Facharbeit

im Leistungskurs Mathematik

Partialsummen und Zahlenfolgen

Verfasser:	Steffen Weber
	Georg-Cantor-Gymnasium, Halle
	Klasse 10, Schuljahr 98/99
Bearbeitungszeit:	fünf Monate
Abgabetermin:	25.05.1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Heute ist die Technik eine wichtige Komponente in der menschlichen Gesellschaft. Mit dem ständigen Fortschritt der Technik steigt auch die Bedeutung der Mathematik. Die Erkenntnisse von Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) gehören zu den Grundlagen der heutigen Mathematik. So wäre die moderne Mathematik zum Beispiel ohne die Gauß'sche Zahlenebene und den Fundamentalsatz der Algebra nur schwer vorstellbar. Bereits als neunjähriger Junge löste er eine zeitaufwendige Rechnung mit Hilfe einer Vereinfachung innerhalb kürzester Zeit. Der Lehrer Büttner soll in der Anfängerschule die Aufgabe gestellt haben, die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu bilden. Der kleine Gauß legte kurz nach dem die Aufgabe gestellt wurde seine Rechentafel auf das Pult der Lehrers und sagte: „Dar licht se.“ Auf der Rechentafel stand zur Verwunderung des Lehrers nur die Zahl 5050, das richtige Ergebnis. Die Aufgabe löste Gauß, indem er sich überlegte, dass es genau 50 Summandenpaare gibt deren Summe 101 beträgt. In meiner Facharbeit möchte ich nun diese Lösungsidee aufgreifen und das Thema durch Verallgemeinerungen erweitern. Zusätzlich werde ich auf die Summenformeln spezieller Partialsummen höheren Grades und auf weitere themenbezogene Aspekte eingehen.

Kapitel 2

Partialsummen und Zahlenfolgen

2.1 Allgemeines

Für ein gutes Verständnis dieses Teilgebietes der Arithmetik sind einige Definitionen, Vereinbarungen und Begriffsklärungen notwendig. Als erstes wird vereinbart, dass anders als in mancher Literatur die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die Null nicht als Element enthält. Die Menge aller ganzen, nichtnegativen Zahlen wird mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnet. Die Formulierung "...genau dann, wenn ..." wird gebraucht genau dann, wenn auch die Umkehrung der Definition bzw. des Satzes gilt.

Definition 2.1: Eine Menge von Zahlen, die in einer bestimmten, mit einer ersten Zahl beginnenden Reihenfolge aufgeführt sind, so dass jede von ihnen eindeutig einer natürlichen Zahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ in dieser Reihenfolge zugeordnet werden kann, heißt Zahlenfolge. Die einzelnen Zahlen heißen Glieder der Zahlenfolge.

Die Angabe einer Zahlenfolge durch eine Funktion $a_n = f(n)$ heißt explizite/independente Definition der Zahlenfolge. Mit ihrer Hilfe kann man jedes Glied unmittelbar berechnen. Die Angabe einer Zahlenfolge durch das Anfangsglied a_1 und eine Gleichung $a_{n+1} = g(a_n)$ zur Berechnung eines beliebigen Gliedes aus dem vorangegangenen Glied heißt rekursive Definition der Zahlenfolge. Die Gleichung $a_{n+1} = g(a_n)$ heißt Rekursionsgleichung, da man zur Berechnung von a_{n+1} zum Glied a_n "zurücklaufen" (lat. recurrere) muss.

Definition 2.2: Ist (a_k) mit $k \in \mathbb{N}$ eine Folge, so heißt $\sum_{k=1}^{n} a_k$ eine Partialsumme der Folge (a_k).

Definition 2.3: Die Folge (s_n) der Partialsummen s_n einer Zahlenfolge (a_n) heißt Reihe. Ist die Folge (a_n) endlich, so heißt der Wert der letzten Partialsummen s_n, die gleich die Gesamtsumme aller Glieder der (endlichen) Folge (a_n) ist, als Reihensumme/Partialsumme.

Definition 2.4: Eine Zahlenfolge (a_n) ist monoton wachsend bzw. streng monoton wachsend genau dann, wenn für alle n gilt $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n < a_{n+1}$. Eine Zahlenfolge (a_n) ist monoton fallend bzw. streng monoton fallend genau dann, wenn für alle n gilt $a_n \geq a_{n+1}$ bzw. $a_n > a_{n+1}$. Eine Zahlenfolge (a_n) ist konstant genau dann, wenn für alle n gilt $a_n = a_{n+1}$.

