightarrow \infty$ se $f \rightarrow \infty$). Um outro “calcanhar de Aquiles” é que:

$$E_{\text{total}} = \int_0^{\infty} E_f(f, T) df = C \cdot \int_0^{\infty} f^2 df \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

sendo C um valor independente de f . Tal resultado está, literalmente, infinitamente distante da lei de Stefan-Boltzmann (2.2 e 2.3).

O problema que origina a catástrofe ultravioleta é que se assume que cada configuração oscilatória tem a mesma energia kT , como mostra a equação (2.18). Porém, o “número” de configurações permitidas entre uma frequência f e outra $f+df$ aumenta com a própria frequência, o que faz a energia irradiada aumentar também, sem limites, justamente por ser a energia média kT independente da frequência. Com tudo isso, vemos que a física clássica não é capaz de fornecer uma resposta adequada ao problema da radiação de cavidade.

Observação: Em muitos livros, não se trabalha com a emitância espectral $E_f(f, T)$ e sim com a densidade espectral de energia $u_f(f, T)$. Ambas são idênticas a menos de uma constante:

$$E_f(f, T) = (c/4) \cdot u_f(f, T) \quad (2.22)$$

Neste capítulo, trabalhamos sempre com E_f , mesmo quando mencionamos trabalhos em que o desenvolvimento original se deu através do emprego de u_f .

2.7 – Dos experimentos de Lummer, Pringsheim, Rubens e Kurlbaum à Lei da Radiação de Planck

Max Karl Ernst Ludwig Planck é, indiscutivelmente, o pai da Teoria Quântica. Ele não só propôs a melhor fórmula para a função $E_f(f, T)$, como, para justificá-la, lançou a hipótese da quantização da energia, que teria um papel de enorme destaque no pensamento físico do século XX. No entanto, Planck não tinha, à época, idéia do alcance da hipótese de que lançara mão para encontrar uma expressão coerente com a experimentação e dotada de alguma fundamentação física. Foi apenas com advento do trabalho de Einstein sobre a natureza da luz, e, posteriormente, com as contribuições de Böhr, Heisenberg, Schrödinger e outros, que a nova revolução “ganhou corpo”. Não obstante, o mérito de Planck e a importância de sua revolucionária hipótese, sobre cuja essência agora nos debruçaremos, são enormes.

2.7.1 – Os experimentos de Lummer, Pringsheim, Rubens e Kurlbaum

Não se pode dissociar a proposta de Planck dos resultados extremamente precisos que obtiveram dois grupos de pesquisadores do Physikalisch Technische Reichsanstalt, que, naquela época, era um dos laboratórios mais bem equipados do mundo [Pais, 1995]. O primeiro grupo, formado por Otto Lummer e Ernst Pringsheim analisou o espectro de emissão na região que ia de $\lambda = 12\mu\text{m}$ até $\lambda = 18\mu\text{m}$. Em 1900, a conclusão foi forte: “A Lei de Wien falha naquela região” [Pais, 1995]. Trata-se de um resultado muito importante, pois os principais resultados obtidos até então (em outras faixas de comprimento de onda) davam suporte a tal lei, como discutimos anteriormente. No mesmo ano, a segunda equipe, formada por Heinrich Rubens e Ferdinand Kurlbaum estendeu a mesma conclusão ao domínio de uma faixa ainda mais distante da visível: $\lambda = 30\mu\text{m}$ até $\lambda = 60\mu\text{m}$ (no infravermelho longínquo). É preciso frisar que a obtenção destes dados não foi, definitivamente, um processo trivial, mas sim uma contribuição experimental de primeiríssima grandeza. Além da lei de Wien, outras leis, como a de Rayleigh (equação 2.20), não foram capazes de se ajustar à observação. Os novos resultados experimentais mostravam com clareza que nenhum dos esforços anteriores tinha esgotado o problema. Ainda restava a mais importante das respostas.

Planck foi um dos físicos mais motivados pelo desafio de Kirchoff, o que atestam anos de procura pela expressão de $E_f(f, T)$. Graças à sua posição de professor em Berlim, ele podia ter acesso aos mais representativos resultados experimentais, o que atesta a pequena história a seguir, extraída de [Pais, 1995]. No dia 7 de outubro de 1900, um domingo, Heinrich Rubens e sua esposa visitaram Planck na parte da tarde. Durante a conversa, Rubens mencionou que havia descoberto que $E_f(f, T)$ era proporcional a T para pequenos valores de f . Inspirado pelo diálogo, Planck voltou ao trabalho no mesmo dia e encontrou uma interpolação entre o que foi dito por Rubens e a lei de Wien. Ele chegou à lei:

$$E_f(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad (2.23)$$

sendo h uma constante. Na Fig. 2.4, temos esta expressão representada para três valores distintos de temperatura.

