2.3 Funktionen

Definition 2.4: X, Y seien Mengen. Eine Funktion oder Abbildung von X in Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zuordnet. Man schreibt: $f\colon X \to Y$, $y = f(x)$, $f\colon x \to f(x)$. Graph der Funktion ist die folgende Menge graph$f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, die Menge aller Abbildungen von X in Y ist $\mathrm{Abb}(X, Y) = \{f : f\colon X \to Y, f \text{ ist Abbildung}\}$, das Bild von $A \subseteq X$ ist $f(A) = \{y : y = f(x), x \in A\}$, das Urbild von B ist $f^{-1}(B) = \{x : x \in X, f(x) \in B\}$. X heißt Definitionsbereich, $f(X)$ heißt Wertebereich.

Definition 2.5: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eineindeutig (injektiv) oder 1-1-Abbildung, wenn $\forall x, \tilde{x} \in X : x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$.
Eine Abbildung heißt auf Y oder surjektiv, wenn $f(X) = Y$.
Eine Abbildung f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

3 Zahlen

3.1 Natürliche Zahlen

Axiom 3.1 ***(nach Dedekind und Peano):***

(A1) 0 ist eine natürliche Zahl

(A2) Jede natürliche Zahl n besitzt einen eindeutig bestimmten Nachfolger $\sigma(n)$

(A3) 0 ist kein Nachfolger

(A4) Die Menge der natürlichen Zahlen ist bzgl. Induktion die kleinste Menge, die die Zahl 0 und mit einer natürlichen Zahl auch deren unmittelbaren Nachfolger enthält.

Satz 3.1 ***(Induktionsprinzip):*** $H(n)$ sei eine Aussage über natürliche Zahlen. Falls

1. $H(0)$ sei wahr,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$: Wenn $H(n)$ gilt, dann gilt auch $H(\sigma(n))$

gilt, dann ist $H(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 3.1: „+" heißt Addition und ist die Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und ist wie folgt definiert:

(1) $\forall n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$

(2) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$

„·" heißt Multiplikation und ist die Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und ist wie folgt definiert:

(1) $\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot 0 = 0$

(2) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \cdot \sigma(n) = (m \cdot n) + n$

3.2 Reelle Zahlen

Axiom 3.2: Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind zwei Funktionen „+", „·" definiert, die $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ abbilden. $\forall a, b \in \mathbb{R} : c = (a+b) \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R} : d = (a \cdot b) \in \mathbb{R}$.

(A1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz der Addition)

(A2) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ (Existenz eines Nullelements)

(A3) $\forall a \in \mathbb{R} : \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$

(A4) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (Kommutativgesetz der Addition)

(A5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)

(A6) $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : 1 \cdot a = a$ (Existenz eines Einselements)

(A7) $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$

(A8) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)

(A9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

Axiom 3.3 ***(Anordnungsaxion):*** Es gibt $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}$ heißt Menge der positiven Zahlen mit folgenden Eigenschaften

(A10) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:
$a \in \mathbb{P}$ oder $(-a) \in \mathbb{P}$ oder $a = 0$

(A11) $\forall a, b \in \mathbb{P} : (a + b) \in \mathbb{P}$

(A12) $\forall a, b \in \mathbb{P} : (a \cdot b) \in \mathbb{P}$

Mittels $\mathbb{P}$ kann $\mathbb{R}$ geordnet werden. Falls $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a - b) \in \mathbb{P}$, dann gilt $a > b$.
Trichometriegesetz: Für je zwei reelle Zahlen a, b gilt genau eine der folgenden Aussagen:
$a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$

Definition 3.2: Sei $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$. $\xi \in \mathbb{R}$ heißt eine obere (untere) Schranke der Menge A, wenn gilt $\forall x \in A : x \leq \xi$ $(\forall x \in A : x \leq \xi)$.
Besitzt A eine obere und eine untere Schranke, dann heißt A beschränkt.
Die kleinste aller oberen Schranken einer Menge reeller Zahlen A heißt Supremum von A, $\sup A$.
Die größte aller unteren Schranken einer Menge reller Zahlen A heißt Infimum von A, $\inf A$.

Axiom 3.4 ***(Vollständigkeitsaxiom):*** Nach oben beschränkt heißt es gibt eine obere Schranke.

(A13) Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

3.3 Komplexe Zahlen

Definition 3.3 ***($\mathbb{C}$):*** $\forall (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C} : (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) := (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$
$\forall (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C} : (\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) := (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$
$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C} : |(\alpha, \beta)| := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Jede komplexe Zahl z, die die Gleichung $z^n = \alpha$ erfüllt, $\alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, heißt Wurzel von α. Im Falle $\alpha = 1$ spricht man von Einheitswurzel.

Definition 3.4 ***(ε-Umgebung):*** ε-Umgebung heißt die Menge aller komplexen Zahlen z_0, für die mit $\varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

4 Abzählbarkeit von Mengen

Definition 4.1: Zwei nichtleere Mengen A und B heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung von A auf B gibt. Eine Menge heißt abzählbar, wenn diese Menge gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Eine aus endlich vielen Elementen bestehende Menge A heißt endliche Menge der Kardinalzahl n: $\mathrm{card}A = n$. Zwei gleichmächtige Mengen haben dieselbe Kardinalzahl.

Satz 4.1:

1. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist wieder abzählbar oder endlich.
2. Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge.
3. A und B seien abzählbare Mengen, dann ist auch $A \times B$ abzählbar.
4. Es sei $A_k, k \in I$, eine höchstens abzählbare Menge und Indexmenge I sei abzählbar oder endlich, dann ist $(\bigcup_{k \in I} A_k)$ endlich oder abzählbar.

Satz 4.2: Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Satz 4.3: $A \neq \varnothing, \exists b_1, b_2 \in A, b_1 \neq b_2$, dann wird definiert $\mathcal{F} = \{f : f\colon \mathbb{N} \to A\}$. $\mathcal{F}$ ist nicht abzählbar.

5 Zahlenfolgen

5.1 Grundbegriffe

Definition 5.1: Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt komplexe Zahlenfolge. $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}, a_n \in \mathbb{C}$. Falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}$ spricht man von einer reeller Zahlenfolge. Mitunter auch $a = (a_n)_{n=k}^{\infty}, k \in \mathbb{N}$.

Definition 5.2: Eine Zahlenfolge heißt Nullfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon)$ existiert, so dass gilt: $\forall n > N(\varepsilon) : |a_n| < \varepsilon$.

Definition 5.3: Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in I}$ heißt beschränkt, wenn $\{a_n : n \in I\}$ beschränkt ist. Eine reelle Zahlenfolge heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn $\{a_n : n \in I\}$ nach oben (unten) beschränkt ist.

Satz 5.1: (a_n) und (b_n) seien Nullfolgen. (c_n) sei eine beschränkte Zahlenfolge, dann gilt: $(a_n + b_n)$ ist eine Nullfolge und $(a_n c_n)$ ist ebenfalls eine Nullfolge.

Definition 5.4: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt *konvergent*, wenn eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $(a_n - a)$ Nullfolge ist, (a_n) strebt gegen a (konvergiert gegen a) und man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a, a_n \to a$, a nennt man Grenzwert (Limes).

Satz 5.2: Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

Satz 5.3: Seien (a_n) und (b_n) konvergente Zahlenfolgen, wobei $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gelten möge. Dann gilt

1. $(a_n + b_n) \to (a + b)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda a_n) \to \lambda a$
3. Falls $b \neq 0$, dann $(\frac{a_n}{b_n}) \to \frac{a}{b}$, dabei ist $\frac{a_n}{b_n}$ nur für $b_n \neq 0$ definiert.

4. Falls $(a_n), (b_n)$ reelle Zahlenfolgen sind und $a_n \leq b_n$ gilt für $n \geq N_0$, dann ist $a \leq b$.

Definition 5.5: Jede Zahlenfolge, die nicht konvergiert, heißt divergent. Bei reellen Zahlenfolgen sagen wir, diese Zahlenfolge divergiert gegen $+\infty$ $(-\infty)$, falls zu jeder beliebig großen (kleinen) Zahl $K > 0$ $(K < 0)$ ein Index $N(K)$ existiert, so dass $\forall n > N(K) : a_n > K$ $(\forall n > N(K) : a_n < K)$ gilt. Man schreibt hier $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$.

Definition 5.6: Eine reelle Zahlenfolge nennen wir monoton wachsend (fallend), wenn für alle n ab einem gewissen Index n_0 gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} \leq a_n)$.

Satz 5.4: Eine reelle Zahlenfolge sei monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann ist (a_n) konvergent.

Satz 5.5: $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ existiert. Wir definieren $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n =: e$

Definition 5.7: Eine Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt einer Zahlenfolge, wenn (a_n) in einer ε-Umgebung von ζ unendlich viele Glieder der Zahlenfolge liegen, d.h. es gilt $|a_n - \zeta| < \varepsilon$ für unendlich viele Glieder.

Satz 5.6 *(Satz von Bolzano, Weierstraß)*: Jede beschränkte Zahlenfolge $(a_n)_{n=0}^{\infty}, a_n \in \mathbb{C}$, besitzt mindestens einen Häufungspunkt. Im Falle reeller, beschränkter Zahlenfolgen gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Definition 5.8: Den größtsten Häufungspunkt einer beschränkten reellen Zahlenfolge (a_n) nennt man *limes superior* und schreibt $\limsup a_n$, den kleinsten nennt man *limes inferior* und schreibt $\liminf a_n$.

Satz 5.7 *(Cauchy-Kriterium)*: Eine Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$, falls $n, m > N(\varepsilon)$. Derartige Folgen heißen Cauchy-Folgen oder Fundamentalfolgen.

Definition 5.9 *(Intervallschachtelung)*: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ seien reelle Zahlenfolgen, für alle natürlichen n gelte $a_n < b_n$, (a_n) sei monoton wachsend, (b_n) sei monoton fallend und $(a_n - b_n)$ sei Nullfolge. Dann sagen wir (a_n) und (b_n) bilden eine Intervallschachtelung und schreiben $\langle a_n, b_n \rangle$.

Satz 5.8: Eine Intervallschachtelung $\langle a_n, b_n \rangle$ definiert genau eine reelle Zahl $\xi \in \mathbb{R}$.

5.2 Allgemeine Potenzreihen

Satz 5.9: Zu jeden $p \geq 2, p \in \mathbb{N}, a \geq 0, a \in \mathbb{R}$, existiert genau eine reelle Zahl $\xi \geq 0$, so dass gilt $\xi^p = a$. Man sagt ξ ist die p-te Wurzel aus a und schreibt $\xi = \sqrt[p]{a}$.

Definition 5.10: $r \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0, (r_n) \to r$, r_n seien sämtlich rational. Dann sei $a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Satz 5.10: Zu dem $p \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $f\colon x \to x^p, x \in \mathbb{R}, x > 0$. Für f gilt:

1. $p > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^p < x_2^p$
2. $p < 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^p > x_2^p$

Diese Funktionen heißen Potenzfunktionen.
Zu jedem $a > 0, a \in \mathbb{R}$, gibt es Funktionen $g\colon x \to a^x, x \in \mathbb{R}$. Für g gilt:

1. $a > 1, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
2. $0 < a < 1, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

Diese Funktionen heißen Exponentialfunktionen.

Satz 5.11: Ist $g > 1$ und $a > 0$, so besitzt die Gleichung $g^x = a$ genau eine Lösung. Diese Lösung, nennen wir Logarithmus von a zur Basis g und schreiben $x = \log_g a$. Falls $g = e$, so sprechen wir von natürlichen Logarithmus. g heißt Basis.

6 Unendliche Reihen

6.1 Grundbegriffe

Definition 6.1: Wir nennen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ unendliche Reihe, a_n seien die Glieder der unendlichen Reihe, $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ heiße n-te Partialsumme, $r_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_j$ heiße Restsumme. (s_n) konvergiert, falls $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ existiert, dann schreiben wir $sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$. Eine Reihe, die nicht konvergiert, heißt divergent. Falls $\forall n : a_n \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, dann spricht man entsprechend der Vereinbarung über Zahlenfolgen von divergent.

Satz 6.1 *(Cauchy-Kriterium)*: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass gilt $|s_n - s_m| < \varepsilon$, falls $n, m > N(\varepsilon)$, wobei $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$.

Satz 6.2 *(Notwendiges Kriterium)*: Falls $\sum_{j=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definition 6.2: $\sum_{j=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{C}$, heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 6.3: Wenn eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

6.2 Reihen mit positiven Gliedern

Satz 6.4: Eine Reihe mit positiven Gliedern ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Satz 6.5 *(Majorantenkriterium)*: $\sum a_n, \sum c_n$ seien Reihen mit positiven Gliedern, wobei $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n \leq c_n$ gilt. $\sum c_n$ sei konvergent. Dann konvergiert auch $\sum a_n$ und es gilt $\sum a_n \leq \sum c_n$.

Satz 6.6 *(Minorantenkriterium)*: $\sum b_n, \sum d_n$ seien Reihen mit positiven Gliedern, d. h. $\forall n \in \mathbb{N} : b_n, d_n \in \mathbb{R} \wedge b_n, d_n > 0$. Weiterhin sei $\forall n : b_n \geq d_n$ und $\sum d_n$ divergiere, dann divergiert auch $\sum b_n$. ($\sum_n^{\infty} d_n$ heißt divergente Minorante.)

Satz 6.7 *(Quotientenkriterium)*: $\sum a_n$ sei eine unendliche Reihe, $a_n \in \mathbb{C}$, ist $a_n \neq 0$ ab einem n_0 und existiert ein festes $q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$, so dass gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ für alle $n > N \geq n_0$, dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Gilt dagegen $\forall n > N : |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, dann ist $\sum a_n$ divergent.

Satz 6.8 *(Wurzelkriterium)*: $\sum a_n, a_n \in \mathbb{C}$. Gibt es ein $q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$, so dass für ein n_0 gilt $\forall n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Falls $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ für alle $n \geq N$, dann ist $\sum a_n$ divergent.

6.3 Reihen mit alternierenden Vorzeichen

Definition 6.3: Eine Reihe $\sum a_n, a_n \in \mathbb{R}$, heißt Reihe mit alternierenden Gliedern, falls $\forall n : a_n a_{n+1} < 0$.

Satz 6.9 *(Leipniz-Regel)*: Ist $\sum a_n$ eine alternierende Reihe und gilt 1. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ und 2. $\forall n : |a_{n+1}| < |a_n|$, so konvergiert $\sum a_n$.

6.4 Rechnen mit unendlichen Reihen

Satz 6.10: $\sum a_n, \sum b_n$ seien konvergente Reihen, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\sum(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \sum a_n + c_2 \sum b_n$. Insbesondere konvergiert $\sum(c_1 a_n + c_2 b_n)$.

Satz 6.11: Konvergieren Reihen $\sum a_n$, so darf man beliebig Klammern setzen.

Definition 6.4: $\sum b_n$ heißt Umordnung von $\sum a_n$, wenn eine Bijektion Φ von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ existiert, so dass gilt $b_n = a_{\Phi(n)}$.

Satz 6.12: Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, dann auch jede Umordnung von $\sum a_n$, d. h. $\sum a_{\Phi(n)}$ ist absolut konvergent und hat dieselbe Summe.

Satz 6.13 *(Großer Umordnungssatz)*: M sei eine abzählbare Menge $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_i \cap I_j = \varnothing$ für $i \neq j$. $\sum_{\alpha\in M} a_\alpha$ sei absolut konvergent, d. h. es gibt eine Bijektion Φ, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ absolut konvergent ist, dann gilt $\sum_{\alpha\in M} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha\in I_j} a_\alpha$ für jede beliebige Zerlegung von M.

Satz 6.14 *(Cauchy-Produkt)*: Sind $\sum a_n, \sum b_n$ absolut konvergent, so gilt $(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j$, wobei die rechtsstehende Reihe absolut konvergiert.

7 Reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

7.1 Stetige Funktionen

Definition 7.1: $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, X \neq \varnothing$, f heißt in $x_0 \in X$ stetig, wenn für alle Zahlenfolgen $(x_n), x_n \in X$, mit $(x_n) \to x_0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Falls für jede Zahlenfolge $(x_n) \to x_0$ der $\lim_{n\to\infty} f(x_0)$ existiert und ein und derselbe Wert ist, dann nennen wir diesen *limes* der Funktion. Andernfalls heißt f in x_0 unstetig.

Satz 7.1: Eine Funktion $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, X \neq \varnothing$, ist genau dann in $x_0 \in X$ stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ und $x \in X$.

Satz 7.2: f, g seien zwei reelle Funktionen, die in $D \subseteq \mathbb{R}, D \neq \varnothing$ definiert seien. $x_0 \in D$ und f und g seien in x_0 stetig, dann sind auch die Funktionen $(f + g)$, $(f \cdot g)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha f$ in x_0 stetig. Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.

Satz 7.3: $g\colon X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \varnothing, f\colon Y \to \mathbb{R}, Y \subseteq \mathbb{R}, Y \neq \varnothing, g(X) \subseteq Y$, ist dann $g(x)$ in $x_0 \in X$ stetig und $f(x)$ in $g(x_0) \in Y$ stetig, dann ist auch $f(g(x))$ stetig in x_0.

Definition 7.2: Die reellwertige Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}, M \neq \varnothing$, heißt in M stetig, falls f in allen Punkten von M stetig ist.

Satz 7.4 *(Zwischenwertsatz von Bolzano):* Eine auf einem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion nimmt dort jeden beliebigen Wert ξ an, der zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt.

Satz 7.5: $f\colon M \to \mathbb{R}, M \neq \varnothing, M \subseteq \mathbb{R}$, f sei stetig auf M. Gibt es ein $x_0 \in M$, so dass gilt $f(x_0) > 0$, dann gibt eine ε-Umgebung von x_0, so dass gilt $\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap M : f(x) > 0$.

Definition 7.3: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen, wenn zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq M$ gilt.

Definition 7.4: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn jede Folge von Zahlen aus M, die konvergiert, einen Grenzwert hat, der in M liegt.

Satz 7.6: $M \subseteq \mathbb{R}$. M ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathbb{R} \setminus M$ offen ist.

Definition 7.5: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt kompakt, wenn jede beliebige Folge aus M eine konvergente Teilfolge enthält, deren Grenzwert in M liegt.

Satz 7.7: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 7.8: Eine auf einem kompakten Definitionsbereich $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \varnothing$, definierte und stetige Funktion $f(x)$ hat dort einen größten und kleinsten Funktionswert, d.h. es gibt ξ, η, so dass gilt $\forall x \in M : f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)$.