2.2 Arithmetische Zahlenfolgen 1. Ordnung und deren Partialsummen

2.2.1 Allgemeine arithmetische Zahlenfolge und deren Partialsumme

Definition 2.5: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt arithmetische Zahlenfolge 1. Ordnung genau dann, wenn es eine Zahl d gibt, so dass die Differenz von je zwei aufeinander folgenden Gliedern gleich d ist: $a_{n+1} - a_n = d$ für jedes n. Die Zahl d heißt Differenz der arithmetischen Folge.

Für die allgemeine Darstellung einer arithmetischen Folge 1. Ordnung (im weiteren nur arithmetische Folge genannt) lautet die rekursiven Definition also $a_{n+1} = a_n + d$ und die explizite Definition $a_n = a_1 + (n-1)d$. Dabei bestimmt d die Art der Folge. D.h. falls $d > 0$, so handelt es sich um eine streng monoton wachsende Folge; falls $d < 0$, so handelt es sich um eine streng monoton fallende Folge. Für eine arithmetische Folge ist herausragend, dass jedes Glied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist. Das ist leicht mit Hilfe der expliziten Definition zu zeigen.

$$a_1 + (n-1)d = \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2}$$

$$a_n = \frac{a_1 + (n-2)d + a_1 + nd}{2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Durch die Summenbildung nach Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) erhält man für $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die Summenformeln (2.1) und (2.2).

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2_d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\
s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-3)d) + (a_n - (n-2)d) + (a_n + (n-1)d) \\
2s_n &= n(a_1 + a_n) \\
s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \qquad (2.1) \\
s_n &= a_1 + a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d \\
s_n &= (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\
2s_n &= (2a_1 + (n-1)d)n \\
s_n &= n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right) \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Dass diese beiden Gleichungen äquivalent zu einander sind, ist leicht zu zeigen.

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}$$

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)$$

Da die Gleichungen (2.1) und (2.2) äquivalent zu einander sind, soll an diese Stelle alternativ nur die Gleichung (2.1) mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen.

Induktionsanfang: Die Gleichung (2.1) gilt für $n = 1$, denn $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$ und $\frac{1\cdot(a_1+a_1)}{2} = a_1$.
Induktionsvoraussetzung: Die Gleichung (2.1) gilt für $n = k$.
Induktionsbehauptung: Die Gleichung (2.1) gilt für $n = k + 1$.
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell &= \frac{k(a_1 + a_k)}{2} \\
\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell + a_{k+1} &= \frac{k(a_1 + a_k) + 2a_{k+1}}{2} \\
\sum_{\ell=1}^{n+1} a_\ell &= \frac{k(a_1 + a_k) + a_{k+1} + a_k + d}{2} \\
\sum_{\ell=1}^{n+1} a_\ell &= \frac{k(a_1 + a_k) + (a_1 + kd + a_k + d)}{2} \\
\sum_{\ell=1}^{n+1} a_\ell &= \frac{(k+1)(a_1 + a_k + d)}{2} \\
\sum_{\ell=1}^{n+1} a_\ell &= \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1})}{2}
\end{aligned}$$

Wegen der Gültigkeit von Induktionsanfang und Induktionsschritt gilt die Gleichung (2.1) für alle arithmetischen Zahlenfolgen.

QED

2.2.2 Partialsummen spezieller arithmetischer Zahlenfolgen 1. Ordnung

Summe der ersten n natürlichen Zahlen

Die Folge der natürlichen Zahlen ist eine spezielle arithmetische Folge, für die gilt $a_k = k$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$. Ersetzt man a_k durch k in der Gleichung (2.1), so erhält man als Summenformel der natürlichen Zahlen die Gleichung (2.3).

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.3}$$

Summe der ersten n geraden Zahlen

Die Folge der geraden, natürlichen Zahlen ist eine spezielle arithmetische Folge, für die gilt $a_k = 2k$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$. Ersetzt man nun a_k durch $2k$ in der Gleichung (2.1), so erhält man als Summenformel der geraden Zahlen die Gleichung (2.4).

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = \frac{n(2n+2)}{2} = n(n+1) \tag{2.4}$$

Summe der ersten n ungeraden Zahlen

Die Folge der ungeraden, natürlichen Zahlen ist eine spezielle arithmetische Folge, für die gilt $a_k = 2k - 1$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$. Also ersetzt man a_k durch $(2k - 1)$ in der Gleichung (2.1) und erhält somit als Summenformel der ungeraden Zahlen die Gleichung (2.5).