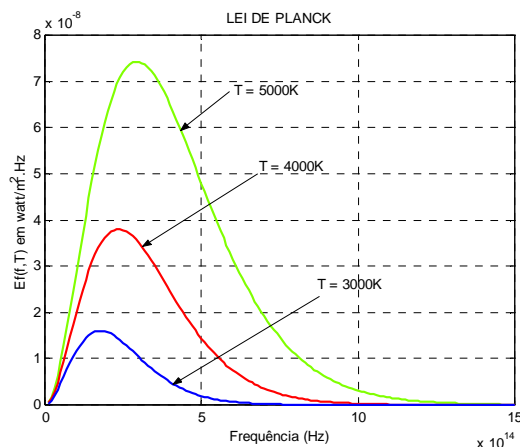


Figura 2.4

Ele enviou a fórmula para Rubens no mesmo dia e apresentou-a publicamente no dia 19 de outubro, após uma apresentação de Kurlbaum.

A equação (2.23) se reduz à lei de Wien (equação 2.12) para $hf \gg kT$ (que era justamente a faixa na qual trabalhou Paschen, vide seção 2.5) e à lei de Rayleigh-Einstein-Jeans para f próximo de zero. Isto mostra que a lei de Planck se reduz às leis conhecidas justamente no domínio em que elas têm o melhor desempenho, o que é altamente positivo. Além disso, a equação (2.23) se ajusta muito bem aos dados experimentais para todos os valores de λ e T testados. Nas palavras de Pringsheim, “a equação de Planck apresenta tão bom acordo com a experiência que pode ser considerada, pelo menos com grande aproximação, como a expressão matemática da função de Kirchoff” [Pais, 1995].

Planck havia atingido seu objetivo maior; no entanto, faltava ainda uma outra resposta: como justificar, teoricamente, a expressão (2.23)? Foi necessário, nas palavras do próprio Planck, “um ato de desespero” para “obter um resultado positivo, de qualquer modo e a qualquer preço” [Ohanian, 1995]. Esse ato de desespero foi, sem dúvida, revolucionário.

2.7.2 – A hipótese dos quanta

Para obter a expressão (2.23), Planck precisou recorrer a uma idéia ousada: a *quantização da energia*. Em termos simples, ele supôs que os osciladores materiais que compõem as paredes da caixa com cavidade (o nosso “forno metálico”) só poderiam assumir valores discretos de energia. Matematicamente, as energias permitidas seriam:

$$\varepsilon = n \cdot \varepsilon_0 \quad (2.24)$$

sendo ε_0 um valor fundamental de energia e n um número natural. Essa equação é uma expressão direta da noção de *quantum de energia*, ou seja, de um patamar energético ε_0 que “forma” todos os valores aceitáveis de energia.

O raciocínio de Planck pode ser considerado idêntico ao de Rayleigh, Einstein e Jeans até a equação (2.13)⁵. É justamente a determinação de ε_{med} que se torna o “pomo da

⁵ Nossa exposição dos passos que levam à lei de Planck não deve ser encarada como uma seqüência rigorosa dos passos seguidos pelo físico alemão. Aqui, nossa “linha mestra” privilegiará a didática, e não a cronologia.

discórdia” entre as duas teorias. Na teoria clássica, supõe-se aplicável o teorema da equipartição, como discutimos na seção 2.6. Esse teorema nos conduziu a $\epsilon_{\text{med}} = kT$ e à catástrofe ultravioleta. A equação (2.24) pode nos salvar desta catástrofe? Vejamos.

Continuemos a assumir que a probabilidade relativa de ocorrência de um oscilador com energia ϵ é $\exp(-\epsilon/kT)$. Dessa forma, chegaremos à seguinte expressão:

$$\epsilon_{\text{med}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \epsilon_0 \cdot \exp(-n\epsilon_0 / kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\epsilon_0 / kT)} \quad (2.25)$$

Fazendo $\beta = 1 / kT$, temos que:

$$\epsilon_{\text{med}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \epsilon_0 \cdot \exp(-n\epsilon_0 / kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\epsilon_0 / kT)} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta n \epsilon_0) = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - \exp(-\beta \epsilon_0)} = \frac{\epsilon_0}{\exp(\beta \epsilon_0) - 1} \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.13), chegamos a:

$$E_f(f, T) = \frac{2\pi f^2 \epsilon_0}{c^2} \frac{1}{\exp(\epsilon_0 / kT) - 1} \quad (2.27)$$

Para que a equação (2.27) obedeça à lei do deslocamento de Wien (equação (2.4)), é preciso que valha a relação:

$$\epsilon_0 = h \cdot f \quad (2.28)$$

sendo h uma constante, que depois veio a ser conhecida como *constante de Planck*. Planck obteve, com os dados experimentais de que dispunha, o valor $h = 6.55 \cdot 10^{-34}$ J.s. O melhor valor, atualmente, é de $6.626 \cdot 10^{-34}$ J.s, o que deixa claro quão notável foi o trabalho experimental da época.