Definition 7.6: $M \subseteq \mathbb{R}$, gibt es zu jedem $x \in M$ eine offene Menge G_x, so dass gilt $x \in G_x$, dann sagt man die Menge aller G_x bildet eine Überdeckung der Menge M. $M \subseteq \bigcup_{x \in M} G_x = G$. Falls diese Überdeckung G eine endliche Teilmenge enthält, die ebenfalls schon M überdeckt, so sagt man, G enthält eine endliche Überdeckung.

Satz 7.9 *(Heine-Borel'scher Überdeckungssatz*[1]*):* Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung dieser Menge durch offene Mengen eine endliche Überdeckung enthält.

Definition 7.7: $f(x)\colon X \to \mathbb{R}, \varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$, f heißt auf X gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ existiert, so dass $\forall x, y \in X : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, falls nur $|x - y| < \delta(\varepsilon)$.

Satz 7.10 *(E. Heine 1872):* Eine auf einem kompakten Definitionsbereich stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

Definition 7.8: $f\colon X \to \mathbb{R}, \varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$, ξ sei ein Häufungspunkt von Punkten des Definitionsbereichs X von f. Wenn dann für jede beliebige Folge $(x_n), x_n \in X, x_n \to \xi$, die zugehörige Folge von Funktionswerten $(f(x_n))$ konvergiert und ein und denselben Grenzwert hat, dann heißt dieser Wert Grenzwert der Funktion für $x = \xi$: $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Satz 7.11: Es existiere $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$, dann gilt
$\lim_{x\to\xi} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to\xi} f(x) + g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x)$
$\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = (\lim_{x\to\xi} f(x))(\lim_{x\to\xi} g(x))$
Falls $\lim_{x\to\xi} g(x) \neq 0$, dann gilt auch $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\lim_{x\to\xi} g(x)}$. Falls $f(x) < g(x), \forall x \in U_\varepsilon(\xi)$, dann gilt $\lim_{x\to\xi} f(x) < \lim_{x\to\xi} g(x)$.

Definition 7.9: Ist $f(x)$ für beliebig große x definiert und gilt $\exists a \in \mathbb{R}$, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $K > 0$ existiert, so dass gilt $|f(x) - a| < \varepsilon$, falls $x > K$, dann sagt man $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

Definition 7.10: Eine reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, X \neq \varnothing, X \subseteq \mathbb{R}$, heißt auf X monoton wachsend, wenn gilt $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Eine derartige Funktion heißt monoton fallend, wenn gilt $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Steht für sämtliche $x_1 < x_2$ das Kleinerzeichen (Größerzeichen), so spricht man von stetiger Monotonie.

Satz 7.12: Die Funktion $f(x)$ sei auf dem Definitionsbereich $D(f)$ streng monoton und stetig, dann existiert auf dem Wertebereich $W(f)$ die Umkehrfunktion, diese ist stetig und im selben Sinne monoton.

7.2 Potenzreihen

Definition 7.11: Eine unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \forall a_n \in \mathbb{C}, z, z_0 \in \mathbb{C}$, heißt Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0. Die a_n heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

Satz 7.13: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert absolut für alle z mit $|z - z_0| < r$. Diese Reihe divergiert für $|z - z_0| > r$. Dabei heißt r Konvergenzradius und es gilt $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Falls $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, dann setze man $r = \infty$, falls $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, dann setze $r = 0$. Falls ab einem gewissen n gilt $|a_n| \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ existiert, dann gilt auch $r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$.

Satz 7.14: Die durch eine Potenzreihe definierte Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ist im Inneren der Konvergenzkreisscheibe $|z| < r$ stetig.

Satz 7.15 *(Identitätssatz für Potenzreihen):* Gegeben seien zwei Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ mit positiven Konvergenzradien. Gilt dann $f(z_j) = g(z_j)$ in einer Punktfolge (z_j) mit $\lim_{j\to\infty} z_j = z_0$, dann gilt $f(z) = g(z)$ für alle z.

Satz 7.16 *(Einsetzen einer Potenzreihe):* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r_1 > 0$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r_2 > 0$. Dann hat $f(g(z))$ einen gewissen Konvergenzradius, falls gilt $|b_0| < r_1$.

Satz 7.17: Es gelte $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < r, r > 0$, dann gibt es — falls $a_0 \neq 0$ — eine Umgebung von $z = 0$, so dass dort gilt $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

7.2.1 Elementare transzendente Funktionen

Definition 7.12: Für alle $z \in \mathbb{C}$ werden folgende Funktionen definiert: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

8 Differenzialrechnung für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

8.1 Begriff der Ableitung – einfache Eigenschaften

Definition 8.1: $f(x)$ sei in $U_\varepsilon(x_0)$ definiert, $x_0 \in \mathbb{R}$, dann heißt $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ Differenzialquotient von f an der Stelle x_0. Wenn $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert, dann sagt man f ist in x_0 differenzierbar und schreibt $f'(x_0) = \frac{df}{dx}\big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Satz 8.1: $f(x)$ sei in $x_0 \in D(f)$ differenzierbar, dann ist $f(x)$ in x_0 stetig.

Definition 8.2: $f(x)$ hat an der Stelle $x_0 \in D(f)$ ein lokales Extremum, wenn eine ε-Umgebung von x_0 existiert, so dass gilt $\forall x \in U_\varepsilon \cap D(f) : f(x) \leq f(x_0)$ oder aber $\forall x \in U_\varepsilon \cap D(f) : f(x) \geq f(x_0)$. Im ersten Fall spricht man von lokalen Maximum, im zweiten Fall von lokalen Mininum. Falls nie – außer für $x = x_0$ – die Gleichheit gilt, spricht man auch von strengen Extremum.

Satz 8.2: $f(x)$ habe in $x_0 \in D(f)$ ein lokales Extremum und es existiere ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subset D(f)$. Weiterhin sei $f(x)$ in $x_0 \in D(f)$ differenzierbar, dann gilt $f' = 0$.

Satz 8.3: $f(x)$ sein in $U_\varepsilon(x_0)$ definiert. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn für $(x_0 + a) \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt $\exists \delta(h), a \in \mathbb{R}$, so dass $f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\delta(h)$, wobei $\delta(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Bemerkung: $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\delta(h)$ ist die Weierstraß'sche Zerlegungsformel.

Definition 8.3 *(einseitige Ableitung):* $f(x)$ sei in $[x_0, x_0 + \varepsilon], \varepsilon > 0$ (bzw. $\varepsilon < 0$), definiert. Existiert $\lim_{h\to+0(h\to-0)} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, dann sagt man es existiert die einseitige Ableitöung von $f(x)$ an der Stelle x_0 und schreibt $f'_+(x_0)$ bzw. $f'_-(x_0)$.

Bemerkung: Wenn f differenzierbar ist, so gilt $f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0)$.

8.2 Differenzialregeln

Satz 8.4: Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ seien in $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ differenzierbar, dann gilt

1. $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ (Konstantenregel)
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Falls $g(x_0) \neq 0$, so gilt $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Satz 8.5 *(Kettenregel):* Die Funktion f sei in x_0 differenzierbar und die Funktion g sei in $f(x_0)$ definiert und dort differenzierbar, dann gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ist in $x = x_0$ differenzierbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = \frac{dg}{df}\big|_{f=f(x_0)} \frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}$.

[1] Eduard Heine 1821 - 81, Emil Borel 1871 - 1956

Satz 8.6 ***(Ableitung der Umkehrfunktion):*** $f(x)$ sei streng monoton in einer ε-Umgebung von x_0 und $f'(x_0)$ existiere. Dann existiert $f^{-1}(f)$ in einer Umgebung von $f(x_0)$ und es gilt

$$\frac{df^{-1}}{df}\Big|_{f=f_0} = \frac{1}{\frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}}.$$

8.3 Der Mittelwertsatz der Differenzialrechung

Definition 8.4: Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Intervall differenzierbar, wenn diese Funktion in den inneren Punkten (d. h. Punkte, die mit einer gewissen Umgebung zum Intervall gehören) differenzierbar ist und in den möglicherweise vorhandenen Randpunkten einseitig differenzierbar ist.

Satz 8.7 ***(Mittelwertsatz der Differnzialrechnung):*** $f(x)$ sei in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass gilt $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Satz 8.8 ***(Satz von Rolle[2]):*** Ist f in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar und gilt $f(b) = f(a)$, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass gilt $f'(\xi) = 0$.

Bemerkung(Lipschitzbedingung): Wenn f stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b) und $|f'(x)| \le L$, dann folgt $|f(x_0+h) - f(x_0)| \le L|h|$ mit $x_0, x_0+h \in (a,b)$.

Satz 8.9 ***(Verallgemeinerter MWS):*** f, g seien in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Weiterhin gelte $\forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$. Dann gilt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, wobei $\xi \in (a,b)$.

Satz 8.10 ***(Regel von l'Hospital):*** Die Funktionen f und g seien in $I_1 = (b,a)$ bzw. in $I_2 = (a,c), b < a < c$ ($a = \pm\infty$ ist möglich), differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I_1 \cup I_2$ und es sei
1. $\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = \lim_{x\to a\pm 0} g(x) = 0$ oder
2. $\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = \lim_{x\to a\pm 0} g(x) = \pm\infty$,
dann gilt $\lim_{x\to a\pm 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a\pm 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls $\lim_{x\to a\pm 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

8.4 Höhere Ableitungen

Definition 8.5: Eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion $f(x)$, deren Ableitung dort stetig ist, nennt man in I stetig differenzierbar. Besitzt f in I n Ableitungen und ist die n-te Ableitung in I stetig, so sagt man f ist in I n-mal stetig differenzierbar.

Definition 8.6: I sei ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^n(I) = \{f : f\colon I \to \mathbb{R}, f \text{ sei in } I\ n\text{-mal stetig differenzierbar}\}$. Falls Randpunkte von I vorliegen, dann wird dort einseitige Differenzierbarkeit verlangt, falls I unbeschränkt ist, dann heißt dies Differenzierbarkeit in allen endlichen Punkten.
$\mathcal{C}^0(I) = \{f : f\colon I \to \mathbb{R}, f \text{ ist stetig auf } I\}$
$\mathcal{C}^\infty(I) = \{f : f\colon I \to \mathbb{R}, f \text{ ist beliebig oft differenzierbar auf } I\}$

8.5 Taylor-Polynom und Taylorreihen

Satz 8.11 ***(Satz von Taylor):*** I sei ein Intervall und $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, $x_0, x_0+h \in I$, dann gilt $f(x+h) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} h^j + R_n$, $R_n = h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}$, wobei $\theta \in (0,1)$. $\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} h^j$ heißt Taylorpolynom, R_n heißt Restglied von Lagrange, x_0 ist der Entwicklungspunkt.

Satz 8.12 ***(Taylorreihe):*** I sei ein Intervall, $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $x_0, x_0+h \in I$, dann gilt $f(x_0+h) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} h^j$ genau dann, wenn $R_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dies ist der Fall, wenn $\forall x \in I : |f^{(n)}(x)| \le K \cdot C^n$, K, C konstant, $K, C > 0$ fest.

8.6 Potenzreihe und Taylorreihe

Satz 8.13 ***(Transformationssatz):*** Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ habe den positiven Konvergenzradius r, $x_1 \in (x_0 - r, x_0 + r)$, dann gilt für $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0|$: $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^\infty b_k(x-x_1)^k$ mit $b_k = \sum_{n=k}^\infty \binom{n}{k} a_n(x_1-x_0)^{n-k}$.

Satz 8.14 ***(Differensation einer Potenzreihe):*** Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$, $|x - x_0| < r$, $r > 0$, $I = \{x : |x - x_0| < r\}$. Dann ist $f \in C^\infty(I)$ und die Ableitungen erhält man durch "gliedweises" Differenzieren der Potenzreihe.

[2] M. Rolle, 1652 - 1719

8.7 Kurvendiskusion

Satz 8.15: $f \in \mathcal{C}^n(U_\varepsilon(x_0))$, $n \ge 2$, $f^{(i)}(x_0) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann gilt: Falls n ungerade ist, liegt an der Stelle x_0 kein lokales Extremum vor. Wenn n gerade ist, dann liegt ein lokales Extremum vor. Falls $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann liegt lokales Minimum vor, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann liegt ein lokales Maximum vor.

Definition 8.7: $f(x)$ heißt konvex auf dem Intervall I, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ und $\forall \lambda \in (0,1)$ gilt: $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$. Steht jedoch "$\ge$" für "$\le$", dann heißt f konkav.

Satz 8.16: I sei ein Intervall, $f \in \mathcal{C}^1(I)$. $f(x)$ ist konvex auf I bzw. konkav auf I, wenn f' auf I monoton wachsend bzw. fallend ist auf I.

Definition 8.8: $x_0 \in D(f)$ heißt Wendepunkt, wenn f in einer linksseitigen Umgebung von x_0 $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, $\varepsilon > 0$) und in einer rechtsseitigen Umgebung von x_0 $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$) unterschiedliches Konvexverhalten hat.

Satz 8.17: $f \in \mathcal{C}^n(U_\varepsilon(x_0))$. Gilt $f''(x_0) = 0$ und die erste von 0 verschiedene (höhere) Ableitung an der Stelle x_0 ist von ungerader Ordnung, so liegt an der Stelle x_0 ein Wendepunkt vor.

8.8 Funktionenfolgen, Funktionenreihen

Definition 8.9: $\{f_n(x)\}$, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt dies eine Funktionenfolge. Durch $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ wird im Falle der Existenz eine Funktion auf X definiert. Man sagt im Falle der Existenz: $\{f_n(x)\}$ konvergiert punktweise gegen $f(x)$.

Definition 8.10 ***(Gleichmäßige Konvergenz):*** $\{f_n(x)\}$, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$. Falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, falls $n > N(\varepsilon)$ und alle $x \in X$, dann sagt man $\{f_n(x)\}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x)$.

Satz 8.18 ***(Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz):*** $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}$. $\{f_n(x)\}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f(x)\colon D \to \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass $\forall m, n > N(\varepsilon) : |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$, für alle $x \in D$.

Satz 8.19: $\{f_n(x)\}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}$. $f_n(x)$ seien stetig auf D und konvergieren gleichmäßig auf D gegen $f(x)$. Dann ist $f(x)$ stetig auf D.

Satz 8.20: $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}$. $\sum f_n(x)$ konvergiert auf D genau dann gleichmäßig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass für $n > m > N(\varepsilon)$ $\forall x \in D : |s_n - s_m| = |\sum_{j=m+1}^n f_j(x)| < \varepsilon$.

Satz 8.21 ***(Weierstraß'sches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz):*** $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $\forall n : |f_n(x)| \le a_n$ und $\sum a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum f_n(x)$ gleichmäßig auf D.

Bemerkung: Riemann'sche Vermutung: Alle komplexen Nullstellen von $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$, $z \in \mathbb{C}$, haben den Realteil $\frac{1}{2}$.

9 Integralrechnung für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

9.1 Vorbemerkungen, Grundbegriffe

Definition 9.1: Es sei $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, dann heißt $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a,b]$ in n Teilstücke $[x_j, x_{j+1}]$, $|x_{j+1} - x_j| = |I_j|$ ist die Länge von I_j.

Definition 9.2: $f(x)$ sei auf $I = [a,b]$ beschränkt, d. h. $\forall x \in I : |f(x) \le K$. Z sei eine Zerlegung von I, $m_k = \inf_{x\in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x\in I_k} f(x)$, dann heißt $s(Z,f) = \sum_{k=1}^n m_k|I_k|$ Untersumme von f bzgl. Z, $S(Z,f) = \sum_{k=1}^n M_k|I_k|$ Obersumme von f.

Definition 9.3: Z, Z', Z'' seien Zerlegungen des Intervalls I. Z' heißt Verfeinerung von Z, falls Z' sämtliche Teilpunkte von Z enthält und noch weitere. Man schreibt: $Z' < Z$. Die Zerlegung Z, die genau die Teilpunkte von Z' und Z'' enthält, bezeichnet man als Überlagerung von Z' und Z'', $Z = Z' + Z''$.

9.2 Riemann-integrierbare Funktionen

Definition 9.4: $I = [a,b]$ sei ein Intervall, $f(x)$ sei auf I beschränkt. Z sei eine beliebige Zerlegung von I. Dann heißt $\sup_Z s(Z) = J_*$ unterer Darboux'sches Integral, $\inf_Z S(Z) = J^*$ oberes Darboux'sches Integral. $f(x)$ heißt auf I Riemann-integrierbar genau dann, wenn $J_* = J^*$. $\int_a^b f(x)dx = J_* = J^*$, f Integrand, a ist untere Integrationsschranke, b obere Integrationsschranke.

Satz 9.1 ***(Riemann'sches Integrabilitätskriterium):*** Die beschränkte Funktion $f(x)$ ist genau dann auf I R.-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z existiert, so dass gilt $S(Z) - s(Z) < \varepsilon$.

Satz 9.2: $\{Z_n\}$ sei eine Folge von Zerlegungen mit den Intervallen $I_k^{(n)}$. Ist $\{Z_n\}$ eine Zerlegungsfolge mit $|Z_n| = \max_k |I_k^{(n)}| \to 0$ mit $n \to \infty$, dann gilt für beliebige auf I beschränkte Funktionen $f(x)$: $\lim_{n\to\infty} s(Z_n) = J_*$, $\lim_{n\to\infty} S(Z_n) = J^*$.

Satz 9.3: Jede auf $I = [a, b]$ stetige monotone Funktion, die beschränkt ist, ist R.-integrierbar. Weiterhin ist jede auf I beschränkte Funktion R.-integrierbar, die bis auf endlich viele Stellen stetig ist.

Definition 9.5: $I = [a, b]$ und auf I sei f beschränkt. Weiterhin sei $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von I und $\xi_k \in I_k$, $k = 1, \ldots, n$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, dann heißt $\sigma(Z, f, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ Riemann'sche Zwischensumme von f bei der Zerlegung Z und ξ_k.

Satz 9.4: Die beschränkte Funktion f ist auf dem Intervall $[a, b]$ genau dann R.-integrierbar, wenn zu jeder Zerlegungsfolge $\{Z_n\}$ mit $|Z_n| \to 0$ auch $\sigma(Z_n, f, \xi)$ konvergiert. Im Falle der Riemann-Integrierbarkeit gilt dann $\sigma(Z_n, f, \xi) \to \int_a^b f(x)dx$.