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{n((2-1)+(2n-1))}{2} = n^2 \tag{2.5}$$

2.3 Arithmetische Zahlenfolgen p-ter Ordnung und deren Partialsumme

Die Zahlenfolge (b_n^1) mit $b_n^1 = a_{n+1} - a_n$ heißt die erste Differenzfolge von (a_n). Entsprechend nennt man (b_n^k) mit $b_n^k = b_{n+1}^{k-1} - b_n^{k-1}, k \geq 2$ die k-te Differenzfolge von (a_n).

Definition 2.6: Unter einer arithmetischen Zahlenfolge p-ter Ordnung versteht man eine nicht-konstante Zahlenfolge, deren Differenzfolge p-ter Ordnung eine konstante Zahlenfolge (n), $n \neq 0$, ist.

Satz 2.1: Jede Zahlenfolge (a_n) mit dem allgemeinen Glied $a_n = c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \ldots + c_0$ mit $p \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, \ldots, c_p$ konstant und $c_p \neq 0$, ist eine arithmetische Zahlenfolge p-ter Ordnung, denn ihre p-te Differenz $b_n^p = p!c$ ist konstant.

Mit dem Hilfssatz H1 und mit Hilfe der vollständigen Induktion kann bewiesen werden, dass die p-te Differenz b_n^k tatsächlich konstant ist.

Hilfssatz H1: Für jede Zahlenfolge (a_n) mit dem allgemeinen Glied $a_n = c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \ldots + c_0$ mit $p \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, \ldots, c_p$ konstant und $c_p \neq 0$, gilt $b_n^r = c_{p-r}^r n^{p-r} + c_{p-r-1}^r n^{p-r-1} + \ldots + c_0^r$ für jedes $r \leq p$.

Beweis von Hilfssatz H1:

Induktionsanfang: Der Hilfssatz H1 gilt für $r = 0$, denn $b_n^0 = a_n = c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \ldots + c_0$ und $a_n = c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \ldots + c_0$.

Induktionsvoraussetzung: Der Hilfssatz H1 gilt für $r = k$ und es gilt $b_n^{k+1} := b_{n+1}^k - b_n^k$ (wegen Definition).

Induktionsvoraussetzung: Der Hilfssatz H1 gilt für $r = k + 1$.

Induktionsbeweis: Aus $b_n^r = c_{p-r}^r n^{p-r} + c_{p-r-1}^r n^{p-r-1} + \ldots + c_0^r$ mit $r \leq k$ und $b_n^{k+1} = b_{n+1}^k - b_n^k$ folgt

$$\begin{aligned}
b_n^{k+1} &= c_{p-k}^k (n+1)^{p-k} + c_{p-k-1}^k (n+1)^{p-k-1} + \ldots + c_0^k \\
&\quad -(c_{p-k}^k n^{p-k} + c_{p-k-1}^k n^{p-k-1} + \ldots + c_0^k) \\
b_n^{k+1} &= c_{p-k}^k \sum_{q=0}^{p-k} \binom{p-k}{q} n^q + c_{p-k-1}^k \sum_{q=0}^{p-k-1} \binom{p-k-1}{q} n^q + \ldots + c_0^k \\
&\quad -(c_{p-k}^k n^{p-k} + c_{p-k-1}^k n^{p-k-1} + \ldots + c_0^k) \\
b_n^{k+1} &= c_{p-k}^k n^{p-k} + c_{p-k}^k \sum_{q=0}^{p-k-1} \binom{p-k}{q} n^q + c_{p-k-1}^k \sum_{q=0}^{p-k-1} \binom{p-k-1}{q} n^q + \ldots + c_0^k \\
&\quad -c_{p-k}^k n^{p-k} - c_{p-k-1}^k n^{p-k-1} - \ldots - c_0^k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n^{k+1} &= c_{p-k}^k \sum_{q=0}^{p-k-1} \binom{p-k}{q} n^q + c_{p-k-1}^k \sum_{q=0}^{p-k-1} \binom{p-k-1}{q} n^q + \ldots + c_0^k \\
&\quad - c_{p-k-1}^k n^{p-k-1} - \ldots - c_0^k \\
b_n^{k+1} &= c_{p-(k+1)}^{k+1} n^{p-(k+1)} + c_{p-(k+1)}^{k+1} n^{p-(k+1)-1} + \ldots + c_0^{k+1}
\end{aligned}
$$

Wegen der Gültigkeit von Induktionsanfang und Induktionsschritt gilt der Hilfssatz H1.