Podemos indagar: o que há na hipótese quântica que pôde prevenir a catástrofe ultravioleta? Imaginemos um oscilador quiescente, ou seja, com energia nula. Para que ele possa oscilar com uma frequência f qualquer, é preciso que lhe seja fornecida uma energia diretamente proporcional a f (vide a equação (2.28)). Isso mostra que, para frequências muito altas, será preciso fornecer uma grande quantidade de energia para que haja a oscilação. Isto impõe sérias restrições ao conteúdo energético nessa região, o que previne a ocorrência de algo como a catástrofe do ultravioleta.

Havia sido dada uma resposta altamente satisfatória à pergunta de Kirchoff. Porém, foi alto preço pago: introduziu-se uma hipótese completamente estranha ao mundo clássico. Poderia a quantização da energia se sustentar? A resposta, literalmente, está nos próximos capítulos...

Apêndice A: Comparação entre as Leis

Traçamos as curvas correspondentes às três leis que estudamos, a de Wien, a de Rayleigh-Einstein-Jeans e a de Planck, para $T = 5000\text{K}$.

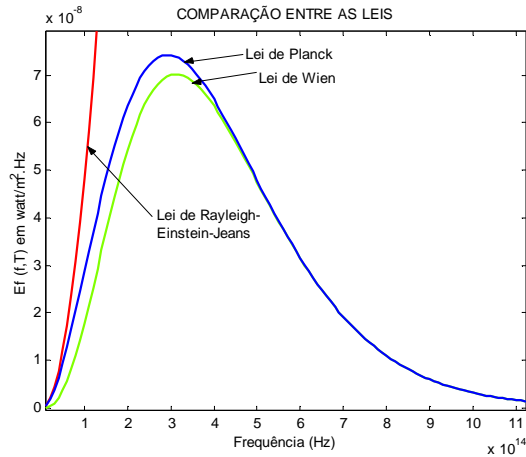


Figura 2.6

Percebemos que, de fato, as leis de Wien e Rayleigh-Einstein-Jeans falham em alguns domínios. Como já havíamos mencionado, a lei de Rayleigh vale para baixas frequências, e a de Wien, para $f \gg kT/h$. No caso acima, o domínio de validade da lei de Wien deveria ser $f \gg 1.04 \cdot 10^{14}$ Hz. De fato, só quando f assume um valor seis vezes maior que este limitante, paramos de perceber a diferença entre a Lei de Wien e a de Planck.

Bibliografia do Capítulo 2:

[Born 1986] **M. Born**, *Física Atômica*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.

[Eisberg 1961] **R. Eisberg**, *Fundamentals of Modern Physics*, Wiley, 1961.

[Halliday e Resnick 1994] **D. Halliday**, **R. Resnick**, *Fundamentos da Física*, LTC, 1994.

[Ohanian 1995] **H. Ohanian**, *Modern Physics*, Prentice Hall, Second Edition, 1995.

[Pais 1995] **A. Pais**, *Sutil é o Senhor: a Ciência e a Vida de Albert Einstein*, Nova Fronteira, 1995.

[Serway 1990] **R. Serway**, *Physics for Scientists and Engineers*, Saunders College Publishing, Third Edition, 1990.

Capítulo 3 – Fótons e Elétrons

Com a lei de Planck, emerge uma idéia bastante inovadora (e perturbadora): a *quantização da energia*. No entanto, em 1900, tal idéia era pouco mais que uma noção *ad hoc*, um “ato de desespero” de alcance limitado. De certa maneira, esse *status* começou a se modificar com o trabalho de Einstein sobre o efeito fotoelétrico (1905): nele, os *quanta* começaram a ter um papel muito mais abrangente na descrição do mundo físico, como veremos neste capítulo.

3.1 – Trabalhos Pioneiros sobre o Efeito Fotoelétrico

Heinrich Hertz tem seu nome indelévelmente associado à descoberta das ondas eletromagnéticas. Como discutimos no capítulo 1, ele foi o responsável pelas primeiras evidências experimentais em favor da teoria de Maxwell. Entretanto, no decurso de seu brilhante trabalho experimental, ele também teve a chance de descrever um efeito cuja investigação marcou os rumos da física no século XX: *o efeito fotoelétrico*.