9.3 Eigenschaften des Riemann-Integrals, Mittelwertsätze

$R(I) = \{f : f{:}\, I \to \mathbb{R}, f \text{ beschränkt}, f \text{ sei R.-integrierbar}\}$

Satz 9.5: f und g seien beschränkt und $f, g \in R(I)$, dann gilt

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f(x) + \beta g(x) \in R(I)$
2. $\forall x \in I : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
3. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, Dreiecksungleichung
4. $\forall x \in I : |f(x)| \leq K \Rightarrow |\int_a^b f(x)dx| \leq K|b - a|$
5. $a < c < b, \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
6. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
7. $\tilde{f}(x) = f(x)$ bis auf endlich viele Stellen in I und $\tilde{f}(x)$ sei ebenfalls beschränkt auf I, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx$

Satz 9.6 ***(MWS der Integralrechnung):*** f sei auf $I = [a, b]$ integrierbar, dann gilt $m \leq \int_a^b \frac{f(x)dx}{b-a} \leq M$, $m = \inf_{x\in I} f$, $M = \sup_{x\in I}$.

Satz 9.7 ***(erweiterer MWS der Integralrechung):*** $f, g \in R(I)$. Es sei $\forall x \in I : g \geq 0$ oder $\forall x \in I : g \leq 0$. Dann existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$, so dass $\inf_{x\in I} f \leq \mu \leq \sup_{x\in I} f$ und $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

9.4 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechung

Satz 9.8: Ist $f \in C[a, b]$, dann gilt $\frac{d}{dx} \int_a^x f(y)dy = f(x)$.

Satz 9.9 ***(Hauptsatz der Diff.- und Integralrechung):*** $F'(x) \in C[a, b]$, dann gilt $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$.

Definition 9.6: $F(x)$ heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral zu $f(x)$ auf dem Intervall I, wenn gilt $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$. Man schreibt $F(x) = \int f(y)dy$.

9.5 Unbestimmte Integrale

Tabelle der Grundintegrale, z. B. $\int \frac{1}{x} = \ln |x| + C$

9.5.1 Integrationsregeln

Satz 9.10 ***(Partielle Integration):*** $f, g \in R(I)$, $f, g \in C^1(I)$, dann gilt: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

Satz 9.11 ***(Substitutionsregel):*** $f, g \in C^1(I)$, $I = [a, b]$, $W(g) \subseteq D(f)$. $g(x)$ sei streng monoton wachsend, dann gilt $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$, $y = g(x)$.

9.5.2 Integration der rationalen Funktionen

Definition 9.7: $p_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, heißt Polynom n-ten Grades oder ganzrationale Funktion. Sind alle $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, dann heißt p_n reelles Polynom, andernfalls heißt p_n komplexes Polynom. $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ heißt rationale Funktion, falls p_n, q_m Polynome n-ten bzw. m-ten Grades sind. Ist $n < m$, dann heißt f echt gebrochen rationale Funktion, andernfalls heißt f unecht gebrochen rationale Funktion.

Satz 9.12 ***(Fundamentalsatz der Algebra):*** Jedes komplexe Polynom positiven Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Satz 9.13 ***(Partialbruchzerlegung):*** Es sei $f(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)}$ eine echt gebrochene rationale Funktion und $p_n(z), q_m(z)$ komplexe Polynome vom Grad n bzw. m $(m > n)$. $q_m(z) = a_m(z - z_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_r)^{\alpha_r}$, $\forall i \neq j : z_i \neq z_j$, $a_m \neq 0$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = m$, dann gilt $f(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)} = \frac{a_{11}}{z-z_1} + \ldots + \frac{a_{1\alpha_1}}{(z-z_1)^{\alpha_1}} + \frac{a_{21}}{z-z_2} + \ldots + \frac{a_{r\alpha_r}}{(z-z_r)^{\alpha_r}}$, wobei die $a_{ij} \in \mathbb{C}$ eindeutig bestimmt sind.

Satz 9.14 ***(Partialbruchzerlegung einer reellen Funktion):*** Es sei $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ eine echt gebrochene rationale Funktion, wobei $q_m(x) = a_m(x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_r)^{\alpha_r}(x^2 + A_1 x + B_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + A_s x + B_s)^{\beta_s}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $a_m \neq 0$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j + 2\sum_{j=1}^s \beta_j = m$, $p_n(x)$ und $q_m(x)$ seien reelle Polynome, dann gilt $f(x) = \frac{a_{11}}{x-x_1} + \ldots + \frac{a_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \frac{a_{21}}{x-x_2} + \ldots + \frac{a_{r\alpha_r}}{(x-x_r)^{\alpha_r}} + \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2 + A_1 x + B_1} + \ldots + \frac{b_{s\beta_s}x + c_{s\beta_s}}{(x^2 + A_s x + B_s)^{\beta_s}}$, wobei die Koeffizienten sämtlich reell und eindeutig bestimmt sind.

Satz 9.15 ***(elementar integrierbare Funktionen):*** $R(x, y)$ sei eine rationale Funktion in x, y. Dann sind folgende Funktionsklassen elementar integrierbar: 1. $R(x, \sqrt[k]{ax + b})$, $k \in \mathbb{N}$, 2. $R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, 3. $R(e^{ax})$ 4. $R(\sinh ax, \cosh ax)$ 5. $R(\sin ax, \cos ax)$ 6. $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ 7. $R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})$.

9.6 Uneigentliche Integrale

9.6.1 Unbeschränktes Integrationsintervall

Definition 9.8: $\int_a^b f(x)dx$ existiert als R.-Integral für beliebige $b > a$, dann heißt $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ im Falle der Konvergenz uneigentliches Integral von $f(x)$ über $[a, \infty)$. Andernfalls heißt das Integral divergent.

Satz 9.16 ***(Konvergenzkriterium von Cauchy):*** $f(x)$ sei über $[a, b]$ eigentlich R.-integrierbar für beliebige $b > a$. Das Integral $\int_a^\infty f(x)$ existiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > a$ existiert, so dass gilt $\forall x_1, x_2 > \delta(\varepsilon) : |\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx| < \varepsilon$.

Definition 9.9: Das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ heißt absolut konvergent, wenn $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konvergiert.

Satz 9.17 ***(Majorantenkriterium):*** Das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ ist absolut konvergent, wenn es eine Funktion $g(x)$ gibt mit $\forall x \in [a, \infty)$: $|f(x)| \leq g(x)$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergiert.

Satz 9.18: $f(x)$ sei für $x \geq p$, $p \in \mathbb{N}_0$, monoton fallend und nicht negativ, dann besteht die folgende Ungleichung:
$\sum_{n=p+1}^\infty f(n) \leq \int_p^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=p}^\infty f(x)$.

9.6.2 Integrale unbeschränkter Funktionen

Definition 9.10: $f(x)$ sei auf $[a, b-\varepsilon]$ beschränkt (mit $\varepsilon > 0$ beliebig) und im Riemann'schem Sinne integrierbar. Bei b sei f unbeschränkt, dann wird definiert: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Bemerkung: Entsprechende Sätze und Definitionen sind auch hier gültig.

10 $\mathbb{R}^n$, metrischer und normierter Raum

10.1 Der n-dimensionale, euklidische Raum

Definition 10.1: $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. $\mathbb{R}^n$ ist Vektorraum über den Körper der reellen Zahlen, d. h. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : x + y = y + x$, $\exists o \in \mathbb{R}^n \forall x \in \mathbb{R}^n : o + x = x + o = x$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : (x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \exists (-x) \in \mathbb{R}^n : x + (-x) = o$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n : 1x = x$.
Als euklidische Norm zweier Elemente $x, y \in \mathbb{R}^n$ wird bezeichnet:
$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, $\|x - o\|$ entspricht Abstand zum Koordinatenursprung.
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, Dreiecksungleichung.
$xy = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, Skalarprodukt.
$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$, Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.
I ist Intervall im $\mathbb{R}^n$, wenn $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ mit eindimensionalen Intervallen I_j.
ε-Umgebung $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$.

Definition 10.2: Eine Zahlenfolge $\{x^{(k)}\}$, $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, heißt genau dann konvergent gegen $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass $\forall k > N(\varepsilon) : \|x^{(k)} - x_0\| < \varepsilon$.

Satz 10.1: Eine Zahlenfolge $\{x^{(k)}\}$ ist genau dann konvergent gegen x_0, wenn jede Komponente $x_j^{(k)}$ der Glieder der Zahlenfolge gegen jede Komponente $x_{0,j}$ von x_0 konvergiert.

Satz 10.2 ***(Satz von Bolzano-Weierstaß):*** Jede beschränkte Zahlenfolge des $\mathbb{R}^n$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt und somit existiert eine Teilfolge dieser Zahlenfolge, die konvergiert.

Satz 10.3 ***(Cauchy-Kriterium für Zahlenfolgen):*** Eine Zahlenfolge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent, wenn diese Zahlenfolge Cauchy-Folge ist, d. h. wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass $\|x^{(m)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$, falls $m, n > N(\varepsilon)$.

Bemerkung: $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M heißt offen, wenn $\forall x \in M \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x)$, so dass $U_\varepsilon(x) \subset M$ gilt.
Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn jeder Grenzwert von Gliedern dieser Mengen zur Menge gehört. $\mathbb{R}^n$ und $\varnothing$ sind offen und abgeschlossen.
$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn aus jeder beliebigen Folge aus M eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann, deren Grenzwert zu M gehört.
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 10.4 ***(Satz von Heine-Borel):*** Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede ihrer offenen Überdeckungen eine endliche Überdeckung enthält.

Bemerkung: Gerade g im $\mathbb{R}^n$: $g = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + \lambda y, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $x_0, y \in \mathbb{R}^n$ fest; Verbindungsstrecke von $x, y \in \mathbb{R}^n$: $\overline{xy} = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0,1]\}$; Streckenzug/Polygonzug (endlich viele Geradenstücke): $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcup_{j=1}^{n-1} \overline{x_j x_{j+1}}$
Eine Punktmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn zu je zwei Punkten aus M immer ein Polygonzug existiert, der diese Punkte verbindet und vollständig in M verläuft.
Ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$ ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Punktmenge.

10.2 Der normierte Raum

Definition 10.3: $\mathcal{V} \neq \varnothing$ sei ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Auf $\mathcal{V}$ sei eine Funktion definiert $\|.\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
1. $\|\mathbf{0}\| = 0$ und $\|x\| > 0$, falls $x \in \mathcal{V}$ und $x \neq \mathbf{0}$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{V} : \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
3. $\forall x, y \in \mathcal{V} : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$\|.\|$ heißt Norm auf $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}$ heißt normierter Vektorraum.

10.3 Der metrische Raum

Definition 10.4: $X \neq \varnothing$ sei eine Menge. Auf $X \times X$ sei eine reelle nichtnegative Abbildung $d(.,.)$ definiert mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\forall x, y \in X : d(x,x) = 0,\ d(x,y) > 0$ für $x \neq y$

(2) $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$

(3) $\forall x, y, z \in X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

d heißt Metrik und X mit der Metrik heißt metrischer Raum.

11 Reelle Funktionen des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$

11.1 Lineare Funktionen

Bemerkung: Mit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ ist $f : x \in \mathbb{R}^n \to Ax + b$ eine lineare Abbildung.

11.2 Graphische Darstellung

11.3 Polynome des $\mathbb{R}^n$ und Potenzreihen im mehrdimensionalen Raum

Bemerkung: Multiindex $j \in \mathbb{N}^n$; $|j| = j_1 + j_2 + \ldots + j_n$; $x \in \mathbb{R}^n$, $x^j = \prod_{k=1}^n x_k^{j_k}$

Satz 11.1: Es sei $\alpha_k = \max\{|a_j| : |j| = k\}$ und die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty \alpha_k t^k$ konvergiere für $|t| < r, r > 0$. Dann konvergiert auch $\sum_{|j|=0}^\infty a_j x^j$ für $\max_i |x_i| < r$.

Satz 11.2: Diese Reihe $\sum a_j x^j$ (vgl. Satz 11.1) konvergiert dann absolut und dann kann folglich die Summationsreihenfolge beliebig vertauscht werden.

11.4 Stetige Funktionen des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$

Definition 11.1: Eine Funktion $f\colon X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, X \neq \varnothing$, heißt stetig an der Stelle $x_0 \in X$, wenn für jede beliebige Folge $(x^{(k)})$ mit $x^{(k)} \in X$, $x^{(k)} \to x_0$ folgt: $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$. Andernfalls heißt f in x_0 unstetig.

Satz 11.3: $f, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, G \neq \varnothing$, f, g seien stetig, dann ist auch $(f+g)$, $(f \cdot g)$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ und $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ stetig auf G.

Satz 11.4: Ist $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, G \neq \varnothing$, in $x_0 \in G$ stetig und $f(x_0) > 0$, dann existiert $U_\varepsilon(x_0)$, so dass f auf $G \cap U_\varepsilon(x_0)$ ebenfalls größer Null ist.

Satz 11.5: $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, D \neq \varnothing$, f sei stetig auf D. Ist $D(f)$ kompakt, dann ist auch $W(f)$ kompakt.

Satz 11.6: Ist $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, X \neq \varnothing$, stetig auf X und ist X kompakt, dann gibt es $x_0 \in X$, so dass $f(x_0) = \min_{x\in X} f(x)$ und es gibt $y_0 \in X$, so dass $f(y_0) = \max_{x \in X} f(x)$.

Satz 11.7: Eine auf einem Gebiet definierte und stetige Funktion $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, G \neq \varnothing$, hat als Wertebereich einen einzigen Punkt oder ein offenes Intervall.

11.5 Differenzialrechnung im $\mathbb{R}^n$

11.5.1 Partielle Ableitung und totale Differenzierbarkeit

Definition 11.2: $f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, G \neq \varnothing, x_0 \in G, U_\varepsilon(x_0) \subset G$, dann heißt im Falle der Existenz

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

partielle Ableitung f_x, f_y nach x, y.

Satz 11.8: f sei in einem Gebiet $G \neq \varnothing$ des $\mathbb{R}^2$ überall partiell differenzierbar. Sind dann beide partiellen Ableitungen in G beschränkt, so ist f in G stetig.

Satz 11.9 ***(Satz von Schwarz):*** $f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, G \neq \varnothing$, f, f_x, f_y seien stetig in $U\varepsilon(x_0, y_0)$. f_{xy} existiere in $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ stetig, dann existert auch f_{yx} in (x_0, y_0) und es gilt $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Definition 11.3: Die Funktion $f\colon G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt in einem inneren Punkt $x_0 \in G$ differenzierbar oder total differenzierbar, falls gilt $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(h)$ für alle hinreichend kleine h mit $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

Satz 11.10: Ist f in einem inneren Punkt von G differenzierbar, so ist f dort stetig und sämtliche partiellen Ableitungen existieren.

Satz 11.11: Besitzt $f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sämtliche partiellen Ableitungen in $U_\varepsilon(x_0) \subset G$ und sind diese in x_0 stetig, dann ist f in x_0 differenzierbar.

Satz 11.12 ***(Verallgemeinerung der Kettenregel):*** Es sei $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon G_1 \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, wobei $f(G) \subseteq G_1$ gilt. Ist f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar, dann ist auch $g(f(x))$ in x_0 differenzierbar und es gilt $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{\partial g_i}{\partial f_j})_{p,m}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{m,n}$.

Definition 11.4 ***(Richtungsableitung):*** Sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor, $\|e\| = 1$, $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in G$, existiert dann $\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial e}\big|_{x=x_0}$, so heißt dies Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung e.

Satz 11.13: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so existiert die Ableitung in x_0 in beliegige Richtung und es gilt $\frac{\partial f}{\partial e}\big|_{x=x_0} = \mathrm{grad} f|_{x=x_0} e = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0) e_i$, $e \in \mathbb{R}^n$.

11.5.2 Mittelwertsatz und Taylor'sche Formel

Satz 11.14 ***(MWS):*** $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei auf einer offenen Menge differenzierbar, welche etwa gleich G ist. Ist $f \in \mathcal{C}^1(G)$, dann gibt es zu $x_0, x_1 \in G$, deren Verbindungsstrecke in G liege, ein ξ, welches im Inneren dieser Verbindungsstrecke liegt und es gilt $f(x_0) - f(x_1) = \mathrm{grad} f\big|_{x=\xi}(x_0 - x_1)$.

Satz 11.15 ***(Taylor-Satz):*** $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{m+1}(G)$, G sei offen. Ist $x_0 + ht \in G, 0 \leq t \leq 1$, so gilt $f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^m \frac{(\nabla h)^j}{j!} f + R_m$ mit Restglied $R_m = \frac{(\nabla h)^{m+1}}{(m+1)!} f(x_0 + \vartheta h)$, wobei $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

Satz 11.16: Ist $f: G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ und G offen, dann gilt $f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\nabla h)^j}{j!} f$, falls $R_m \to 0$ für $m \to \infty$.

Satz 11.17 ***(Hinreichende Bedingung für $R_m \to 0$):*** $W_r = \{x \in \mathbb{R}^n, |x_i| < r, i = 1, \ldots, n\}, r > 0$, $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(W_r)$ und es gelte $|D^p f| \leq p! \alpha_{|p|}$ in W_r. Weiterhin konvergiere $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$ für $|t| \leq r$. Dann konvergiert die Taylor'sche Reihe und $R_m \to 0$ im Entwicklungspunkt Null.

11.5.3 Notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrema von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definition 11.5: Ist $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine symmetrische Matrix, d. h. $\forall i,j : a_{ij} = a_{ji}$, so heißt die Funktion $Q(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j : : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ quadratische Form, die von A erzeugt wird.

Definition 11.6: Die quadratische Form $Q(x) = x^T A x$ heißt ...
... positiv definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\} : Q(x) > 0$ gilt.
... negativ definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\} : Q(x) < 0$ gilt.
... positiv semidefinit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\} : Q(x) \leq 0$ gilt.
... negativ semidefinit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\} : Q(x) \geq 0$ gilt.
Liegt keiner dieser Fälle vor, dann heißt sie indefinit.

Definition 11.7: A sei eine (n,n)-Matrix. Die $\lambda \in \mathbb{C}$, für die ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ existiert, so dass gilt $Ax = \lambda x$ heißen Eigenwerte der Matrix A und die dazugehörenden x heißen Eigenvektoren.

Satz 11.18: Die quadratische Form $Q(x) = x^T A x$ zur symmetrischen Matrix A ist genau dann positiv bzw. negativ definit, wenn sämtliche Eigenwert von A positiv bzw. negativ sind. $Q(x)$ ist genau dann positiv bzw. negativ semidefinit, wenn sämtliche Eigenwerte nichtnegativ bzw. nichtpositiv sind.

Definition 11.8: $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f hat an der Stelle $x_0 \in G$ ein lokales Extremum, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\forall x \in (U_\varepsilon(x_0) \cap G) : f(x_0) \geq f(x)$ oder $\forall x \in (U_\varepsilon(x_0) \cap G) : f(x_0) \leq f(x)$ gilt. Im ersten Fall spricht man von einem lokalen Maximum, im zweiten Fall vom lokalen Minimum. Steht nie das Gleichheitszeichen für $x \neq x_0$, dann spricht man von strengen lokalen Extrema.