QED

Setzt man nun $r = p$, so gilt $b_n^p = c_0^p n^0 = c_0^p$ nach Hilfssatz H1, wobei c_0^p konstant ist. Damit ist Satz 2.1 gezeigt.

2.3.1 Partialsumme arithmetischer Zahlenfolgen p-ter Ordnung

Für eine allgemeine Summenformel arithmetischer Zahlenfolgen p-ter Ordnung kann der Satz 2.2 verwendet werden.

Satz 2.2: Ist (a_n) eine arithmetische Zahlenfolge von p-ter Ordnung, so ist die Summenfolge $(s_n), s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, eine arithmetische Zahlenfolge von $(p+1)$-ter Ordnung und es gilt (2.6).

$$s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} b_1^1 + \binom{n}{3} b_1^2 + \ldots + \binom{n}{p+1} b_1^p \tag{2.6}$$

Um den Satz 2.2 zu beweisen, sind weitere Definitionen notwendig. Aus der Bildungsvorschrift der k-ten Differenzfolge von (a_n) durch $b_n^k = b_{n+1}^{k-1} - b_n^{k-1}$ folgt $b_{n+1}^{k-1} = b_n^k + b_n^{k-1}$. Außerdem gilt $b_n^0 := a_n$.

Definition 2.7: Die Fakultät $n!$ (gelesen: „n Fakultät“) ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen. Ferner wird $0! = 1$ definiert.

Definition 2.8: Ein Binomialkoeffizient (gelesen: „n über k“) ist durch die Gleichung (2.7) definiert.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

Zusätzlich wird $\binom{n}{0} = 1, \quad n \in \mathbb{N}_0$ definiert.

Falls $n \in \mathbb{N}$ und $k > n$ ist, so steht im Zähler der Faktor 0, d. h. der gesamte Ausdruck wird 0.

Um den Satz 2.2 zu beweisen, muss zu erst die Gleichung (2.8) bewiesen werden. Dies kann mit Hilfe der vollständigen Induktion getan werden.

$$b_n^k = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_1^{k+j} \tag{2.8}$$

Beweis von Gleichung (2.8). *Behauptung:* Die Gleichung (2.8) gilt für alle $k, n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang:

a) Gleichung (2.8) gilt für $k > p$, denn mit $f > 0$ ist $b_n^{p+f} = 0$ und $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_1^{p+f+j} = 0$.

b) Gleichung (2.8) gilt für $n = 1$, denn $b_1^k = b_1^k$ und $\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} b_1^{k+j} = b_1^k$.

Induktionsvoraussetzung: $b_{n+1}^{k-1} = b_n^k + b_n^{k-1}$ für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung (2.8) gilt für a) $k > t$ und n beliebig oder b) $k \leq t$ und $n = u$.
Induktionsbehauptung:

a) Die Gleichung (2.8) gilt für $k = t$ und $n = u + 1$.

b) Die Gleichung (2.8) gilt für $k = t - 1$ und $n = u + 1$.

Induktionsbeweis: a) bleibe dem Leser als Übung überlassen.
b)

$$\begin{aligned}
b_{u+1}^{t-1} &= b_u^t + b_u^{t-1} \\
b_{u+1}^{t-1} &= \sum_{j=0}^{u-1} \binom{u-1}{j} b_1^{t+j} + \sum_{j=0}^{u-1} \binom{u-1}{j} b_1^{t-1+j} \\
b_{u+1}^{t-1} &= \binom{u-1}{0} b_1^t + \sum_{j=1}^{u-1} \binom{u-1}{j} b_1^{t+j} + \sum_{j=1}^{u} \binom{u-1}{j-1} b_1^{t+j} \\
b_{u+1}^{t-1} &= b_1^t + \sum_{j=1}^{u-1} \binom{u-1}{j} b_1^{t+j} + \sum_{j=1}^{u-1} \binom{u-1}{j-1} b_1^{t+j} + b_1^{t+u} \\
b_{u+1}^{t-1} &= \binom{u}{0} b_1^t + \sum_{j=1}^{u-1} \left(\binom{u-1}{j} + \binom{u-1}{j-1} \right) b_1^{t+j} + \binom{u}{u} b_1^{t+u} \\
b_{u+1}^{t-1} &= \sum_{j=0}^{u+1-1} \binom{u+1-1}{j} b_1^{t+j}
\end{aligned}$$

Wegen der Gültigkeit von Induktionsanfang und Induktionsschritt gilt die Gleichung (2.8) für alle natürlichen Zahlen n, k.