Em 1887, Hertz estudava a geração de faíscas por duas placas metálicas às quais era imposta uma diferença de potencial. Nesse contexto, ele observou que, quando se gerava uma “faísca primária” numa das superfícies, ocorria uma faísca secundária na outra. Como esta última era difícil de se observar, ele resolveu construir uma cobertura em torno da superfície na qual ela era produzida. Quando isso foi feito, a intensidade da segunda faísca diminuiu, para surpresa do cientista. O fenômeno ocorria tanto para uma cobertura condutora de eletricidade quanto para uma isolante, o que só deixou a Hertz uma conclusão: era a luz da primeira faísca que estimulava a ocorrência da segunda. Para tentar confirmá-la, Hertz afastou as superfícies até o ponto em que a primeira faísca não mais acarretava a geração da segunda. Ele iluminou a superfície com uma outra fonte de luz e verificou que as faíscas voltavam a aparecer. Havia sido registrada, pela primeira vez, a observação do efeito fotoelétrico [Pais, 1995].

Um ano depois, em 1888, houve um resultado correlato: Wilhelm Hallwachs mostrou que a irradiação de luz ultravioleta sobre corpos metálicos neutros fazia com que eles adquirissem carga positiva. Em 1899, Joseph John Thomson afirmou que estes efeitos eram decorrentes de uma ejeção de elétrons induzida pela luz ultravioleta. Em outras palavras, as faíscas de Hertz e a carga positiva de Hallwachs poderiam ser explicadas se supuséssemos que a incidência de luz é capaz de fazer com que elétrons sejam extraídos de uma superfície metálica. Seus experimentos confirmaram a sua afirmação [Pais, 1995].

Em 1902, Philipp Lenard conduziu uma investigação fundamental sobre o efeito fotoelétrico. Na Fig. 3.1, temos uma representação esquemática do tipo de aparato utilizado no trabalho. Basicamente, a luz incide num dos eletrodos (cátodo), ejetando elétrons que são coletados pelo outro eletrodo (ânodo). Há uma diferença de potencial imposta por uma fonte com tensão V , a qual pode assumir valores positivos ou negativos. Caso o potencial associado ao eletrodo A seja menor que o associado a C, haverá uma “resistência” ao fluxo de elétrons. Essa resistência pode ser quantificada em termos da variação da energia cinética do elétron ejetado, que, por sua vez, deve se igualar ao trabalho

$$\tau = e|V| \quad (3.1)$$

realizado por um campo elétrico suposto uniforme (e é o valor da carga do elétron).

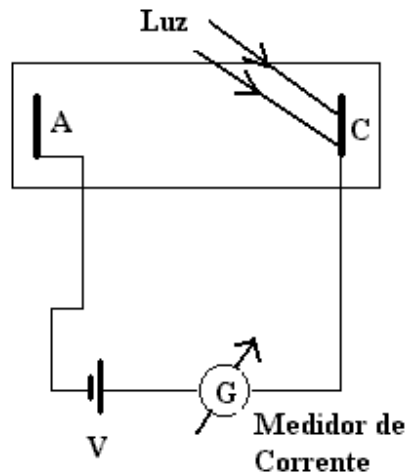


Figura 3.1

A partir de (3.1), podemos perceber que deve haver um valor de V para o qual eventualmente cessa o fluxo de elétrons, ou seja, para o qual o trabalho realizado pelo campo se iguala à própria energia cinética da partícula ejetada. Essa *tensão de corte* deve, portanto, obedecer à fórmula:

$$E_{\text{cmax}} = e \cdot |V_{\text{corte}}| \quad (3.2)$$

sendo E_{cmax} a energia cinética máxima dos elétrons ejetados. Isso mostra que o aparato descrito permite que se avalie a energia dos elétrons através do controle da tensão imposta aos eletrodos.

Tentaremos sumarizar o que descobriu Lenard:

- 1) A energia cinética dos elétrons ejetados (ou, à luz da equação (3.2), a tensão de corte) não variava com o aumento da intensidade da luz.
- 2) O aumento da intensidade da luz produzia uma maior corrente, ou seja, fazia com que o número de elétrons ejetados fosse maior.
- 3) Por fim, a energia cinética dos elétrons ejetados crescia com o aumento da frequência da luz incidente.

Como veremos na próxima seção, a teoria eletromagnética não era capaz de explicar tais resultados.

3.2 – O Fóton e a Proposta Teórica de Einstein

3.2.1 – O Cenário Clássico

Teceremos agora um breve panorama da teoria clássica do efeito fotoelétrico para que possamos entender por que ela sucumbiu ante os resultados experimentais que expusemos na seção anterior.

Classicamente, a ejeção seria causada pela interação entre os elétrons do metal e a onda eletromagnética incidente. Nesse caso, luz mais intensa estaria associada a um campo elétrico oscilante mais intenso, e, por esse motivo, deveria haver uma relação direta entre intensidade e energia cinética dos fotoelétrons ejetados. Ora, foi justamente isto que Lenard não observou! Eis a primeira falha da teoria clássica.