Satz 11.19: $f: G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G \neq \varnothing$, grad$f$ existiere an der Stelle $x_0 \in G$, $U_\varepsilon(x_0) \subset G, \varepsilon > 0$. Hat dann f in x_0 ein lokales Extremum, dann gilt $\text{grad} f|_{x=x_0} = 0$, d. h. $\forall i = 1, \ldots, n : f_{x_i} = 0$.

Satz 11.20: Es sei $G \neq \varnothing$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, G offen, $f: G \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(G)$. In $x_0 \in G$ sei grad$f = 0$. Dann besitzt f in x_0 ein Extremum, wenn die Hesse-Matrix $H = (f_{x_i x_j})_{i,j=1}^n$ in x_0 definit ist. Ist die Hesse-Matrix in x_0 indefinit, dann liegt kein Extremum vor. Im Falle positiver Definitheit der Hesse-Matrix liegt in x_0 ein strenges Minimum vor. Im Falle negativer Definitheit der Hesse-Matrix liegt in x_0 ein strenges Maximum vor.

Satz 11.21 ***(Lagrange'sche Multiplikatorenmethode):*** Es sei $f: G \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $G \neq \varnothing$, G offen, $f \in \mathcal{C}^1(G)$, $g: G \to \mathbb{R}^m$, $g \in \mathcal{C}^1(G)$. Hat f unter der Nebenbedingung ein lokales Extremum in x_0 und ist dort der Rang der Funktionalmatrix $(\frac{\partial g}{\partial x^{(i)}})$ gleich m, so gibt es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$, so dass für die Hamilton-Funktion $H(x,\lambda) = f(x) + \lambda g$ gilt $\text{grad} H(x,\lambda)|_{x=x_0,\lambda=\lambda_0} = 0$.

11.5.4 Implizite Funktionen

Satz 11.22: $F: G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, F sei in $U_\varepsilon((x_0,y_0))$ stetig und es gelte $F((x_0,y_0)) = 0$. Bei festem x in $U_\varepsilon((x_0,y_0))$ sei F streng monoton bezüglich y in $U_\varepsilon((x_0,y_0))$, dann gibt es eine Umgebung von (x_0,y_0), so dass dort gilt $y = y(x)$ und $y(x)$ ist dort stetig.

Satz 11.23: $F: G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $G \neq \varnothing$, G offen, $(x_0,y_0) \in G$, $F \in \mathcal{C}^1(G)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}$, $F(x_0,y_0) = 0$, $F_y(x_0,y_0) \neq 0$, dann gilt $y = f(x_1,\ldots,x_n)$, $y_0 = f(x_0)$ und $F(x,f(x)) = 0$, f ist stetig und $f \in \mathcal{C}^1(U_\varepsilon(x_0))$.

Satz 11.24: $F: G \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $G \neq \varnothing$, G offen, $F \in \mathcal{C}^1(G)$. Für $(x_0,y_0) \in G, x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^m$ gilt $F(x_0,y_0) = 0$, $\det \frac{\partial F}{\partial y}\big|_{y=y_0} \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung $U_{\varepsilon_1}(x_0)$ und $U_{\varepsilon_2}(y_0)$ und eine Funktion $g: U_{\varepsilon_1} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $g \in \mathcal{C}^1(U_{\varepsilon_1}(x_0))$, so dass $F(x,g(x)) = 0, x \in U_{\varepsilon_1}(x_0)$.

12 Jordankurven und Funktionen von beschränkter Schwankung

12.1 Jordankurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 12.1: Es sei $I = [a,b]$ ein Intervall, $\Phi(t): I \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t)$ sei stetig auf I, dann heißt die Bildmenge $C = \{\Phi(t) : t \in I\}$ Kurve im $\mathbb{R}^n$.

Definition 12.2 ***(Jordankurve):*** C heißt Jordankurve, wenn Φ injektiv ist. C heißt geschlossene Jordankurve, wenn Φ für $t \in [a,b)$ injektiv ist und $\Phi(a) = \Phi(b)$. Ist $\Phi \in \mathcal{C}^1(I)$, dann heißt die Kurve glatt, stückweise glatt heißt C, wenn eine Zerlegung von I existiert, d. h. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, so dass $\Phi \in \mathcal{C}^1([t_j,t_{j+1}]), j = 0,1,\ldots,n-1$.

Satz 12.1 ***(Kurvensatz):*** Zu jeder ebenen geschlossenen Jordankurve C gibt es Gebiete G_1, G_2, so dass gilt $\mathbb{R}^2 = G_1 \cup C \cup G_2$.

Definition 12.3 ***(Länge einer Kurve):*** Durch $\Phi: [a,b] = I \to \mathbb{R}^n$ sei eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ definiert. $Z = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ sei eine Zerlegung von I, dann heißt $L(C) = \sup_Z \ell(Z)$ mit $\ell(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \|x_i - x_{i-1}\|, x_i = \Phi(t_i)$ im Falle $L(C) < \infty$ die Länge der Kurve C. Man sagt, die Kurve ist rektifizierbar.

Satz 12.2: Es sei durch $\Phi: I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve definiert, dann ist C rektifizierbar und hat die Länge $L(C) = \int_a^b \|\Phi'(t)\| = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n {\Phi'_j}^2(t)} dt$.

12.2 Funktionen von beschränkter Schwankung

Definition 12.4: $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ und $Z = (a = t_0 < \ldots < t_n = b)$ sei eine Zerlegung von I, dann heißt $\text{var}(Z) = \text{var}(Z,f) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ Variation von f bzgl. Z und I. Totalvariation heißt $V_a^b(f) = \sup_Z \text{var}(Z,f)$. Falls $V_a^b(f) < \infty$, dann heißt f von beschränkter Variation oder beschränkter Schwankung. $\mathcal{BV}(I) = \{f : f: I \to \mathbb{R}, V_a^b(f) < \infty\}$.

Satz 12.3: Sei $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$, dann gilt:

1. Ist f monoton auf I, so ist $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.
2. Gilt für f: $\exists L > 0 : \forall x,y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, dann ist $V_a^b(f) \leq L|a-b|$.
3. $f \in \mathcal{C}^1(I)$, dann gilt $V_a^b(f) = \int_a^b |f'| dt$.
4. Folglich sind monotone Funktionen und auch stetig differenzierbare Funktionen aus $\mathcal{BV}(I)$.
5. $f,g \in \mathcal{BV}(I)$, dann gilt $\lambda f, f+g, fg \in \mathcal{BV}(I)$.

Satz 12.4: Es sei $\Phi = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n): I \to \mathbb{R}^n$, dann ist die durch Φ definierte Kurve genau dann rektifizierbar, wenn sämtliche Φ_i aus $\mathcal{BV}(I)$ sind.

13 Das Riemann-Stieltjes-Integral, Kurvenintegral

13.1 Das Riemann-Stieltjes-Integral

Definition 13.1: Es sei $f,g: I = [a,b] \to \mathbb{R}$, f und g seien beschränkt und $Z = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ sei eine Zerlegung von I. Dann heißt $\sigma(Z,f,g) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})), \xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, Riemann-Stieltjes-Zwischensumme von f nach g über I. Gilt für jede beliebige Zerlegungsfolge (Z_k) mit $|Z_k| \to 0$ $\lim_{k\to\infty} \sigma(Z_k,f,g) = J$, dann heißt J Riemann-Stieltjes-Integral von f nach g über I und man schreibt $J = \int_a^b f\,dg$.

Satz 13.1: Seien $f,g: I \to \mathbb{R}$, f und g beschränkt. Dann existiert das Riemann-Stieltjes-Integral, falls
1. $f \in \mathcal{C}^0(I)$, $g \in \mathcal{BV}(I)$ oder
2. f ist Riemann-integrierbar und g genügt Lipschitz-Bedingung.

Satz 13.2: $f_1, f_2, g: I = [a,b] \to \mathbb{R}$, f_1, f_2 seien beschränkt. Dann gelten folgende Eigenschaften, falls alle auftretenden Integrale existieren:

1. $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$
2. $\int_a^b f_1(x) + f_2(x)\,dg = \int_a^b f_1(x)\,dg + \int_a^b f_2(x)\,dg$
3. $\int_a^b g\,d(f_1+f_2) = \int_a^b g\,df_1 + \int_a^b g\,df_2$
4. $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R} : \int_a^b \lambda_1 f_1\,d(\lambda_2 g) = \lambda_1 \lambda_2 \int_a^b f_1\,dg$
5. Falls $a < c < b$, dann gilt $\int_a^b f_1\,dg = \int_a^c f_1\,dg + \int_c^b f_1\,dg$.

Satz 13.3 ***(Partielle Integration):*** Es existiere $\int_a^b f\,dg$, dann existert auch $\int_a^b g\,df$ und es gilt $\int_a^b f\,dg = fg|_a^b - \int_a^b g\,df$.

Satz 13.4: f sei auf I Riemann-integrierbar und $g \in \mathcal{C}^1(I)$, dann gilt $\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

Satz 13.5 ***(MWS für Riemann-Stieltjes-Integrale, 1. MWS):*** $\int_a^b f\,dg$ existere und g sei monoton auf $I = [a,b]$. Dann gilt $\int_a^b f\,dg = \mu(g(b) - g(a))$, wobei $\inf_I f \leq \mu \leq \sup_I f$. Falls f stetig ist auf I, dann existiert ein $\xi \in I$, so dass gilt $\mu = f(\xi)$.

Satz 13.6 ***(2. MWS):*** f sei monoton und g sei stetig auf $I = [a, b]$. Dann gilt $\int_a^b f\,dg = f(a)\int_a^c dg + f(b)\int_c^b dg = f(a)(g(c) - g(a)) + f(b)(g(b) - g(c))$, wobei $c \in I$.

13.2 Kurvenintegrale

Definition 13.2 ***(Kurvenintegral 1. Art):*** Es sei $I = [a, b]$ und durch $\Phi\colon I \to \mathbb{R}^n$ sei eine rektifizierbare Kurve C gegeben, $\Phi \in \mathcal{C}(I)$. Auf C sei eine reelle Funktion g definiert. Im Falle der Existenz nennt man das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b f(\Phi(t))\,ds(t)$ von f nach der Weglängenfunktion $s(t)$ das Kurvenintegral von f über der Kurve C.

Definition 13.3 ***(Kurvenintegral 2. Art):*** Es sei $I = [a, b]$ und durch $\Phi\colon I \to \mathbb{R}^n$, $\Phi \in \mathcal{C}^0(I)$, eine rektifizierbare Jordankurve definiert. Das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b f(\Phi(t))d\Phi_k, k = 1, \dots, n$, heißt Kurvenintegral 2. Art, falls es existiert. Dabei sein f auf der durch Φ definierten Kurve gegeben.

Definition 13.4: Randpunkte des Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^n$ sind diejenigen Punkte des $\mathbb{R}^n$, in deren ε-Umgebung zu jedem $\varepsilon > 0$ Punkt von G liegen und solche Punkte des $\mathbb{R}^n$, die nicht zu G gehören. Die Menge der Randpunkte des Gebietes G heißt Rand von G. Man schreibt dafür ∂G. Das Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn keine Randpunkte existieren oder der Rand sich nicht in zwei oder mehr als zwei paarweise disjunkte, abgeschlossene nichtleere Teilmengen zerlegen lässt. Das Gebiet G heißt m-fach zusammenhängend, wenn sich der Rand in m paarweise disjunkte, nichtleere abgeschlossene Teilmengen zerlegen lässte und sich keine Zerlegung in mehr als m derartige Teilmengen zerlegen lässt.

Satz 13.7: Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $F\colon G \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^0(G)$, d. h. sämtliche Komponenten von F sind stetig in G. Dann ist $\int F\,dx = \int F_1\,dx_1 + \ldots + \int F_n\,dx_n$ in G genau dann vom Wege unabhängig, wenn in G gilt: $F = \mathrm{grad}V$, $V\colon G \to \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{C}^1(G)$. V heißt Potenzial.

Satz 13.8: Sei $F\colon G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(G)$, d. h. $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{C}^1(G)$. Erfüllt F die Integrabilitätsbedingung in G ($\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$) und ist G beschränkt und einfach zusammenhängend, dann existiert eine Funktion V mit $\mathrm{grad}V = F$ in G und somit ist $\int F\,dx$ für Wege in G vom speziellem Wege unabhängig.

14 Der Jordan-Riemann'sche Inhalt beschränkter Punktmengen des $\mathbb{R}^n$, das Riemann-Integral des $\mathbb{R}^n$

14.1 Jordan-Riemann'scher Inhalt beschränkter Punktmengen des $\mathbb{R}^n$

14.1.1 Inhaltsbegriff und Inhalt von Integralsummen

Anforderungen an den Inhaltsbegriff:

1. $|M| \geq 0$
2. $|M|$ sei invariant bei Bewegungen
3. Ist $W_1 = [0, 1]^n \in \mathbb{R}^n$, so ist $|W_1| = 1$.
4. $M \cap N = \varnothing \Rightarrow |M \cup N| = |M| + |N|$

Es gilt:

1. $|S|$ ist unabhängig von der speziellen Intervallsumme.
2. Aus $S = \bigcup_{j=1}^n I_j$ (auch überlappend) folgt immer $|S| \leq \sum_{j=1}^n |I_j|$.
3. S, T seien zwei Intervallsummen mit $T > S$, dann gibt es immer eine Intervallsumme R, die mit S nicht überlappend ist, so dass $S \cup R = T$ und $|S| + |R| = |T|$.
4. Seien S, T zwei Intervallsummen, so folgt aus $S < T$ stets $|S| \leq |T|$.
5. $|S \cup T| \leq |S| + |T|$. Falls S und T nicht überlappend, so $|S \cup T| = |S| + |T|$.

14.1.2 Äußerer und innerer Jordan-Riemann-Inhalt

Definition 14.1: $M \subset \mathbb{R}^n$, M sei beschränkt. Äußerer bzw. innerer Jordan-Riemann-Inhalt von M heißt folgende Zahl $|M|_a = \inf_{S \supseteq M} |S|$ bzw. $|M|_i = \sup_{S \subseteq M} |S|$, wobei S Intervallsumme ist.

Definition 14.2: Die beschränkte Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt messbar oder quadrierbar im Jordan-Riemann'schem Sinne genau dann, wenn $|M|_i = |M|_a$. Man schreibt dann $|M| = |M|_i = |M|_a$. Für $M = \varnothing$ definieren wir $|M| = 0$.

Definition 14.3: $M \subset \mathbb{R}$, M sei beschränkt. $M^0 := \mathrm{int}M = \{x \in M : \exists \varepsilon > 0,\text{ so dass } U_\varepsilon(x) \subset M\}$ ist die Menge der inneren Punkte von M. $\overline{M} = M \cup \{\text{Häufungspunkte von } M\}$ ist die abgeschlossene Hülle von M. ∂M ist der Rand von M.

Satz 14.1: Für jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \varnothing$, gilt $|M|_i = \lim_{k\to\infty} |M_k|$ und $|M|_a = \lim_{k\to\infty} |M^k|$, wobei M_k die Menge aller Würfel k-ter Stufe mit mindestens einem Punkt in M ist und M^k die Menge aller Würfel k-ter Stufe ist, die vollständig in M liegen.

Satz 14.2: $M, N \subset \mathbb{R}^n$, M, N seien beschränkt, dann gilt:
1. $|M|_i + |\partial M|_a = |M|_a$ 2. $|M \cup N| \leq |M|_a + |N|_a$
3. $M^0 \cup N^0 = \varnothing \Rightarrow |M \cup N|_i \leq |M|_i + |N|_i$

Satz 14.3: Die Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ seien beschränkt und quadrierbar, dann gilt $M \cup N$, $M \setminus N$ und $M \cap N$ sind ebenfalls quadrierbar.

Satz 14.4: $G \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt, $f\colon G \to \mathbb{R}$, f sei auf G gleichmäßig stetig, dann gilt $|\mathrm{graph} f| = |\left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in G\right\}| = 0$.

Satz 14.5: $M \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt. Gibt es eine Folge von äußeren Teilmengen $M_j \subset M$, wobei $|M \setminus M_j|_a \to 0$ für $j \to \infty$, dann gilt $|M| = \lim_{j\to\infty} |M_j|$.

Satz 14.6: Das Jordan-Riemann-Maß ist invariant gegenüber Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

14.2 Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Definition 14.4: G sei beschränkt und quadrierbar, $f\colon G \to \mathbb{R}$, $I = \bigcup_{j=1}^N I_j$ sei eine G überlappende Intervallsumme. Mit $M_j = \sup_{x \in I_j \cap G} f$ und $m_j = \inf_{x \in I_j \cap G} f$ heißen $S(I) = \sum_{j=1}^N M_j |I_j \cap G|$ bzw. $s(I) = \sum_{j=1}^N m_j |I_j \cap G|$ Obersumme bzw. Untersumme bzgl. G bei der Zerlegung I.

Definition 14.5: Das obere Riemann'sche Integral ist $\overline{\int}_G f\,dx = \inf_I S(I)$, das untere Riemann'sche Integral ist $\underline{\int}_G f\,dx = \sup_I s(I)$, f heißt über G Riemann-integrierbar, wenn $\overline{\int}_G f\,dx = \underline{\int}_G f\,dx = \int_G f\,dx$ gilt.

Satz 14.7: Die beschränkte Funktion f ist genau dann über dem beschränkten und quadrierbaren Bereich $G \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Intervallsumme I existiert, so dass $S(I) - s(I) < \varepsilon$.

Satz 14.8: Die beschränkte Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ sei quadrierbar, dann ist die beschränkte Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ über G integrierbar, wenn gilt 1. $|G| = 0$ oder 2. $\exists (G_k)_{k=0}^\infty$, $G_k \subseteq G$ ist quadrierbar, $|G \setminus G_k| \to 0$, f ist auf G_k integrierbar oder 3. $N \subset G$, $|N| = 0$, f ist auf $G \setminus N$ stetig.

Satz 14.9 ***(Eigenschaften des R.-Integrals):*** $G \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und quadrierbar. Die beschränkten Funktionen $f, g\colon G \to \mathbb{R}$ seinen auf G integrierbar, dann gilt 1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int(\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx$
2. Gilt $\forall x \in G : f(x) \leq g(x)$, dann ist $\int_G f\,dx \leq \int_G g\,dx$.
3. $|\int_G f\,dx| \leq \int_G |f|dx$
4. $G = G_1 \cup G_2$, wobei G_1, G_2 quadrierbar und $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, dann gilt $\int_G f\,dx = \int_{G_1} f\,dx + \int_{G_2} f\,dx$.