QED

Eine weitere Begründung der Gleichung (2.8) wäre es, die Summe als Anzahl der Wege zu interpretieren. So setzt sich a_n zusammen aus b_1^p mal Anzahl aller Wege von b_1^p nach b_n^0 und b_1^{p-1} mal Anzahl aller Wege von b_1^{p-1} nach b_n^0 usw. und b_0^0 mal Anzahl aller Wege von b_0^0 nach b_n^0. Dabei gibt es von b_1^{p-r} nach b_n^0 genau $(p-r)$ Wege in Richtung der nullten Reihe und genau $(n-(p-r))$ Wege in Richtung der n-ten Spalte, also insgesamt $\binom{(n-(p-r)+(p-r))}{(p-r)} = \binom{n}{(p-r)}$ verschiedene Wege. Daraus folgt Gleichung (2.8).
Zur Veranschaulichung dient die schematische Übersicht für $p = 3$.

1		8		27		64		125		216		...	(0. Reihe)
	7		19		37		61		91			...	(1. Reihe)
		12		18		24		30		36		...	(2. Reihe)
			6		6		6		6			...	(3. Reihe)

Da $a_n = b_n^0$ ist, gilt $a_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_1^j$.

$$\sum_{m=1}^{n} a_m = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} b_1^j = \sum_{j=0}^{n} \left(b_1^j \sum_{m=j+1}^{n} \binom{m-1}{j} \right)$$

$$\sum_{m=1}^{n} a_m = \sum_{j=0}^{n-1} \left(b_1^j \sum_{m=j}^{n-1} \binom{m}{j} \right) \tag{2.9}$$

Die Gleichung (2.10) lässt sich mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen.

$$\sum_{m=j}^{n-1} \binom{m}{j} = \binom{n}{j+1} \tag{2.10}$$

Beweis von Gleichung (2.10).
Induktionsanfang: Die Gleichung (2.10) gilt für $n = 1$, denn $\sum_{m=j}^{1-1} \binom{m}{j} = 1$ und $\binom{n}{j} = 1$ für $j = 0$ bzw. $\sum_{m=j}^{1-1} \binom{m}{j} = 0$ und $\binom{n}{j} = 0$ für $j > 0$.
Induktionsvoraussetzung: Die Gleichung (2.10) gilt für $n = k$.
Induktionsbehauptung: Die Gleichung (10) gilt für $n = k + 1$.
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=j}^{k-1} \binom{m}{j} &= \binom{k}{j+1} \\
\sum_{m=j}^{k} \binom{m}{j} &= \binom{k}{j+1} + \binom{k}{j} \\
\sum_{m=j}^{k} \binom{m}{j} &= \frac{k(k-1)\dots(k-j)}{(j+1)!} + \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} \\
\sum_{m=j}^{k} \binom{m}{j} &= \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{(j+1)!}(k-j+j+1) \\
\sum_{m=j}^{k+1-1} \binom{m}{j} &= \binom{k+1}{j+1}
\end{aligned}$$

Wegen der Gültigkeit von Induktionsanfang und Induktionsschritt gilt die Gleichung (2.10) für alle natürlichen Zahlen n.

QED

Setzt man Gleichung (2.10) in Gleichung (2.9) ein, so erhält man Gleichung (2.11).

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{n-1} b_1^j \binom{n}{j+1} \tag{2.11}$$

Die Gleichung (11) ist äquivalent zu Gleichung (2.6), da $b_n^0 = a_n$ ist. Damit ist der Satz 2.2 bewiesen.

2.3.2 Spezielle Partialsummen p-ter Ordnung

Partialsumme von Quadratzahlen

Nach den Satz 2.1 (siehe Seite 6) ist die Folge der Quadratzahlen eine arithmetische Zahlenfolge 2. Ordnung. Nach den Satz 2.2 (siehe Seite 7) gilt die Gleichung (2.12).

$$s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} b_1^1 + \binom{n}{3} b_1^2 \tag{2.12}$$

Dabei ist $a_1 = 1^2 = 1$, $b_1^1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$ und $b_1^2 = b_2^1 - b_1^1 = (a_3 - a_2) - 3 = 9 - 4 - 3 = 2$. Daraus folgen die Gleichungen (2.13) und (2.14).

$$s_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} 3 + \binom{n}{3} 2 \tag{2.13}$$

$$s_n = \frac{6n + 9n(n-1) + 2n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.14}$$