Um outro problema é que, em tese, luz de qualquer frequência (fixemos uma certa intensidade) deveria levar à ejeção de fotoelétrons, desde que houvesse um tempo de interação suficiente⁶ entre a onda incidente e o metal, o que contradiz o espírito do terceiro item das descobertas de Lenard.

Esses dois fatores só podiam produzir uma conclusão: a física clássica não tinha condições de descrever a interação energia-matéria subjacente ao efeito fotoelétrico.

3.2.2 – A Proposta de Einstein

Interessantemente, o ponto de partida da revolucionária proposta de Einstein foi a lei de Wien da radiação, que estudamos no capítulo anterior. A partir de algumas considerações termodinâmicas, ele pôde mostrar que a radiação de cavidade⁷ numa certa frequência f , sob determinadas hipóteses, comporta-se como se fosse formada por *quanta de energia* de magnitude hf [Pais, 1995]. Para chegar a esse resultado, Einstein mesclou, de certa forma, clássicos métodos termodinâmicos e elementos de teoria quântica (como vimos, a lei de Wien é um caso particular da lei de Planck). O mais curioso é que, a partir dessa mistura, ele chegou a um resultado deveras abrangente: uma descrição quântica da natureza da radiação⁸. O brilhante cientista não parou nesse ponto, mas formulou ainda o seu célebre *princípio heurístico*, que é simplesmente uma extensão da validade da hipótese do *quantum* de luz ao domínio da interação entre luz e matéria.

Uma aplicação direta de tal princípio levou Einstein a introduzir uma explicação do efeito fotoelétrico capaz de justificar os desconcertantes resultados experimentais vistos anteriormente. Einstein propôs que a interação entre luz e metal se dá através de uma

⁶ Aliás, o fator tempo também é um problema para a teoria clássica, pois o tempo por ela previsto para que a interação onda-campo leve à ejeção do elétron é tipicamente bem maior que o tempo verificado na prática [Born, 1986].

⁷ No regime de Wien, ou seja, quando $hf/kT \gg 1$.

⁸ Note o leitor que, de certa forma, Einstein mostra que a lei de Wien pode ser deduzida se supusermos que a radiação de cavidade é composta de *quanta de luz* e que algumas hipóteses termodinâmicas clássicas sobre esse “gás de partículas” são válidas. Posteriormente, graças a aos esforços de Satyendranath Bose (e do próprio Einstein), seria possível mostrar que a lei de Planck, a mais geral de todas, pode ser deduzida a partir da idéia de *quantum* de luz, desde que os métodos estatísticos adequados sejam usados. Como Pais bem observa, embora estivesse trabalhando no regime de Wien (que não é genérico) e empregando métodos clássicos, Einstein chegou a uma hipótese quântica sólida! Nas palavras desse autor: “A genialidade da hipótese do *quantum* de luz reside na intuição de escolher o pedaço correto da informação experimental e os ingredientes teóricos corretos...” [Pais, 1995].

transferência de energia entre pares *quantum de luz – elétron*. A energia de um *quantum* (ou *fóton*)⁹ de frequência f , como vimos, é:

$$E = hf \quad (3.3)$$

sendo h a constante de Planck. Nesse cenário, a energia cinética de um elétron ejetado será igual à energia do *quantum* incidente menos a energia despendida para que a partícula se “desligue” do metal. Portanto,

$$E_c = hf - E_{\text{lig}} \quad (3.4)$$

sendo E_{lig} essa “energia de ligação” do elétron. Se o elétron estiver na superfície do cátodo, E_{lig} atingirá seu valor mínimo, ao qual daremos o nome de ϕ , uma *função-trabalho* dependente da natureza do metal empregado. Para esses elétrons superficiais, que terão a maior energia cinética possível, vale:

$$E_{c\text{max}} = hf - \phi \quad (3.5)$$

Tentemos agora avaliar como a teoria justifica os resultados experimentais. Sendo a ejeção provocada pela interação entre pares fóton-elétron, quanto maior for a “quantidade de fótons” presente no feixe de luz, maior será a quantidade de elétrons ejetados. Isso explica por que a corrente aumenta com o aumento da intensidade da luz incidente (o segundo item da lista de Lenard). Porém, caso a energia hf dos fótons não seja suficiente para vencer a resistência expressa pela função-trabalho, ou, ainda, aquela formada pela combinação entre a resistência inerente à natureza do metal e o potencial contrário imposto pela fonte, então não haverá ejeção, por mais fótons que incidam na superfície. Fótons sem energia suficiente não arrancarão elétrons, por maior que seja a intensidade da luz, pois o processo diz respeito a “interações individuais”.