Satz 14.10 ***(MWS):*** $G \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und quadrierbar und $f\colon G \to \mathbb{R}$, $\forall x \in G : m \leq f(x) \leq M$, dann gilt $m|G| \leq \int_G f\,dx \leq M|G|$.

Definition 14.6: $G \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und quadrierbar, $f\colon G \to \mathbb{R}$, $\forall x \in G : f(x) \geq 0$, dann heißt $M(f) = \{(x, t) : x \in G, 0 \leq t \leq f(x)\}$ Ordinatenmenge von f.

Satz 14.11: $G \subset \mathbb{R}^n$, G sei beschränkt und quadrierbar, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, dann gilt $|M(f)| = \int_G f\,dx$, falls f integrierbar ist.

Satz 14.12 ***(Satz von Fubini):*** I sei ein Integral im $\mathbb{R}^n$, I_{x1} sei ein Integral im $\mathbb{R}^q$, I_{x2} sei ein Integral im $\mathbb{R}^p$, $p + q = n$, $I = I_{x1} \times I_{x2}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei auf I beschränkt und integrierbar. Dann gilt mit $f(x_1, x_2), x_1 \in I_{x1}, x_2 \in I_{x2}$, $\int_I f\,dx = \overline{\int}_{I_{x2}}(\overline{\int}_{I_{x1}} f(x_1, x_2)dx_1)dx_2 = \overline{\int}_{I_{x1}}(\overline{\int}_{I_{x2}} f(x_1, x_2)dx_2)dx_1$.

Bemerkung(Prinzip von Cavalieri): Zwei Körper des $\mathbb{R}^3$, die in gleichen Höhen gleiche Schnittflächen haben, besitzen gleiches Volumen.

Satz 14.13: $M \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt, $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ sei mit Konstante L Lipschitz-stetig, dann gilt $|f(M)|_a \leq (2L\sqrt{n})^n |M|_a$.

Satz 14.14: Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und messbar. $\Phi\colon H \to G \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi \in \mathcal{C}^1(H)$, Φ sei injektiv und Lipschitz-stetig. $f\colon G \to \mathbb{R}$. Dann gilt $\int_G f(x)dx = \int_H f(\Phi(y)) \det(\Phi'(y))dy$.

Bemerkung(Guldin'sche Regel): $V = \int_K dx\,dy\,dz = \int r\,dr\,d\varphi\,dz$, wobei r der Abstand zum Schwerpunkt ist

14.3 Integralsätze

14.3.1 Der Gauß'sch Integralsatz in der Ebene

Satz 14.15: G sei Normalbereich bzgl. x und y, d. h. u. a. $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, $g\colon G \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar in $\overline{G}$. Dann gilt bei stückweise glatter positiver orientierter Randkurve C von G $\int_G (g_x - g_y) dx\, dy = \int_C g\, dx + g\, dy$.

Definition 14.7: $f = (f_1, f_2)\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(G)$, dann heißt $f_{1x} + f_{2y} = \mathrm{div} f$ die Divergenz des Vektorfeldes f.

Bemerkung: Sei n bzgl. des Gebietes G die äußere Normale, so lautet der Gauß'sche Satz: $\int_G \mathrm{div} f\, dx\, dy = \int_C f \cdot n\, ds$.

Bemerkung(Green'sche Formel): Sei $f = u\mathrm{grad}v$, dann ist $\int_G \mathrm{div} f\, dx\, dy = \int_G u\Delta v + (\mathrm{grad}u)(\mathrm{grad}v) dx\, dy$.

14.3.2 Oberflächenintegrale und Gauß'scher Satz im $\mathbb{R}^3$

Definition 14.8: $G \subset \mathbb{R}^2$ sei offen und messbar, $\Phi\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ sei injektiv, stetig differenzierbar in G und in $\overline{G}$ lipschitzstetig, der Rang von Φ' sei 2, $\Phi(G) \cap \Phi(\partial G) = \varnothing$. Dann nennen wir $F = \Phi(G)$ eine (offene) Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Definition 14.9: $G \subset \mathbb{R}^2$ sei offen und messbar, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ habe obige Eigenschaften, dann heißt $\int_G |\Phi_x \times \Phi_y| dx\, dy$ Flächeninhalt der Fläche $\Phi(G)$.

Satz 14.16 *(Gauß'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$):* Der offene und beschränkte Bereich $V \subset \mathbb{R}^3$ sei Normalbereich bzgl. aller Achsen, $f\colon V \to \mathbb{R}^3$ sei stetig in $\overline{V}$, f_{1x}, f_{2y}, f_{3z} seien stetig in V und beschränkt. Dann gilt $\int_{\partial V} f\nu\, dO = \int_V \mathrm{div} f\, dx\, dy\, dz$, wobei ν äußere (Einheits-)Normale ist und $\int_{\Omega(G)} f\, dO = \int_G (\Omega(x,y)) |\Omega_x \times \Omega_y| dx\, dy$ für eine Funktion $\Omega\colon G \to \mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Sei V $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{V}) \cap \mathcal{C}^2(V)$, dann ist $\int_V (u\mathrm{div}v - v\mathrm{div}u) dx\, dy\, dz = \int_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial v}{\partial \nu} dO$.

14.3.3 Der Stoke'sche Integralsatz

Definition 14.10: Sei $f\colon G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^1$, dann heißt die Vektorfunktion $\nabla \times f = (f_{3y} - f_{2z}, f_{1z} - f_{3x}, f_{2x} - f_{1y})$ Rotation von f und es wird geschrieben $\mathrm{rot} f = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$.

Satz 14.17: $F = \Phi(G)$ sei eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit obigen Voraussetzungen, $f \in \mathcal{C}^1(G)$, ν sei der Normaleneinheitsvektor, dann gilt $\int_F \nu \mathrm{rot} f\, dO = \int_{\Phi(\partial G)} f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz = \int_0^{|\partial G|} f(\Phi) \frac{d\Phi}{ds} ds$.

15 Fourier-Reihen

15.1 Vorbemerkungen

J. Fourier (1768-1830); Problem der schwingenden Saite

15.2 Orthogonale Funktionensysteme

Definition 15.1: Sei $\{f_n(x)\}$ eine Menge von auf $[a,b]$ integrierbaren Funktionen, so dass auch $f_n \cdot f_m$ integrierbar ist. Dann heißt $\{f_n(x)\}$ Orthogonalsystem, falls gilt $\int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = \delta_{mn} \cdot \lambda_n$, $\lambda_n > 0$. Gilt für alle n $\lambda_n = 1$, dann heißt $\{f_n\}$ Orthonormalsystem.

15.3 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 15.2: Eine unendliche Reihe der Form $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ bzw. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, c_0 = \frac{1}{2}a_0, c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ heißt trigonometrische Reihe.

Definition 15.3: Sei $f(x)$ periodische mit Periode 2π in $[-\pi, \pi]$ und (wenigstens) uneigentlich R.-integrierbar. Fourier-Reihe von $f(x)$ heißt $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ mit $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$, und $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$. Man schreibt $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Satz 15.1: Ist $f(x)$ in $[a,b]$ wenigstens uneigentlich absolut integrierbar, dann gilt $\lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x) \cos px\, dx = \lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x) \sin px\, dx = 0$.

Satz 15.2 *(Lokalisationsprinzip):* Konvergenz oder Divergenz der Fourier-Reihe in einem Punkt x_0 hängt vom Verhalten der Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung ab.

Satz 15.3 *(Kriterium von Dini):* Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ konvergiert in einem Punkt x_0, wenn für ein gewisses $h > 0$ das Integral $\int_0^h \frac{1}{t}|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)| dt$ existiert.

Satz 15.4: Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ konvergiert in einem Stetigkeitspunkt x_0, wenn $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 einer Lipschitz-Bedingung genügt: $|f(x_0+t) - f(x_0-t)| \leq L|t|^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, L, α konstant (Hölder-Bedingung).

Satz 15.5: Existiert für eine Funktion der Periode 2π die k-te Ableitung $f^{(k)}(x)$ und ist diese in $[-\pi, \pi]$ von endlicher Schwankung, so gilt für die Fourier-Koeffizienten von f: $|a_n| \leq \frac{V_k}{\pi n^k}$ und $|b_n| \leq \frac{V_k}{\pi n^k}$, $n = 1, 2, \ldots$, wobei V_k die Totalvariation von $f^{(k)}(x)$ in $[-\pi, \pi]$ bezeichne.

Satz 15.6 *(Bessel'sche Ungleichung):* Sei f^2 integrierbar auf $[-\pi, \pi]$, dann gilt die Bessel'sche Ungleichung $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{j=1}^{N}(a_j^2 + b_j^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$.

Satz 15.7 *(Weierstraß'scher Approximationssatz):* Ist $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ stetig und gilt $f(\pi) = f(-\pi)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom $T_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx$, so dass gleichmäßig für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

Satz 15.8 *(Parseval'sche Ungleichung):* Für jede quadratisch integrierbar Funktion $f(x)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi,\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx = 0$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 + b_j^2$.

Satz 15.9: Sei $f(x)$ absolut integrierbar mit $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jx + b_j \sin jx$, dann gilt $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}a_0 dt + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^x \cos jt\, dt + b_j \int_0^x \sin xt\, dt$.

Satz 15.10: Sei $f(x)$ auf $[-\pi, \pi]$ stetig und stückweise differenzierbar mit $f(\pi) = f(-\pi)$ und f' sei absolut integrierbar, dann gilt: Die Fourier-Reihe von f' erhält man durch gliedweises Differenzieren, dabei ist die Konvergenz der Fourier-Reihe von $f'(x)$ nicht gesichert.

16 Der Hilbert-Raum

Definition 16.1: Sei X ein komplexer Vektorraum und es gebe eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X \times X \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:
1. $\forall x \in X \setminus \{o\} : \langle x, x \rangle > 0$
2. $\forall x, y, z \in X \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$
3. $\forall x, y \in X : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt über X.

Satz 16.1: Jeder Vektorraum mit dem Skalarprodukt ist ein normierter Raum mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ und es gilt die Schwarz'sche Ungleichung $\forall x, y \in X : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Definition 16.2: Ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt heißt vollständig, wenn jede Folge von Elementen, die Cauchy-Folge (auch: Elementarfolge) ist, in der durch das Skalarprodukt gegebenen Norm, gegen ein Element des Raumes konvergiert. Ein vollständiger reeller oder komplexer Raum mit Skalarprodukt heißt Hilbert-Raum.

17 Der Hilbert-Raum der Fourier-Reihen

Definition 17.1: Zwei Elemente $x, y \in H$ heißen orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Die Menge von Elementen $\{x_n\}$ heißt orthogonal, wenn gilt $\langle x_m, x_n \rangle$, falls $m \neq n$ ist. Gilt $\forall m, n : \langle x_m, x_n \rangle = \delta_{mn}$, dann heißt (x_n) Orthonormalfolge.

Satz 17.1: Sei $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ Orthonormalfolge in H. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$ konvergiert genau dann in H (d. h. $x \in H : \| \sum_{n=0}^{k} \alpha_n u_n - x\| < \varepsilon$, falls k hinreichend groß), wenn $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_2 = \{(x) : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$. Gilt in diesem Sinne $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n u_n$, dann ist $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}$ und $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

Definition 17.2: Sei $x \in H$, dann heißen die Zahlen $\gamma_n = \langle x, u_n \rangle$, $n = 0, 1, \ldots$, die Fourier-Koeffizienten von x bzgl. des Orthonormalsystems $(u_n)_{n=0}^{\infty}$.

Satz 17.2: Für jedes $x \in H$ gilt $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j u_j$ ist konvergent in H mit $\gamma_j = \langle x, u_j \rangle$, wobei $(u_j)_{j=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem sei. Weiterhin gilt $\|x\|^2 - \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j|^2 = \|x - \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j u_j\|^2 \geq 0$.

Definition 17.3: Sei $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem in H, $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt vollständig, wenn aus $\langle x, u_j \rangle = 0$, $j = 0, 1, \ldots$, folgt $x = o$.

Satz 17.3: Sei $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ vollständig, dann gilt $\forall x \in H : x = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j u_j$, $\gamma_j = \langle x, u_j \rangle$ und die Bessel'sche Gleichung $\|x\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j|^2$.

Definition 17.4: Ein Hilbert-Raum heißt separabel, wenn eine abzählbar unendliche Menge von Elementen $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, $x_j \in H$ existiert, so dass diese Menge dicht in H ist, d. h. $\forall x \in H, \varepsilon > 0 \exists j : \|x - x_j\| < \varepsilon$.

Satz 17.4 ***(Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren):*** In jedem separablen Hilbert-Raum gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem.

18 Gewöhnliche Differentialgleichungen

18.1 Vorbemerkungen

Definition 18.1: Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung, $n \in \mathbb{N}^+$, ist eine Gleichung der Form $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, $y(x)$ heißt Lösung (auch: Integral), wenn auf einem gewissen Intervall $[a, b]$ die Funktionen $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ existieren und eingesetzt in die Gleichung $F = 0$ diese Gleichung identisch erfüllt wird. Eine Differentialgleichung heißt explizit, falls diese nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist.

18.2 Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

Definition 18.2: Ein normierter Raum M heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen aus M einen Grenzwert in M besitzt. Einen vollständig normierten Raum nennt man Banach-Raum.

Definition 18.3: E und F seien normierte Räume und $T\colon D \subset E \to F$ eine Funktion. Man nennt T auch Operator. T heißt linear, wenn $\forall x, y \in D \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$. T heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn gilt $x_n \to x_0, x_n \in D, T(x_n) \to T(x_0)$. T genügt einer Lipschitz-Bedingung, wenn gilt $\forall x, y \in D : \|Tx - Ty\|_F \leq L\|x - y\|_E$, $L \in \mathbb{R}$ fest.

Satz 18.1 ***(Banach'scher Fixpunktsatz):*** Es sei $D \neq \varnothing$ abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raumes. T sei ein auf D erklärter Operator, der D in sich abbildet, d. h. $TD \subseteq D$. Weiter gelte $\forall x, y \in D$: $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|, k < 1$. Dann existiert genau ein Fixpunkt $\tilde{x} \in D$, $T\tilde{x} = \tilde{x}$. Es gilt $\|\tilde{x} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$, $n = 0, 1, \ldots, x_{n+1} = Tx_n$, $x_0 \in D$.

18.3 Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung

Satz 18.2: Das Anfangswertproblem $y' = f(x, y), \xi \leq x \leq a + \xi, y(\xi) = \eta, a \neq 0$ hat bei beliebig wählbarem η genau eine Lösung in $S : \xi \leq x \leq \xi + a, -\infty < y < \infty$, falls gilt $\forall x \in S : |f(x, y) - f(x, y_1)| \leq L|y - y_1|, L \geq 0$.

18.4 Spezielle Typen linearer Differentialgleichungen 1. Ordung

Satz 18.3: Sei y_0 ein innerer Punkt von I_y, $g(y_0) \neq 0$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblem $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I_x$, in einer Umgebung von x_0 (falls x_0 ein Randpunkt, dann ist ist diese Umgebung einseitig). Die Lösung ergibt sich aus $\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ durch Auflösung nach y.

Satz 18.4: Ist $f(x)$ in I_x und $g(y)$ in I_y stetig, $x_0 \in I_x$, $y_0 \in I_y$, $g(y_0) = 0$ und $g(y) \neq 0$ für $y_0 \leq y \leq \varepsilon + y_0$ $(\varepsilon > 0)$ und divergiert das Integral $\int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dt}{g(t)}$, so gibt es keine Lösung des Anfangswertproblem $y_0 = y(x_0)$, die „von oben" in die Gerade $y = y_0$ mündet. Ist $g(y) \neq 0$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0$ und divergiert $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dt}{g(t)}$, dann gibt es keine Lösung, die in die Gerade $y = y_0$ „von unten" einmündet.

Beispiel(e): 1. $y'(x) = f(ax + by + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $v(x) = ax + by + c$, $v'(x) = a + by'(x) = a + bf(v)$
2. $y' = f(\frac{y}{x})$, $v(x) = \frac{y}{x}$, $y = xv$, $y' = v + xv' = f(\frac{y}{x}) = f(v)$, $v' = \frac{f(v)-v}{x}$
3. $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}) \wedge \det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -c \\ -\gamma \end{smallmatrix}\right)$ hat eindeutig bestimmte Lösung x_0, y_0, $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$, $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f(\frac{a\tilde{x}+b\tilde{y}}{\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}}) \overset{\tilde{x}\neq 0}{=} f(\frac{a+b\tilde{y}/\tilde{x}}{\alpha+\beta\tilde{y}/\tilde{x}}) = g(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}})$

18.5 Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Definition 18.4: Seien g, h stetig in $I = [a, b]$, dann heißt $y'(x) + g(x)y = h(x)$ lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Im Falle $h = 0$ in $[a, b]$ spricht man von der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordung, andernfalls von inhomogener linearer Differentialgleichung.

Satz 18.5: Das Anfangswertproblem $y' + g(x)y = h(x), y(x_0) = y_0, x_0 \in I$, hat bei obigen Voraussetzung für jedes beliebige $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Lösung: $y(x) = e^{-G(x)}(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(t)e^{G(t)}dt)$, $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

Beispiel(e, die sich darauf transformieren lassen): 1. Bernoulli'sche Differentialgleichung: $y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0$, g, h stetig, $alpha \neq 1$; Substitution $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$
2. Riccati'sche Differentialgleichung: $y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$, g, h, k stetig; falls man eine Lösung $y_1(x)$ kennt, dann wird transformiert $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$, $z' - (g(x) + 2y_1h(x))z - h(x) = 0$

18.6 Exakte Differentialgleichung

Definition 18.5: Eine Differentialgleichung der Form $g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$, g, h stetig in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, heißt exakte Differentialgleichung, wenn eine Funktion $F(x, y)$ in G existiert, so dass $F_x = g(x, y)$, $F_y = h(x, y)$ in G gilt. F heißt Stammfunktion.

Satz 18.6: Seien g, h im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ stetig, dann ist $y(x)$ genau dann eine Lösung der exakten Differentialgleichung $g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$, wenn $F(x, y(x)) = \text{konst.}$ gilt.

Satz 18.7: Sei $G \subset \mathbb{R}$ einfach zusammenhängend, $g, h \in \mathcal{C}^1(G)$, dann existiert eine Stammfunktion $F(x, y)$, wenn gilt $g_y = h_x$ in G. Es gilt $F(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} g(x_1, y_1)dx_1 + h(x_1, y_1)dy_1$, wobei $(x_0, y_0) \in G$ fest und die Integration längs eines beliebigen (x_0, y_0) mit (x, y) verbindenden Weges in G verläuft.