Partialsumme von Kubikzahlen

Nach den Satz 2.1 (siehe Seite 6) ist die Folge der Kubikzahlen eine arithmetische Zahlenfolge 3. Ordnung. Nach den Satz 2.2 (siehe Seite 7) gilt die Gleichung (2.15).

$$s_n = \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}b_1^1 + \binom{n}{3}b_1^2 + \binom{n}{4}b_1^3 \tag{2.15}$$

Dabei ist $a_1 = 1^3 = 1$. Aus der folgenden Übersicht kann man entnehmen, dass $b_1^1 = 3$, $b_1^2 = 2$ und $b_1^3 = 2$ ist.

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
a_n & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & \dots \\
b_n^1 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & & \dots \\
b_n^2 & & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & \dots \\
b_n^3 & & & & 6 & & 6 & & 6 & & & \dots
\end{array}$$

Daraus folgen die Gleichungen (2.16) und (2.17).

$$\begin{aligned}
s_n &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2}7 + \binom{n}{3}12 + \binom{n}{4}6 && (2.16)\\
s_n &= \frac{24n + 84n(n-1) + 48n(n-1)(n-2) + 6n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \\
s_n &= \frac{4n + 14n^2 - 14n + 8n^3 - 24n^2 + 16n + n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{4} \\
s_n &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 && (2.17)
\end{aligned}$$

2.4 Geometrische Folge

Definition 2.9: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt geometrische Zahlenfolge genau dann, wenn es eine Zahl q mit $q \neq 0$ gibt, so dass der Quotient von je zwei aufeinander folgenden Gliedern gleich q ist: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ für jedes n. Die Zahl q heißt Quotient der geometrischen Folge.

Die explizite Definition für die Glieder der geometrischen Folge lautet $a_n = a_1 q^{n-1}$. Für die Partialsumme $s_n = a_1 + a_1 q^1 + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$ gilt die Gleichung (2.18) bzw. die Gleichung (2.19).

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1(1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}) \\
s_n q &= a_1(q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n) \\
s_n(1-q) &= a_1(1 - q^n)
\end{aligned}$$

$$\text{Für } q \neq 1: \quad s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \tag{2.18}$$

$$\text{Für } q = 1: \quad s_n = a_1(1 + 1^1 + 1^2 + \ldots + 1^{n-1}) = a_1 n \tag{2.19}$$

Kapitel 3

Schlusswort

Partialsummen kommen in vielen Bereichen vor. So kann zum Beispiel die Partialsumme der natürlichen Zahlen genutzt werden, wenn man aus Kreisen ein gleichseitiges „Dreieck" zusammensetzt oder die Partialsumme der Quadratzahlen, wenn man einen regelmäßigen „Tetraeder" aus Kugeln zusammensetzt. Für die unterschiedlichen Anwendungen sind die Partialsummenformeln sehr unterschiedlich, so dass es häufig einfacher ist, falls nur wenige Glieder addiert werden sollen, die Summe auszurechnen oder gar abzuzählen anstatt eine Summenformel zu bilden. Falls aber die Summe von sehr vielen Gliedern nötig ist oder eine spezielle Summen öfter gebraucht wird, ist eine Partialsummenformel sehr vorteilhaft.

Kapitel 4

Literaturverzeichnis

- Engesser, Hermann. *Schülerduden - Die Mathematik I.* 5., neu bearbeitete Auflage. Mannheim, Wien, Zürich: Dudenverlag, 1990.
- Engesser, Hermann. *Schülerduden - Die Mathematik II.* 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Mannheim, Wien, Zürich: Dudenverlag, 1991.
- Frank, Brigitte (u.a.). *Wissensspeicher Mathematik.* 1. Auflage. Berlin: Volk-und-Wissen-Verlag, 1998.
- Gellert, Walter (u.a.). *Lexikon der Mathematik.* 1. Auflage. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut, 1977.
- Gellert, W. (u.a.). *Kleine Enzyklopädie Mathematik.* 5. Auflage. Leipzig: VEB Verlag Enzyklopädie, 1970.
- Koch, Steffen. *Mathematik - kurz gefasst.* 1. Auflage. Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1989.
- Mader, Oskar, Dietrich Richter. *Wissensspeicher Mathematik.* 1. Auflage. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1976.
- Simon, Hans und Kurt Stahl. *Nachschlagebücher für Grundlagenfächer - Mathematik.* 4., verbesserte Auflage. Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1966.