A tensão de corte é aquela que não permite que elétrons sejam ejetados em circunstância alguma, ou seja, que é capaz de “drenar” a energia cinética máxima expressa em (3.5). Dessa forma,

$$E_{c\text{max}} = e \cdot |V_{\text{corte}}| = hf - \phi \quad (3.6)$$

A equação (3.5), proposta por Einstein em 1905, foi comprovada experimentalmente, com grande sucesso, por Robert Andrews Millikan¹⁰, um dos mais célebres experimentadores do século XX. Em termos simples, podemos afirmar que os resultados de Millikan foram conclusivos no sentido de mostrar que um gráfico de $E_{c\text{max}}$ (ou V_{corte}) por f deveria ser uma reta, da qual, aliás, poderia ser extraído o valor da constante de Planck e da função trabalho do material testado. Ele, aliás, obteve o ótimo $h = 6.57 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Não obstante esses sucessos experimentais, houve, desde o primeiro momento, fortíssima resistência à noção de *quantum* de luz introduzida por Einstein (ele mesmo

⁹ Embora, do ponto de vista histórico, *quanta de luz e fótons* sejam termos distintos, deles faremos uso de maneira indistinta ao longo do texto.

¹⁰ Millikan recebeu o prêmio Nobel de 1923 por seu trabalho experimental na determinação da carga do elétron e na verificação da teoria de Einstein acerca do efeito fotoelétrico.

manteve uma atitude cautelosa a respeito do escopo de sua hipótese heurística). De que forma seria possível imaginar a luz, tão bem descrita em diversas instâncias pela teoria ondulatória de Maxwell, como um aglomerado de “partículas”? Qual a chave para conciliar ambos os mundos? Não se trata, certamente, de um problema trivial. A relutância de cientistas como Millikan, Planck, Sommerfeld e von Laue, só para citar alguns nomes, não deixava de ser, até certo ponto, esperada. Por outro lado, era nitidamente contraditório aceitar a equação (3.6) e rejeitar a natureza “corpuscular” da luz.

Em 1922, Albert Einstein recebeu o prêmio Nobel de Física de 1921 por “seus serviços à física teórica, especialmente por sua descoberta da lei do efeito fotoelétrico”. Os trabalhos de Compton e Debye não tardariam a trazer evidências experimentais que, finalmente, dissipariam boa parte do ceticismo acerca da hipótese do fóton.

3.3 – O Efeito Compton

Em 1923, Arthur Holly Compton publicou um artigo clássico, no qual explicou um fenômeno para o qual a concepção ondulatória da luz não tinha resposta. Imagine que um feixe monocromático de raios X (com comprimento de onda λ) incide sobre um alvo de grafite. À luz da teoria clássica, era de se esperar que o feixe, de caráter ondulatório, “sacudisse” os átomos do alvo com a mesma frequência incidente, o que não permitiria qualquer desvio na frequência da radiação após o espalhamento pelo alvo.

No entanto, o que Compton verificou foi algo bem distinto do que previa a física clássica. Para que entendamos seus resultados, vejamos, na Fig.3.3, um esquema simplificado do aparato utilizado.

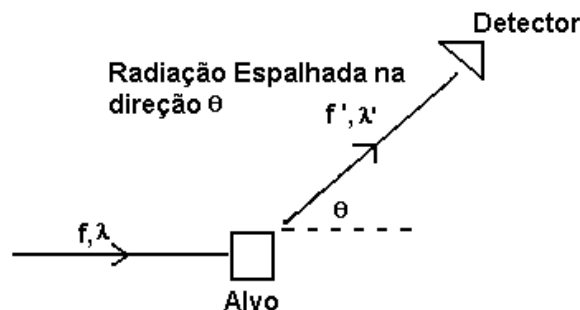


Figura 3.3

Compton observou que, para valores não-nulos de θ , havia dois comprimentos de onda predominantes na radiação incidente no detector: $\lambda_0 = \lambda$ e $\lambda_1 = \lambda'$. O valor do primeiro comprimento estava sempre próximo ao do comprimento da radiação incidente. O segundo, no entanto, era um comprimento de onda sempre maior (frequência menor) que o da radiação incidente. Além disso, o valor deste comprimento dependia do ângulo θ . Como discutimos, não havia maneira de explicar tal desvio sob a égide da teoria maxwelliana.

Compton interpretou o surgimento de λ' como sendo um fruto da colisão entre fótons e elétrons livres do alvo. Para que se analise uma colisão, no entanto, é preciso conhecer o momento linear dos entes envolvidos. O momento linear do elétron podia ser obtido através da expressão relativística $p = mv\gamma$, que estudamos no capítulo 1. Entretanto, permanece sem resposta imediata uma questão: e o momento linear do fóton?