18.7 Implizite Differentialgleichung 1. Ordnung

Definition 18.6: Ist $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ und hat die Gleichung $F(x, y, p) = 0$ in einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ eine Auflösung $y' = f(x, y)$ mit stetigem f und $(x, y) \in U_\varepsilon(x_0, y_0, z_0)$, so heißt (x_0, y_0, z_0) ein reguläres Linienelement. Alle anderen Punkte heißen singulär. Eine Lösung der impliziten Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ heißt reguläre Lösung, wenn alle Linienelemente (x, y, y') regulär sind. Singulär heißt eine Lösung, wenn alle Linienelemente singulär sind.

Satz 18.8: Es gebe eine Umgebung U von (x_0, y_0, z_0), so dass $F(x, y, z)$ und $F_z(x, y, z)$ in U stetige Funktionen sind und weiterhin gilt: $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ und $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, dann ist (x_0, y_0, z_0) ein reguläres Linienelement.

Beispiel(e impliziter Differentialgleichung, die geschlossen lösbar sind): Grundgedanke: y' wird als Parameter p benutzt, $x = x(p)$, $y = y(p)$, $\frac{dy}{dp} = \dot{y} = p\dot{x}$
1. Typ: $x = g(y')$, $y = \int p\dot{x}\, dp = \int p\dot{g}\, dp$
2. Typ: $y = g(y')$, $y = g(p)$, $x(p) = \int \dot{x}\ dp - \int \dot{y}\frac{1}{p}dp = \int \dot{g}\frac{1}{p}dp$ und $y = g(0)$, falls $0 \in I$
3. Typ (Clairaut'sche Differentialgleichung): $y = xy' + g(y')$, $y(p) = xp + g(p)$, $p\dot{x} = \dot{y} = \dot{x}p + x + \dot{g}$, $x + \dot{g} = 0$, $y(p) = -\dot{g}p + g(p)$; weiterhin ist Lösung $y(x) = cx + g(c)$, wobei $c \in \mathbb{R}$, Einhüllende der links stehenden Kurvenschar
4. Typ (d'Alambert'sche Differentialgleichung): $y = xf(y') + g(y')$, $\dot{y} = p\dot{x}$, $\dot{y} = \dot{x}f + x\dot{f} + \dot{g}$; ist $p = f$, dann ist $x = -\dot{g}/\dot{f}$, falls $\dot{f} \neq 0$; ist $p \neq f$, dann ist $\dot{x} = \frac{x\dot{f}+\dot{g}}{p-f}$, falls $f \neq p$; zusätzlich ist $y = cx + d$ Lösung für $c, d \in \mathbb{R}$ beliebig, falls $f(c) = c$ gilt, $d = g(c)$.

18.8 Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung und Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition 18.7: Das Gleichungssystem $y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, heißt Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x) : I \to \mathbb{R}$ heißen Lösung, falls diese eingesetzt in das System dieses identisch erfüllen.

Satz 18.9: Das Anfangswertproblem $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist immer eindeutig lösbar, wenn $f(x, y)\colon G \to \mathbb{R}^n$ in G stetig ist und $\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$ in G gilt.

Definition 18.8: Die Differentialgleichung $y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), n \in \mathbb{N}^+$, $f\colon G \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $G = I \times B, B \subset \mathbb{R}^n$, heißt explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung; $y(x)\colon I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung, wenn $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}$ eingesetzt in die Differentialgleichung diese identisch erfüllt.

18.8.1 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Satz 18.10: $A(x), b(x)$ seien stetig in $I = [a, b]$ (d. h. sämtliche Komponenten sind stetig in I), $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, dann hat das Anfangswertproblem $y' = Ay + b, y(x_0) = y_0$, genau eine Lösung in ganz I.

Satz 18.11: Sei A stetig in I, dann bildern sämtliche Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ einen Vektorraum.

Definition 18.9: Seien $y_1, \ldots, y_k$ Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung, $y' = A(x)y$, dann heißen $y_1, \ldots, y_k$ linear unabhängig, wenn aus $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_j = o$ folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Andernfalls heißen $y_1, \ldots, y_k$ linear abhängig. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Lösungen heißt Dimension des Lösungsraumes.

Definition 18.10: Die n linear unabhängigen Lösungen des Systems $y' = A(x)y$ heißen Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.

Definition 18.11: Sind $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen von $y' = A(x)y$, so heißt $\det(y_1\ y_2 \ldots y_n) = W(y_1 \ldots y_n)$ Wronski-Determinante von $y_1, \ldots, y_2$.

Satz 18.12: Seien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$, wobei $A(x)$ stetig in $I = [a, b]$ ist. Dann gilt:

1. $W(y_1\ y_2 \ldots y_n) = 0$ in I oder $\forall x \in I : W \neq 0$.
2. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn gilt $\forall x \in I : W(y_1\ y_2 \ldots y_n) \neq 0$.

Satz 18.13: Das Anfangswertproblem $y' = A(x)y + b$, $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ hat genau eine Lösung, A, b stetig in I. Es gilt $y(x) = (x_1\ x_2 \ldots x_n)y_0 + \int_{x_0}^{x} (x_1\ x_2 \ldots x_n)Adx$, wobei $x_j' = Ax_j$, $x_j(x_0) = e_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Satz 18.14: Das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$, wobei A eine reellwertige konstante (n, n)-Matrix ist, hat die u. U. komplexwertigen Lösungen $y_j = c_j e^{\lambda_j x}$, $j = 1, \ldots, k \leq n$, λ_j sind die Eigenwerte und c_j die Eigenvektoren von $Ac_j = \lambda_j c_j$. Die Lösungen y_j sind genau dann linear unabhängig, wenn die c_j linear unabhängig sind.

Satz 18.15: Das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ habe eine konstante (n, n)-Matrix. A habe q voneinander verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ und $2p$ voneinander verschiedene nichtreelle Eigenwerte $\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_{q+p}, \overline{\lambda_{q+1}}, \ldots, \overline{\lambda_{q+p}}$, dann sind $y_j = c_j e^{\lambda_j x}, j = 1, \ldots, q$, und $y_j = \Re(c_j e^{\lambda_j x}), y_{j+p} = \Im(c_j e^{\lambda_j x}), j = q+1, \ldots, q+p$, linear unabhängig Lösungen von $y' = Ay$.

Satz 18.16: Ist λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E) = 0$, dann gibt es k linear unabhängige Lösungen von $y' = Ay$. Es gilt $y_i(x) = p_i(x)e^{\lambda x}, i = 0, \ldots, k-1$, wobei jede Komponente von $p_i(x)$ ein Polynom in x ist, welches höchstens vom Grade i ist. Somit erhält man, wenn dies für jeden Eigenwert ausgeführt wird – im komplexen Fall sind Real- und Imaginärteil zu nehmen – ein Fundamentalsystem.

18.8.2 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$L[y] = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = b(x), x \in [a, b]$$

Satz 18.17: Sind die Koeffizienten $a_i(x), i = 0, \ldots, n-1$, und $b(x)$ stetig in $[a, b]$, dann hat das Anfangswertproblem$L[y] = b(x)$, $y^{(i)}(x_0) = y_i, i = 0, \ldots, n-1, x_0 \in [a, b] = I$ in I genau eine Lösung. Diese Lösung existiert in ganz I.

Satz 18.18: Die Dimension des Lösungsraums der Lösungen von $L[y] = 0$ ist n.

Definition 18.12: Seien $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ Lösungen von $L[y] = 0$. Dann heißt

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = W(y_1 \ldots y_n)$$

Wronski-Determinante.

Satz 18.19: Seien $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ Lösungen von $L[y] = 0$ in I, wobei $a_i(x), i = 0, \ldots, n-1$, stetig seien. Dann gilt:

1. $W(y_1 \ldots y_n) = 0$ oder $\forall x \in I : W(y_1(x) \ldots y_n(x)) \neq 0$,
2. $y_1, \ldots, y_n$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $W(y_1 \ldots y_n) \neq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Entsprechend wird Fundamentalsystem definiert: $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ seien n linear unabhängige Lösungen von $L[y] = 0$, dann heißt $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ Fundamentalsystem von $L[y] = 0$.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$L[y] = y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = 0$$

Satz 18.20: Ist λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynomes $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$, so erhält man k linear unabhängige Lösungen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$, wobei im Fall $\lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$, sich diese k linear unabhängigen Lösungen durch Bilden von Real- und Imaginärteil ergeben.

18.9 Rand- und Eigenwertprobleme

18.9.1 Randwertprobleme

Randbedingungen zu $L[y(x)] = y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$, $x \in [a, b] = I$
1. Art: $y(a) = \check{y_1}$, $y(b) = \check{y_2}$
2. Art: $y'(a) = \check{y_1}'$, $y'(b) = \check{y_2}'$
3. Art (Sturm'sche Randbedingungen): $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \check{y_2}$, $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \check{y_2}$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$
$L[y] = (p(x)y')' + q(x)y = g(x)$

Definition 18.13: Das Randwertproblem $L[y(x)] = (p(x)y')' + q(x)y = g(x)$ in I mit $R_1[y] = \check{y_1}$, $R_2[y] = \check{y_2}$ heißt Sturm'sches Randwertproblem. Das zugehörige Problem $L[y] = 0, R_1[y] = 0, R_2[y] = 0$ heißt homogenes Sturm'sches Randwertproblem.

Bemerkung: Die Lösungen des homogenen Sturm'schen Randwertproblems bilden einen Vektorraum. Die Dimension dieses Lösungsraumes ist 1 oder 0. Das inhomogene Sturm'sche Randwertproblem ist entweder nicht lösbar oder aber die Lösungen sind von der Form $y = y_h + y_i$, y_h sei allgemeine Lösung des homogene Sturm'schen Randwertproblems und y_i eine spezielle Lösung des inhomogenen Sturm'schen Randwertproblems.

Satz 18.21: Ist $y_1(x), y_2(x)$ ein Fundamentalsystem von $L[y(x)] = 0$, dann ist das inhomogene Sturm'sche Randwertproblem genau dann lösbar, wenn $\det \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \neq 0$. Das zugehörige homogene Sturm'sche Randwertproblem besitzt dann nur die triviale Lösung, d. h. das inhomogene Sturm'sche Randwertproblem ist eindeutig lösbar.

Definition 18.14: Das Quadrate $I \times I$ werde in zwei Dreiecke I_1, I_2 wie folgt zerlegt: $I_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq x \leq b\}$, $I_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq y \leq b\}$. Die Funktion $h(x, y)$ heißt Grundlösung von $L[y(x)] = 0$, wenn folgendes gilt:

1. $h(x, y)$ ist stetig in $I \times I$ (2D-stetig)
2. in I_1, I_2 existieren h_x, h_y (auf $x = y$ einseitige Ableitungen)
3. bei festem $y_0 \in I$ gilt $L[h(x, y_0)] = 0$, $x \neq y_0$
4. $h_x(x + 0, x) - h_x(x - 0, x) = \frac{1}{p(x)}$, $a < x < b$

Satz 18.22: Ist $p \in \mathcal{C}^1(I)$, $q, g \in \mathcal{C}^0(I)$, dann existiert immer eine Grundlösung.

Satz 18.23: Ist $h(x, y)$ eine Grundlösung von $L[y] = 0$, dann ist $y(x) = \int_a^b h(x, y)g(y)dy$ eine Lösung von $L[y] = g(x), x \in I$.

Definition 18.15: $G(x, y)$ heißt Green'sche Funktion der Randwertaufgabe $L[y] = 0$, $R_1[y] = 0$, $R_2[y] = 0$, falls gilt:
1. $G(x, y)$ ist Grundlösung von $L[y] = 0$
2. $\forall y \in (a, b) : R_1[G] = \alpha_1 G(a, y) + \alpha_2 p(a)G'(a, y) = 0$, $\forall y \in (a, b) : R_2[G] = \beta_1 G(b, y) + \beta_2 p(b)G'(b, y) = 0$.

Satz 18.24: Es gibt genau dann eine Green'sche Funktion der homogenen Sturm'schen Randwertaufgabe $L[y] = 0$, $R_1[y] = 0$, $R_2[y] = 0$, wenn diese nur die triviale Lösung hat. Gilt $\forall x, y \in I \times I : G(x, y) = G(y, x)$ und ist G eindeutig bestimmt, dann gilt für die Lösung von $L[y] = g(x)$, $R_1[y] = R_2[y] = 0$ die Gleichung $y(x) = \int_a^b G(x, y)g(y)dy$.

Bemerkung: Die Green'sche Funktion kann auch direkt konstruiert werden.

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{p}u_1(x)u_2(y), a \leq x \leq y \leq b \\ \frac{1}{p}u_1(y)u_2(x), a \leq y \leq x \leq b. \end{cases}$$

18.9.2 Das Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem

$$L[y] = (p(x)y'(x))' + q(x)y(x), p, q, r \in \mathcal{C}^0(I)$$

Definition 18.16: $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert des Sturm-Liouville'schen Eigenwertproblems, wenn es eine nichttriviale Lösung $y(x)$ des Problems $L[y] + \lambda r(x)y = 0$ in I gibt mit $R_1[y] = R_2[y] = 0$. Dieses $y(x)$ heißt Eigenfunktion. Die Anzahl der linear unabhängigen Eigenfunktionen zu einem Eigenwert λ heißt Vielfachheit des Eigenwertes. Gibt es nur eine linear unabhängige Eigenfunktion, dann sagt man, dass der Eigenwert einfach ist.

Satz 18.25: Das Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem hat, falls $p \in \mathcal{C}^1(I)$, $q, r \in \mathcal{C}^0(I)$, $p(x) > 0$, $r(x) > 0$, unendliche viele einfache Eigenwerte $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ für $n \to \infty$. Die zu λ_n gehörige Eigenfunktion hat in (a, b) genau n Nullstellen. Zwischen zwei Nullstellen von y_n liegt immer genau eine Nullstelle von y_{n+1}. Die Eigenfunktionen bilden ein Orthogonalsystem und können normiert werden, d. h. $\int_a^b r(x)y_n(x)y_m(x)dx = \delta_{nm}$. Ist $f \in \mathcal{C}^1(I)$, $R_1[f] = 0 = R_2[f]$, dann gilt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)$ mit $a_n = \int_a^b f(x)r(x)y_n(x)dx, n \in \mathbb{N}$, wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert.

19 Das Lebesgue'sche Integral

19.1 Das Maß

Bemerkung: Erweiterung von $\overline{\mathbb{R}} = \cup\{+\infty, -\infty\}$
Rechenregeln für $-\infty < a < +\infty$:
$(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$
$\infty - a = -a + (+\infty) = \infty$
$a > 0 : a \cdot (+\infty) = \infty, a \cdot (-\infty) = -\infty$
$a = 0 : a \cdot (+\infty) = 0 = a \cdot (-\infty)$
$a < 0 : a \cdot (+\infty) = -\infty, a \cdot (-\infty) = +\infty$
$+\infty + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty = (-\infty) \cdot (-\infty)$
$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty = (-\infty) \cdot (+\infty)$
Wichtig: $(+\infty) + (-\infty)$ n. d. und $\frac{a}{\pm\infty}$ n. d.
$\overline{\mathbb{R}}$ ist kein Körper.

Satz 19.1: $I, J \in F_n = \{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n : I_k \text{eindim. Intervall}\}$, dann gilt: 1. $(I \cap J) \in F_n$ 2. $I \setminus J = \bigcup_{j=1}^{n} J_j$, wobei gilt $J_i \cap J_j = \varnothing, i \neq j$, $J_j \in F_n$ 3. $\bigcup_{j \in A} J_j = \bigcup_{j \in B} \tilde{J}_j$, $\tilde{J}_j \in F_n$, A, B sind höchstens abzählbar, $J_j \in F_n$, $\tilde{J}_i \cap \tilde{J}_j = \varnothing, i \neq j$.

Definition 19.1: Ein nichtleeres Mengensystem $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen über einer Grundmenge X heißt Algebra, falls gilt:
1. $A \in S \Rightarrow A' = (X \setminus A) \in S$ 2. $A, B \in S \Rightarrow (A \cup B) \in S$
3. $A_1, A_2, \ldots \in S, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in S$, dann heißt S σ-Algebra.

Satz 19.2: Jede offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ kann wie folgt dargestellt werden: $O = \bigcup_{j \in A} I_j$, A eine abzählbare Indexmenge und $i, j \in A, i \neq j, I_j \cap I_i = \varnothing, \overline{I_j} \subset O, I_j \in F_n$.

Satz 19.3: Eine Algebra $S \subset \mathcal{P}(X)$ enthält die leere Menge $\varnothing$, X und es gilt $A, B \in S \Rightarrow (A \cap B) \in S, (A \cup B) \in S$. Ist S eine σ-Algebra, so gilt: $A_1, A_2, \ldots \in S \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in S, (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in S$.

Definition 19.2: Die bzgl. Inklusion kleinste σ-Algebra, die die offenen achsenparallelen Quader des $\mathbb{R}^n$ enthält, heißt σ-Algebra B_n der Borelmengen des $\mathbb{R}^n$.

Satz 19.4: Die σ-Algebra B_n der Borelmengen ist auch kleinste σ-Algebra über

1. der Gesamtheit der Quader $\{a_j \leq x_j \leq b_j : j = 1, \ldots, n\}$,
2. Gesamtheit der offenen Mengen,
3. Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen.

Bemerkung: Nach Satz 19.4 gehören alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ zur σ-Algebra, sind also Borelmengen.

Definition 19.3: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt $\lambda(A)$ mit $\lambda(A) = \inf\left\{\sum_i |I_i| : A \subset \bigcup_{j \in B} I_j, I_j \in F_n\right\}$ das äußere Lebesgue'sche Maß von A. Dabei sind $I_j \in F_n$, $|I_j|$ das Elementarmaß, B darf höchstens abzählbar sein.

Satz 19.5 *(Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maßes):* $A, B \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(A)$ sei das äußere Lebesgue-Maß, $|A|_i$, $|A|_a$ das innere bzw. äußere Riemann-Maß (nur wenn A beschränkt):

1. $0 \leq \lambda(A) \leq +\infty$
2. $A \subset B \Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda(B)$
3. $\{A_j\}$ sei abzählbare Menge des $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\lambda(\bigcup A_j) \leq \sum_j \lambda(A_j)$, σ-Additivität
4. $A \subset \mathbb{R}^n$, A sei beschränkt, dann $|A|_i \leq \lambda(A) \leq |A|_a$
5. $\lambda(A)$ ist invariant bei Bewegung

Definition 19.4: $A \subset \mathbb{R}^n$, A heißt Menge vom Lebesgue-Maß Null, wenn $\lambda(A) = 0$. Gilt eine Aussage bis auf eine Menge vom Maß Null, dann sagen wir, die Aussage gilt fast überall (f. ü.).