Para que cheguemos a uma resposta defensável a tal questão, voltemo-nos para uma outra relação decorrente de definições relativísticas, a qual liga a energia total de uma partícula a seu momento linear:

$$E^2 = c^2 \cdot p^2 + (m_0 \cdot c^2)^2 \quad (3.7)$$

Ora, como os fótons têm velocidade igual à da luz, sua massa de repouso precisa ser nula, de modo que a expressão (3.7) se reduz a:

$$p = E/c \quad (3.8)$$

Substituindo (3.3) em (3.8), obtemos:

$$p = hf/c = h/\lambda \quad (3.9)$$

De posse de uma fórmula para o momento do fóton, podemos, sem mais demora, estudar a colisão imaginada por Compton. A Fig. 3.4 ilustra o “antes e depois” do fenômeno de interesse.

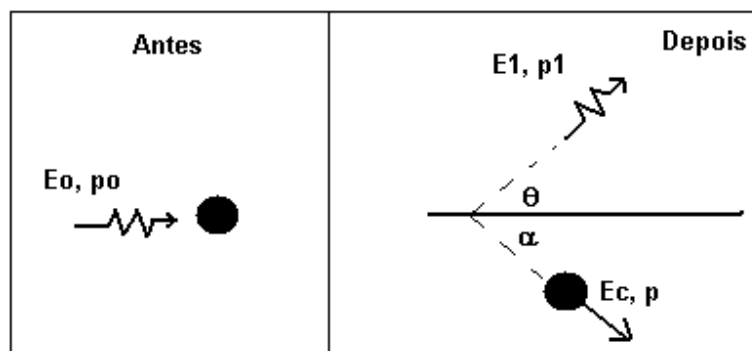


Figura 3.4

Apliquemos a conservação do momento. Temos, para a direção x,

$$p_0 = p_1 \cdot \cos(\theta) + p \cdot \cos(\alpha) \quad (3.10)$$

Para a direção y, vale

$$p_1 \cdot \sin(\theta) = p \cdot \sin(\alpha) \quad (3.11)$$

Manipulando (3.10) e elevando ao quadrado ambos os membros, notamos que

$$[p_0 - p_1 \cdot \cos(\theta)]^2 = p^2 \cdot \cos^2(\alpha) \quad (3.12)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (3.11), temos:

$$p_1^2 \cdot \sin^2(\theta) = p^2 \cdot \sin^2(\alpha) \quad (3.13)$$

Somando (3.12) e (3.13), obtemos a relação

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 \cdot p_1 \cdot \cos(\theta) = p^2 \quad (3.14)$$

Pela conservação da energia, vale

$$E_0 + m_0 \cdot c^2 = E_1 + E_c + m_0 \cdot c^2 \quad (3.15)$$

que nos leva a:

$$E_0 - E_1 = E_c \quad (3.16)$$

Substituindo (3.8) em (3.16), obtemos:

$$c \cdot (p_0 - p_1) = E_c \quad (3.17)$$

Aplicando a expressão relativística (3.7) ao elétron após a colisão, temos:

$$(E_c + m_0 \cdot c^2)^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (3.18)$$

que se reduz a:

$$E_c^2 + 2E_c \cdot m_0 \cdot c^2 = c^2 p^2 \quad (3.19)$$

ou

$$E_c^2 / c^2 + 2E_c \cdot m_0 = p^2 \quad (3.20)$$

Igualando p^2 em (3.14) e (3.20), e fazendo uso da expressão (3.17), temos:

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0 c (p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos(\theta) \quad (3.21)$$

que se reduz a:

$$m_0 \cdot c (p_0 - p_1) = p_0 \cdot p_1 \cdot [1 - \cos(\theta)] \quad (3.22)$$

ou

$$(p_1)^{-1} - (p_0)^{-1} = (m_0 c)^{-1} \cdot [1 - \cos(\theta)] \quad (3.23)$$

Multiplicando ambos membros de (3.23) pela constante de Planck e utilizando (3.9), obtemos:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c \cdot [1 - \cos(\theta)] \quad (3.24)$$

sendo $\lambda_C = h/m_0c$ o *comprimento de onda de Compton*. A equação (3.24), por vezes denominada *equação de Compton*, não contém informações acerca do material utilizado¹¹.

Como acabamos de ver, a teoria corpuscular da luz forneceu uma explicação para o desvio de frequência (ou comprimento de onda) da radiação espalhada. Essa nova evidência em favor do fóton causou enorme sensação na comunidade científica, pois havia sido mostrado de maneira cabal que a hipótese quântica também levava a um cenário coerente quando aplicada ao estudo da transferência de momento entre radiação e matéria [Pais, 1995]. O sucesso de Compton foi, portanto, um marco no processo de “amadurecimento” da ainda jovem teoria. Finalmente, destacamos que os elétrons espalhados também foram conclusivamente detectados graças aos posteriores esforços de Bothe, Geiger, Jacobsen e outros [Born, 1986].

Apesar de termos apresentado uma explicação para o desvio de comprimento de onda, ainda precisamos entender por que a radiação espalhada tinha também significativo conteúdo na vizinhança de um comprimento de onda aproximadamente igual ao incidente. A explicação é simples: trata-se do fruto de interações entre fótons e elétrons “não-livres”, para os quais o raciocínio acima não é estritamente válido¹².

3.4 – Bremsstrahlung e a Produção de Raios-X

Bremsstrahlung é uma palavra alemã que nos remete à idéia de uma “radiação de desaceleração”. Tal palavra se refere aos raios-X que são produzidos pela desaceleração de elétrons que colidem com alvos metálicos.

Já se sabia que, de acordo com a teoria de Maxwell, partículas que sofrem aceleração (ou desaceleração) devem emitir radiação. Entretanto, havia algumas peculiaridades que ainda não haviam sido adequadamente explicadas. Suponhamos que incida sobre um alvo um feixe de elétrons com certa energia. Experimentalmente, observa-se que o espectro da radiação gerada no processo tem um valor máximo de frequência (ou um valor mínimo de comprimento de onda), valor que recebe o nome de *limite de Duane-Hunt*, em homenagem a William Duane e Franklin Livingston Hunt¹³. A teoria ondulatória não prevê a existência de tal limite, o que abriu caminho, mais uma vez, para a aplicação do emergente conceito de fóton.

O limite de Duane-Hunt é uma consequência direta de (3.6). Suponhamos que os elétrons tenham sido acelerados até o ponto em que possuam uma certa energia cinética E_c . Nesse momento, consideremos que as partículas carregadas colidam com o alvo, emitam fótons e “percam”, por conseguinte, energia cinética. Num caso extremo, podemos conceber uma colisão em que toda a energia cinética do elétron seja convertida em energia radiante. Nesse caso,

$$E_c = hf_{\text{emitido}} \quad (3.25)$$

¹¹ Frisamos que a expressão obtida é, em rigor, uma boa aproximação, pois deveríamos ter levado em conta a função trabalho do material testado.

¹² Podemos intuir a razão de ser desse fato se imaginarmos que a “massa efetiva” dos entes fortemente ligados é muitas vezes maior que a de um elétron livre, o que, de acordo com (3.24), faz com que haja um desvio pouco significativo [Halliday e Resnick, 1994].

¹³ Esses dois cientistas realizaram experiências voltadas à produção de raios X, nas quais observaram a propriedade que acabamos de expor. Interessantemente, segundo Pais [Pais 1995], Duane tinha grande interesse na aplicação de raios X ao tratamento do câncer.

Assumamos que a energia cinética dos elétrons é consequência da atuação de um campo elétrico uniforme. Nessas circunstâncias, é-nos lícito escrever:

$$E_c = e.V \quad (3.26)$$

sendo V a diferença de potencial entre os eletrodos do tubo no qual se produzem os raios X. Analisando (3.25), percebemos que a frequência em questão deve ser a frequência-limite verificada por Duane e Hunt, à qual daremos o nome de f_{corte} . Substituindo (3.26) em (3.25), obtemos finalmente¹⁴

$$f_{\text{corte}} = eV/h \quad (3.27)$$

A partir de (3.27), os dois pesquisadores obtiveram um valor muito bom para a constante de Planck, a saber, $6.39 \cdot 10^{-34}$ J.s [Pais, 1995]. Note que a expressão (3.27) não apresenta qualquer dependência explícita em relação ao tipo de material utilizado.

Neste capítulo, apresentamos uma série de evidências experimentais em favor da hipótese dos quanta de luz. Sabemos que o caráter ondulatório da luz nos ajuda a entender diversos fenômenos, como a difração e a interferência. Não obstante, tal interpretação é limitada, em especial quando se trabalha com interações com a matéria. Nesse domínio, foi preciso lançar mão do caráter “corpuscular” manifesto no conceito de fóton: paira no ar uma espécie de dualidade, sobre a qual ainda teremos muito a dizer.

Bibliografia do Capítulo 3:

[Born 1986] **M. Born**, *Física Atômica*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.

[Eisberg 1961] **R. Eisberg**, *Fundamentals of Modern Physics*, Wiley, 1961.

[Halliday e Resnick 1994] **D. Halliday**, **R. Resnick**, *Fundamentos da Física*, LTC, 1994.

[Ohanian 1995] **H. Ohanian**, *Modern Physics*, Prentice Hall, Second Edition, 1995.

[Pais 1995] **A. Pais**, *Sutil é o Senhor: a Ciência e a Vida de Albert Einstein*, Nova Fronteira, 1995.

[Serway 1990] **R. Serway**, *Physics for Scientists and Engineers*, Saunders College Publishing, Third Edition, 1990.

¹⁴ Deve-se a Einstein a idéia de aplicar seu princípio heurístico ao problema em questão e a Duane e Hunt o mérito da análise experimental do mesmo.