Definition 19.5: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-messbar genau dann, wenn gilt $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n : \lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A')$. In diesem Falle heißt $\lambda(A)$ das Lebesgue-Maß von A.

Satz 19.6: Das Mengensystem $\mathcal{L}_n$ aller Lebesgue-messbaren Mengen des $\mathbb{R}^n$ ist eine σ-Algebra, die die im Riemann-Jordan'schen Sinne messbaren enthält.

Bemerkung: Eigenschaften von Mengen aus $\mathcal{L}_n$

1. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, $\lambda(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$
2. $A, B \in \mathcal{L}_n, \lambda(B) < \infty, B \subset A$, $\lambda(A \setminus B) = \lambda(A) - \lambda(B)$
3. $A, B \in \mathcal{L}_n, \lambda(A \cap B) < \infty$, $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$
4. $A_j \in \mathcal{L}_n, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, $\lambda(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j \to \infty} \lambda(A_j)$
5. $A_j \in \mathcal{L}_n, A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, $\lambda(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j \to \infty} \lambda(A_j)$

Satz 19.7: Jede offene und jede abgeschlossene Menge gehört zu $\mathcal{L}_n$.

Satz 19.8: Für jede beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(M) = \inf_{O \supseteq M} \{\lambda(O) : O \supseteq M, O \text{sei offen}\}$, eine beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge O_ε existiert, so dass $\lambda(O_\varepsilon \setminus M) < \varepsilon$.

19.2 Das Lebesgue'sche Integral im $\mathbb{R}^n$

Definition 19.6: Jede beliebige Zerlegung $Z = (A_i)_{i=1}^{\infty}$ von $B \subseteq \mathbb{R}^n, B \in \mathcal{L}_n$, in paarweise disjunkte abzählbar unendlich viele messbare Teilmengen A_i heißt Zerlegung von B. $A_i \in \mathcal{L}_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Die Mengen aller möglichen Zerlegungen von B werde mit $\mathfrak{Z}_B$ bezeichnet.

Definition 19.7: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{L}_n$ und f eine Funktion $f \colon B \to \overline{\mathbb{R}}$, $Z = (A_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{Z}_B$. Dann heißt $\sigma(Z, f, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\lambda(A_i), \forall i : \xi_i \in A_i$, Zwischensumme von f bei ξ_i, $s(Z, f) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \lambda(A_i), m_i = \inf_{x \in A_i} f(x)$, Untersumme von f bei der Zerlegung Z, $S(Z, f) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i \lambda(A_i), M_i = \sup_{x \in A_i} f(x)$, Obersumme von f bei der Zerlegung Z.

Definition 19.8: $f \colon B \to \overline{\mathbb{R}}$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{L}_n$ erfüllt die $\mathcal{AC}$-Eigenschaft genau dann, wenn $\exists Z_0 \in \mathfrak{Z}_B : S(Z_0, |f|) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i \lambda(A_i) < \infty$, $M_i = \sup_{x \in A_i} f(x)$, $Z_0 \in (A_i)_{i=1}^{\infty}$.

Definition 19.9: $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{L}_n$, $f \colon B \to \overline{\mathbb{R}}$, f erfülle die $\mathcal{AC}$-Eigenschaft. Dann heißt $J_* = \underline{\int}_B f\,dx = \sup_{Z \in \mathfrak{Z}_B, Z \leq Z_0} s(Z, f)$ unteres Lebesgue-Integral von f über B, $J^* = \overline{\int}_B f\,dx = \inf_{Z \in \mathfrak{Z}_B, Z \leq Z_0} s(Z, f)$ oberes Lebesgue-Integral von f über B. f heißt genau dann Lebesgue-integrierbar über B, wenn gilt $\underline{\int}_B f\,dx = \overline{\int}_B f\,dx = \int_B f\,dx$. Im Falle der Konvergenz heißt dies Lebesgue-Integral von f über B. Die Menge aller Funktionen $f \colon B \to \overline{\mathbb{R}}$, die ein Lebesgue-Integral besitzen, wird mit $L(B)$ bezeichnet.

Bemerkung: Einige Eigenschaften von $L(B)$:

1. $f \in L(B) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists Z \in \mathfrak{Z}_B : S(Z, f) - s(Z, f) < \varepsilon$
2. $f, g \in L(B)$, $f \leq g$ auf B, dann $\int_B f(x)dx \leq \int_B g(x)dx$
3. $f = g$ f. ü. auf B, $f \in L(B)$, so $g \in L(B)$, $\int_B f(x)dx = \int_B g(x)dx$
4. $f \in L(B) \Rightarrow \lambda(\{x : f(x) = \pm\infty\}) = 0$
5. $f, g \in L(B)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann $(\alpha f + \beta g) \in L(B)$
6. $f \in L(B)$, $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \min(f, 0)$

Satz 19.9: Sei B eine beschränkte und im Riemann-Jordan'schen Sinne messbare Menge. Dann ist $f \colon B \to \mathbb{R}$ sicher dann Lebesgue-integrierbar, wenn f Riemann-integrierbar ist. Beide Integrale haben den selben Wert.

Definition 19.10: $B \in \mathcal{L}_n$, $f \colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar auf B genau dann, wenn gilt $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{x : x \in B, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{L}_n$. Die Menge der auf B messbaren Funktionen sei $M(B)$.

Satz 19.10: $f \in M(g)$ genau dann, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\{x : x \in B, f(x) < \alpha\} \in \mathcal{L}_n$ oder
2. $\{x : x \in B, f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{L}_n$ oder
3. $\{x : x \in B, f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{L}_n$.

Bemerkung: Eigenschaften messbarer Funktionen:

1. $B \in \mathcal{L}_n$, dann ist jede auf B stetige Funktion messbar
2. $f \in M(B), f = g$ f. ü. auf B, dann $g \in M(B)$
3. $f \in M(B), A \subset B, A \in \mathcal{L}_n \Leftrightarrow f \in M(A)$
4. $B_k \in \mathcal{L}_n, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = B \in \mathcal{L}_n, \forall k : f \in M(B_k)$, dann $f \in M(B)$
5. Sei $f_k \colon B \to \overline{\mathbb{R}}, f \in M(B)$, dann
$F(x) = \liminf_{k \to \infty} f_k(x) \in M(B)$,
$H(x) = \limsup_{k \to \infty} f_k(x) \in M(B)$,
$F_1(x) = \inf_{k \to \infty} f_k(x) \in M(B)$,
$H_1(x) = \sup_{k \to \infty} f_k(x) \in M(B)$.

Definition 19.11: Die Funktion $\chi_B \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ heißt charakterische Funktion von B.

Definition 19.12: $f \colon B \subseteq \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt Treppenfunktion, wenn $W(F) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots : \alpha_j \in \overline{\mathbb{R}}\}$. $f \colon B \to \mathbb{R}$ heißt Elementarfunktion, wenn f Treppenfunktion, messbar und $\{x : x \in B, f(x) \neq 0\}$ beschränkt.

Satz 19.11: $f\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, B sei messbar, $f \in M(B)$, dann gibt es eine Folge von Elementarfunktionen $f_k(x)$ mit $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$, dabei gilt $|f_k(x)| \leq |f(x)|$.

Satz 19.12: $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{L}_n$, $f, g \in M(B)$, dann gilt $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda f) \in M(B), (f \cdot g) \in M(B), (f+g) \in M(B)$, falls die Summe definiert ist. Falls $f \neq 0$ auf B, dann ist auch $\frac{1}{f} \in M(B)$.

Satz 19.13: $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{L}_n$, $f\colon B \to [0,\infty]$, $f \in M(B)$, gilt dann $J^* = J_*$, falls $J_* < \infty$, so folgt $f \in L(B)$.

Satz 19.14: $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{L}_n$, $f\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann über B Lebesgue-integrierbar, wenn $f \in M(B)$ und $J_*(|f|) < \infty$.

Satz 19.15 *(Satz von Beppo Levi):* Sei $B \in \mathcal{L}_n$, $f_k\colon B \to [0,\infty]$, $\forall k : f_{k+1} \geq f_k, f_k \in L(B)$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x)dx < \infty$, so ist $\lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x)dx = \int_B (\lim_{k\to\infty} f_k(x))dx = \int_B f_\infty(x)dx$ mit $f_\infty(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

Satz 19.16: $B \in \mathcal{L}_n, f_k\colon B \to [0,\infty], f_k \in L(B)$. Dann gilt $S(x) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^p f_k(x) \in M(B)$. Gilt weiterhin $\sum_{k=1}^p f_k(x)dx < \infty$, dann ist $\int_B S(x)dx = \int_B (\lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^p f_k(x))dx = \sum_{k=1}^\infty \int_B f_k(x)dx$.

Satz 19.17: $f_k \in L(B), f_k\colon B \to \overline{\mathbb{R}}$, $k = 1,2,\ldots$, f_k seien monoton in k (wachsend oder fallend), dann gilt $f_\infty(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in L(B)$ und $\int_B f_\infty(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x)dx$.

Satz 19.18 *(Satz von der majorisierenden Konvergenz):* $B \in \mathcal{L}_n, f_k\colon B \to \overline{\mathbb{R}}, f_k \in M(B)$, $\forall k : |f_k(x)| \leq g(x)$ f. ü. auf B, $g \in L(B)$, $f_\infty(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiere f. ü. auf B, dann gilt $f_\infty(x) \in L(B), \int_B f_\infty(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x)dx$.

Satz 19.19: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und besitze ein Riemann-Jordan-Maß, $f\colon B \to \mathbb{R}$ sei beschränkt auf B, $f \in L(B)$. Dann ist f genau dann über B Riemann-integrierbar, wenn f fast überall auf B stetig ist.

Definition 19.13: $L^p(B) = \{f : |f|^p \in L(B)\}$ heißt L^p-Raum.

Satz 19.20 *(Hölder'sche Ungleichung):* Sei $p, q > 1$, $f \in L^p(B)$, $g \in L^q(B)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt $\int_B |fg|dx \leq (\int_B |f|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_B |f|^q dx)^{\frac{1}{q}}$.

Satz 19.21 *(Minkowski'sche Ungleichung):* Sei $p \geq 1$, $f, g \in L^p(B)$, dann $(\int_B |f+g|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_B |f|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_B |g|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $(f+g) \in L^p(B)$.

Bemerkung: 1. $L^p(B)$ ist Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen.
2. $L^p(B)$ ist ein normierter Raum mit $\|f\| = (\int_B |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

Satz 19.22: $f_k \in L^p(B), \sum_{j=1}^\infty \|f_k\| < \infty$, dann gibt es ein $f_\infty \in L^p(B)$, $f_\infty = \lim_{k\to\infty} s_k$ f. ü. auf B und mit $s_k = \sum_{j=1}^k f_j$ ist $\forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) : \forall k > K(\varepsilon) : \|f_\infty - s_k\| < \varepsilon$

Satz 19.23: Jede Cauchy-Folge (f_k) in $L^p(B)$ besitzt ein $f_\infty \in L^p(B)$, gegen welches sie in $L^p(B)$ konvergiert.

20 Funktionentheorie

20.1 Grundbegriffe

Definition 20.1: $f\colon X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z_0 \in x$, wenn für jede Folge (z_n), $z_n \in X, z_n \to z_0$, gilt $f(z_n) \to f(z_0)$, also $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Satz 20.1: Die Funktion $f(z) = u(z) + iv(z)$ ist in $z_0 \in D(f)$ genau dann stetig, wenn u und v dort stetig sind.

Definition 20.2: $f\colon X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z_0 \in X \neq \varnothing, U_\varepsilon(z_0) \subset X$, f heißt in z_0 differenzierbar, wenn $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) = \frac{df}{dz}\big|_{z=z_0}$ existiert.

Satz 20.2: Wenn $f\colon X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = u(z) + iv(z)$ in $z_0 \in X$ differenzierbar ist, dann sind u und v in z_0 partiell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen $u_x(z_0) = v_y(z_0), u_y(z_0) = -v_x(z_0)$, $f'(z)\big|_{z=z_0} = u_x + iv_x = v_y + iv_x$.

Satz 20.3: $f = u + iv$ sei eine komplexe Funktion, $f\colon X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, U_\varepsilon(z_0) \subset X$, u und v seien in z_0 total differenzierbar und genügen den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, dann ist f in z_0 differenzierbar.

Definition 20.3: Eine Funktion, die in allen Punkten eines Gebietes differenzierbar ist, heißt in diesem Gebiet analytisch (regulär). Eine Funktion heißt in einem Punkt analytisch (regulär), wenn diese Funktion in einer Umgebung dieses Punktes (mit Einschluss dieses Punktes) differenzierbar ist.

Definition 20.4: Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(G)$, G sei ein Gebiet der Ebene, heißt harmonische Funktion, falls $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ in G.

Satz 20.4: Sei u in dem einfach zusammenhängend beschränkten Gebiet G harmonisch, dann gibt es in G eine analytische Funktion $f(z) = u + iv$, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.

Definition 20.5 *(Wirtinger-Kalkül[3]):* $f\colon X \subseteq \mathbb{C} \to Y \subseteq \mathbb{C}$, f sei in $z_0 \in X$ reell differenzierbar, d. h. die partiellen Ableitungen von u und v mögen existieren. Dann sei $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$.

20.2 Elementare Funktionen im Komplexen

$\forall z \in \mathbb{C} : e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z}{n!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cosh z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z^{2n}}{(2n)!}$, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $(e^z)' = e^z$

Die e-Funktion ist in $\{z = x + iy : -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ bijektiv. Das Bild ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Damit existiert in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Umkehrfunktion $\log z = \ln|z| + i \arg z$.

Allgemeine Potenzfunktion $z^a = e^{a(\log z + 2k\pi i)}, z \neq 0, k \in \mathbb{Z}$.

20.3 Integralrechung im Komplexen

Definition 20.6: Sei C eine rektifizierbare Kurve, $f\colon X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $C \subset X$, dann heißt im Falle der Existenz $\int_C f(z)dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i \int_C u\,dy + v\,dx$ Kurvenintegral von $f(z)$ längst C.

Satz 20.5 *(Cauchy'scher Integralsatz):* Sei $f(z)$ in dem einfach zusammenhängenden beschränkten Gebiet G analytisch, dann gilt:
1. $\int_C f(z)dz = 0$, für jede einfach geschlossene rektifizierbare Jordankurve C, die in G liegt.
2. $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz, z_1, z_2 \in G$, ist unabhängig von der die Punkte verbindenden Jordankurve.

Folgerung: 1. Ist $f(z)$ in dem beschränkten einfach zusammenhängenden Gebiet G analytisch und in $\overline{G}$ stetig, dann gilt $\int_{\partial G} f(z)dz = 0$, falls ∂G eine rektifizierbare Kurve ist.
2. Sei $f(z)$ in den n-fach zusammenhängenden beschränkten Gebiet analytisch, dann gilt $\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{C_j} f(z)dz$.
3. Ist $f(z)$ in den einfach zusammenhängenden beschränkten Gebiet G analytisch, dann gibt es eine Funktion $F(z)$, so dass gilt $F'(z) = f(z)$.

Satz 20.6 *(Cauchy'sche Integralformel):* Ist $f(z)$ in dem n-fach zusammenhängenden beschränkten Gebiet G analytisch und in $\overline{G}$ stetig, so gilt für jeden Punkt z von G: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, wobei ∂G eine rektifizierbare Jordan-Kurve sei, die so durchlaufen wird, dass G zur linken liegt.

Satz 20.7: Sei $F(z)$ ein Cauchy-Integral, d. h. ein Parameterintegral der Form $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, wobei C ein wenigstens rektifizierbarer Kurvenbogen sei (nicht notwendig geschlossen) und f auf C stetig

[3] W. Wirtinger 1865 - 1945

ist. Dieses Parameterintegral ist für $z \notin C$ beliebig oft differenzierbar: $F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$.

Satz 20.8: Ist $f(z)$ in dem Gebiet G stetig und $\int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta$ von Wege unabhängig, dann ist $F(z) = \int_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta$ eine Stammfunktion zu $f(z)$.

Satz 20.9: Eine Stammfunktion existiert, zu der im einfach zusammenhängenden Gebiet G definierten Funktion $f(z)$ genau dann, wenn f analytisch ist.

Satz 20.10 ***(Satz von Morera):*** Ist $f(z)$ in dem Gebiet G stetig und $\int f(z)dz$ stets vom Wege unabhängig, dann ist $f(z)$ in G analytisch.

Satz 20.11 ***(Maximumprinzip):*** Sei $f(z)$ analytisch in dem beschränkten Gebiet G und in $\overline{G}$ stetig. Dann wird das Maximum von $|f(z)|$ in keinem inneren Punkt von G angenommen, falls f nicht konstant ist in G.

Satz 20.12 ***(Schwarz'sches Lemma):*** Sei $f(z)$ in $|z| < 1$ analytisch und in $|z| \leq 1$ noch stetig, $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$, dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ in $|z| \leq 1$. Das Gleichheitszeichen steht dabei für einen von $z = 0$ verschiedenen Punkt genau dann, wenn $f(z) = e^{i\alpha}z$.

Satz 20.13 ***(Satz von Liouville):*** Ist $f(z)$ in der gesamten Ebene analytisch und beschränkt, dann ist $f(z)$ konstant.

Definition 20.7: Eine Funktionenfolge $(f_n(z)), f_n\colon A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, A \neq \varnothing$, heißt auf A gleichmäßig konvergent gegen $f\colon A \to \mathbb{C}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon)$ existiert, so dass $\forall n \geq n(\varepsilon) \forall z \in A : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.
Eine Funktionenfolge $(f_n(z))$ heißt auf A lokal gleichmäßig konvergent gegen $f(z)$, wenn zu jedem $z_0 \in A$ eine Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ existiert, so dass $(f_n(z))$ in $U_\varepsilon(z_0)$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.

Satz 20.14: $(f_n(z)), f_n\colon A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, A \neq \varnothing$, A sei offen. Seien $f_n(z)$ stetig auf A. Konvergiert $(f_n(z))$ auf A lokal gleichmäßig gegen die Funktion f, dann ist auch f auf A stetig.
Sind alle $f_n(z)$ auf der Menge A stetig und konvergiert $\sum f_n(z)$ auf A lokal gleichmäßig stetig, dann ist auch $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ auf A stetig.

Satz 20.15: Sei C eine rektifizierbare Kurve, die innerhalb einer offenen Menge A liege. Auf A seien die Funktionen $f_j(z)$ stetig. Ist $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ auf A lokal gleichmäßig konvergent, dann ist mit $F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ nun $\int_C F(z)dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_C f_j(z)dz$.

Satz 20.16: Es seien $f_j(z)$ in einem Gebiet G sämtlich analytisch und $\sum_j^{\infty} f_j(z)$ konvergiere in G lokal gleichmäßig, dann gilt $F(z) = \sum_j^{\infty} f_j(z)$ ist in G ebenfalls analytisch und $F^{(n)} = \sum_j^{\infty} f_j^{(n)}(z)$. Weiterhin konvergiert diese Reihe ebenfalls lokal gleichmäßig in G.

20.4 Potenzreihen

Satz 20.17: Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ in z_1, dann konvergiert die Reihe auch für alle z mit $|z - z_0| \leq k|z_1 - z_0|$, $0 \leq k < 1$ gleichmäßig.

Satz 20.18: Sei $f(z)$ in einem Gebiet G analytisch, $z_0 \in G$, dann gibt es eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(z - z_0)^\nu$, so dass diese für $|z - z_0| < \min_{\zeta \in \partial G} |z_0 - \zeta|$ konvergiert und es gilt dort $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(z - z_0)^\nu$, $c_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}, \nu \in \mathbb{N}$.

Satz 20.19 ***(Identitätssatz für Potenzreihen):*** Gegeben seien zwei Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ mit jeweils positivem Konvergenzradius. Gilt dann $f(z_j) = g(z_j)$ in unendlich vielen Punkten z_j, die gegen $z_0 \in G$ konvergieren, dann gilt $f(z) = g(z)$.

Satz 20.20 ***(Identitätssatz für analytische Funktionen):*** Sind zwei analytische Funktionen in einem Gebiet G definiert und stimmen diese überein in einer Punktfolge, die gegen einen inneren Punkt konvergiert, dann sind diese analytischen Funktionen in G identisch.

Definition 20.8: Sei $f(z)$ analytisch in z_0 und nicht konstant, $f(z_0) = 0$. Dann gibt es eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius. Ist $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n_0-1} = 0$ und $a_{n_0} \neq 0$, dann sagen wir, dass $f(z)$ in z_0 eine Nullstelle n_0-ter Ordnung hat.

Definition 20.9: Ist $f(z)$ in einem Gebiet G_1 analytisch und gibt es eine in einem Gebiet $G_2 \supset G_1$ analytische Funktion $g(z)$ mit $f(z) = g(z)$ in G_1, dann heißt $g(z)$ analytische Fortsetzung von $f(z)$ in G_1 nach G_2.

Satz 20.21: Ist durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$ gegeben. Dann kann $f(z)$ auf $\{z : |z - z_0| = R\}$ nicht sämtlich analytisch sein.

Satz 20.22: Notwendig und hinreichend für die analytische Fortsetzbarkeit einer reellen Funktion $f(x)$ in einem Gebiet G der z-Ebene, welches $D(f)$ enthält ist, dass $f(x)$ sich in jedem Punkt von I in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln lässt.

Folgerung(Permanenzprinzip): Gilt für zwei reelle Funktion $g_1(x)$, $g_2(x)$ auf $I = [a, b], a < b$, $\forall x \in I : g_1(x) = g_2(x)$ und sind diese Funktionen analytisch fortsetzbar in einem Gebiet $G \subset I$, dann gilt $\forall z \in G : g_1(z) = g_2(z)$.

Satz 20.23 ***(Maximumsprinzip):*** Ist $f(z)$ in dem Gebiet G analytisch und nicht konstant, dann nimmt $|f(z)|$ im Inneren von G kein lokales Mininum an.

Satz 20.24 ***(Maximumsprinzip für harmonische Funktionen):*** Ist u in dem Gebiet G harmonisch und nicht konstant, dann besitzt u in G weder lokales Maximum noch Minimum in einem inneren Punkt.

Definition 20.10: Ist $f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ analytisch, so heißt f ganze Funktion. Eine ganze Funktion, die nicht identisch konstant und kein Polynom ist, heißt ganztranszendente Funktion.

Satz 20.25: Ist $f(z)$ ein Polynom, mindestens vom Grade 1, dann gibt es zu jedem $K > 0$ ein $r > 0$, so dass $\forall z : |z| > r$ stets $|f(z)| > K$ gilt.

Satz 20.26: Ist $f(z)$ ganztranszendent, dann gibt es zu jedem $K > 0$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ und $R > 0$ gewisse z, so dass $|f(z)| \geq K|z|^n$ und $|z| > R$ gilt.

Satz 20.27 ***(Spezieller Satz von Casorati-Weierstraß):*** Ist $f(z)$ ganztranszendent und $a \in \mathbb{C}$ beliebig komplex, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ gewisse z, so dass $|f(z) - a| < \varepsilon$ für $|z| > R$.

20.5 Laurant-Reihen

Satz 20.28: Sei $f(z)$ in $A = \{z : r < |z - z_0| < R\}, 0 \leq r < R \leq \infty$ analytisch. Dann gilt $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$ mit $a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta$, wobei C positiv orientiert, einfach geschlossen und innerhalb des Kreisrings A verlaufe.

Bemerkung: Obige Reihe heißt Laurant-Reihe, dabei nennt man $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$ den regulären Teil, $\sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu(z - z_0)^\nu$ nennt man den Hauptteil der Laurant-Reihe.
Identitätssatz für Laurant-Reihen: Die Laurant-Reihe einer in einem Kreisring analytischen Funktion ist eindeutig bestimmt.

Definition 20.11: Sei $f(z)$ in $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ analytisch und es gelte $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$. Dann sagt man

1) $f(z)$ ist in z_0 noch analytisch ergänzbar, wenn $\forall \nu = -1, -2, -3, \ldots :$ $a_\nu = 0$
2) $f(z)$ hat in z_0 einen Pol n-ter Ordnung, falls $a_\nu = 0$ für alle $\nu \leq -n - 1$ und $a_{-n} \neq 0$
3) $f(z)$ hat in z_0 eine wesentliche Singularität, wenn weder 1) noch 2) eintritt.

Satz 20.29 ***(Allgemeiner Satz von Casorati-Weierstraß):*** Sei $f(z)$ in $\{z : 0 < |z - z_0| < R, R \leq \infty\}$ analytisch und besitze in z_0 eine wesentliche Singularität. Dann gibt es in jeder ε-Umgebung von z_0 Punkte z, so dass $|f(z) - a)| < \varepsilon$, für diese $z \in U_\varepsilon(z_0)$ und beliebiges $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$.

Satz 20.30 ***(Satz von Riemann):*** Ist $f(z)$ analytisch für $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$, dann gilt folgendes

1) $f(z)$ besitzt genau dann einen Pol in z_0, wenn $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$
2) $f(z)$ ist genau dann analytisch ergänzbar in z_0, wenn $|f(z)|$ beschränkt ist in $U_\varepsilon(z_0)$
3) Wenn weder 1) noch 2) auftritt, genau dann liegt eine wesentliche Singularität vor.

Definition 20.12: Sei $f(z)$ in $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ analytisch und es gelte $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, dann heißt a_{-1} Residuum von $f(z)$ in z_0.

Satz 20.31 ***(Residuensatz):*** Sei $f(z)$ analytisch in den einfach zusammenhängenden, beschränkten Gebiet G mit Ausnahme der isolierten Singularitäten $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Dort habe $f(z)$ die Residuen $a_{-1}^{(k)}, k = 1, 2, \ldots, n$. Dann gilt $\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} a_{-1}^{(k)}$. Dabei ist C eine einfach geschlossene Kurve, mathematisch positiv orientiert, die in G verläuft und $z_1, \ldots, z_n$ im Inneren enthält.

Satz 20.32: Sei $g(z)$ in dem einfach zusammenhängenden beschränkten Gebiet G analytisch, $f(z)$ sei dort analytisch ausgenommen die Polstellen $b_1, \ldots, b_m$ der Ordnungen $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Weiterhin habe $f(z)$ in G die Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$ der Ordnungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Sei C eine einfach geschlossene, mathematisch positiv orientierte, in G verlaufende Kurve, die die Puknte $b_1, \ldots, b_m$ und die Punkte $a_1, \ldots, a_n$ im Inneren enthalte. Dann gilt $\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g(a_\nu) - \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu g(b_\nu)$.

Folgerung: 1. Argumentprinzip. Mit $g = 1$ ist $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\frac{d}{dz} \log f) dz = \frac{1}{2\pi i} \log f\big|_C = \frac{1}{2\pi i} (\ln |f| + i \arg f)\big|_C = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg f \equiv$Umlaufzahl von $f(z)$ um $z = 0$.
2. Sei $f(z)$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytisch und nehme auf einer in G liegenden geschlossenen Kurve C nur reelle Werte an, dann ist $f \equiv$konst. in G.

Satz 20.33 ***(Rouché):*** Seien f und g in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytisch und f sei auf $C \subset G$ ungleich Null, C einfach geschlossen. Es gelte $|f(z)| > |g(z)|$ auf C. Dann hat $f + g$ innerhalb von C genau so viele Nullstellen wie f.

20.6 Riemann'sche Zahlenkugel – Der unendlich ferne Punkt

Die Gauß'sche Zahlenebene soll bijektiv auf die Riemann'sche Zahlenkugel abgebildet werden. Eineindeutige Abbildung der Punkte der R. Zahlenkugel auf sämtliche Punkte von $\mathbb{C}$. Der ≫Nordpol≪ entspricht ∞, dem unendlich fernen Punkt von $\mathbb{C}$. $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$. Diese Abbildung der Vollkugel ist winkeltreu und kreistreu.

Definition 20.13: Die Menge $\left\{z : |z| > \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon > 0\right\}$ heißt ε-Umgebung des unendlich fernen Punktes. Man sagt $f(z)$ hat in $z = \infty$ einen Pol n-ter Ordnung, eine Nullstelle n-ter Ordnung, eine wesentliche Singularität, wenn $f(\frac{1}{z})$ in $z = 0$ diese Eigenschaft besitzt.

20.7 Rationale Funktionen

Satz 20.34: Eine rationale Funktion, d. h. der Quotient zweier Polynome, hat in $\hat{\mathbb{C}}$ als Singularitäten höchstens Pole. Eine Funktion, die in der ganzen Ebene $\hat{\mathbb{C}}$ bis auf Pole analytisch ist, ist eine rationale Funktion.

20.8 Riemann'sche Flächen

Beispiel: $f(z) = \sqrt[n]{z}$ ist keine Funktion wegen Mehrdeutigkeit.
D_k ist z-Ebene längs positiver reeller Achse aufgeschnitten mit $2\pi k < \arg z < 2\pi(k+1)$.
In D_k wird der Zweig von $\sqrt[n]{z}$ betrachtet, für den $\frac{2\pi}{n}k < \arg w < \frac{2\pi}{n}(k+1)$.
Verheftungsvorschrift: Unteres Ufer von D_k wird mit dem oberen Ufer von D_{k+1} verheftet, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Unteres Ufer von D_{n-1} wird mit dem oberen Ufer von D_0 verheftet.
Ergebnis: n-blättriges Flächenstück, Windungspunkte sind $z = 0$ und $z = \infty$. Riemann'sche Flächen von $f(z) = \sqrt[n]{z}$.

20.9 Konforme Abbildungen

Sei $f(z) = u + iv$ eine stetige eineindeutige (schlichte) Abbildung des Gebietes G auf das Gebiet G^*, diese sei orientierungserhaltend und vollständig differenzierbar.
Näherungsabbildung mit $z_0 \in G$: $f^*(z) = u^* + iv^*$ mit

$$\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(z_0) - x_0 u_x - y_0 u_y \\ v(z_0) - x_0 v_x - y_0 v_y \end{pmatrix} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$$

Affine Abbildung: 1. Falls $\det \mathfrak{A} \neq 0$, dann liegt eine schlichte Abbildung vor. 2. Quadrat → Parallelogramm 3. Kreis → Ellipse

Definition 20.14: Die stetig differenzierbare schlichte orientierungserhaltende Abbildung des Gebietes G auf das Gebiet G^* heißt schlichtkonform, wenn die Näherungsabbildung in jedem Punkt von G eine Ähnlichkeitstransformation ist.

Satz 20.35: Die schlichte orientierungserhaltende stetig differenzierbare Abbildung des Gebietes G auf das Gebiet G^* ist genau dann schlichtkonform, wenn f in G analytisch ist.

Folgerung: Bei konformen Abbildungen gehen infinitisimale Kreise in infinitisimale Kreise über. Konforme Abbildungen sind winkeltreu.

Satz 20.36: Ist $f(z)$ in z_0 analytisch und $f'(z_0) \neq 0$, dann gibt es eine hinreichend kleine Umgebung von z_0, so dass $f(z)$ dort schlicht ist.

20.9.1 Lineare Transformation

Satz 20.37: Jede lineare Transformation $\frac{az+b}{cz+d}$ ist eine Hintereinanderausführung von Ähnlichkeitstransformation und Stürzung.

Satz 20.38: Jede lineare Transformation ist eine schlichte konforme Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ und jede schlichte konforme Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ ist eine lineare Transformation.

Satz 20.39: Die lineare Transformationen bilden bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Satz 20.40: Zu drei verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ und drei voneinander verschiedenen Punkten $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt es genau eine lineare Transformation $w(z)$, so dass gilt $w(z_j) = w_j, j = 1, 2, 3$.

Folgerung: Es gibt unendlich viele lineare Transformationen, die zwei vorgegebene Kreise aufeinander abbilden.

Bemerkung: Möbiustransformation = lineare Transformation

Satz 20.41: Das Doppelverhältnis der vier von einander verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

ist invariant bei linearer Transformation.

Satz 20.42: Das Doppelverhältnis ist genau dann reell, wenn die vier Punkte auf einem Kreis oder einer Geraden liegen.

Definition 20.15: $z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ heißt symmetrisch zu $z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ bezüglich des Kreises $K = \{z : |z - a| = r\}$, wenn gilt $|z_1 - a||z_2 - a| = r^2$ und $\arg(z_1 - a) = (z_2 - a)$.

Satz 20.43: Die Punkte $z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$, $z_1 \neq z_2$, sind genau dann symmetrisch zu K, wenn jeder Kreis durch z_1 und z_2 orthogonal zu K ist.

Satz 20.44: Bei linearen Transformationen gehen symmetrische Punkte in symmetrische Punkte über, d. h. sind z_1, z_2 symmetrisch zu K und ist $w(z)$ eine lineare Transformation, dann sind $w(z_1)$, $w(z_2)$ symmetrisch zum Bild von K bei $w(z)$.

Satz 20.45: Jede lineare Transformation des Einheitskreises in sich ist von der Form $w(z) = e^{i\beta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

20.9.2 Weitere konforme Abbildungen

Joukowski'sche Abbildung $w(z) = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w})$ ist für $z \neq 0, \infty$ analytisch und in allen Gebieten schlichtkonform, in denen für alle z_1, z_2 gilt $z_1 z_2 \neq 1$. Bilder von $|z| = r < 1$ sind Ellipsen in Mittelpunktslage mit Halbachsen $\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ und $\frac{1}{2}(\frac{1}{r} - r)$. Bild von $\arg z = \phi_0$ ist Hyperbel in Mittelpunktslage.

20.9.3 Riemann'scher Abbildungssatz

Grundproblem: Gegeben zwei Gebiete G_1 und G_2. Gibt es eine schlichtkonforme Abbildung von G_1 auf G_2?

Satz 20.46 ***(Häufungsprinzip für analytische Funktionen):*** Sei G ein Gebiet und die Folge $(f_n(z))$ mit $f_n\colon G \to \mathbb{C}$ sei für alle n analytisch in G und im Inneren von G gleichmäßig beschränkt. Dann existiert eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge der Folge $(f_n(z))$. (Im Inneren bedeutet auf jeder kompakten Teilmenge von G.)

Satz 20.47 ***(Satz von Vitali):*** Sei G ein Gebiet, $(f_n(z))$ eine Folge, $f_n\colon G \to \mathbb{C}$, $f_n(z)$ seien analytisch in G und im Inneren von G gleichmäßig beschränkt. Konvergiert die Folge $(f_n(z))$ in einer Punktfolge $(z_k) \to z_0 \in G$, dann konvergiert $(f_n(z))$ lokal gleichmäßig in G.

Satz 20.48: Sei G ein Gebiet, $(f_n(z))$ eine Folge, $f(z)$ sei analytisch in G und konvergiere lokal gleichmäßig in G. Jedes $f_n(z)$ nehme jeden Wert höchstens k-mal an, dann ist die Grenzfunktion konstant oder nimmt jeden Wert ebenfalls höchstens k-mal an.

Folgerung: Eine im Inneren eines Gebietes gleichmäßig konvergente Folge schlichter analytischer Funktionen hat als Grenzfunktionen eine konstante oder eine schlichte analytische Funktion.

Satz 20.49 ***(Riemann'scher Abbildungssatz):*** Jedes einfach zusammenhängendes Gebiet mit mindestens zwei verschiedenen Randpunkten kann schlicht konform auf den Einheitskreis abgebildet werden, dabei ist diese Abbildung eindeutig bestimmt, falls verlangt wird, dass ein Punkt dieses Gebietes in den Nullpunkt abgebildet wird und eine in diesem Punkt vorgegebene Richtung in die Richtung der positiven reellen Achse abgebildet wird.

Satz 20.50: Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit mindestens zwei Randpunkten. Dann gilt: unter allen schlicht konformen Abbildungen von G mit $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0, z_0 \in G, \forall z \in G : |f(z)| < 1$ wird $|f'(z_0)|$ maximal nur für die Abbildung auf den Einheitskreis.

Satz 20.51: Unter allen schlicht konformen Abbildungen $f(z)$ des einfach zusammenhängenden Gebietes $G \ni z_0$ mit mindestens zwei Randpunkten, $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 1$, gibt es genau eine, für die $\sup_{z \in G} |f(z)|$ minimal wird. Diese Funktion bildet auf eine zu Null konzentrische Kreisscheibe ab.

Definition 20.16: $R = \min_f \sup_{z \in G} |f(z)|$ heißt konformer Radius von G bzgl. z_0. Dabei ist f eine beliebige konforme Abbildung von G mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) = 1$.

Satz 20.52: Unter allen schlicht konformen Abbildungen $f(z)$ des einfach zusammenhängenden Gebietes G mit mindestens zwei Randpunkten, $z_0 \in G, f(z_0) = 0, f'(z_0) = 1$, gibt es genau eine, für die $\inf_{f \in \partial G_f} |f|$ maximal wird. Diese bildet auf eine zu Null konzentrische Kreisscheibe ab.

Satz 20.53 ***(Bieberbach'scher Flächensatz):*** Unter allen konformen Abbildungen des einfach zusammenhängenden Gebietes G mit mindestens zwei Randpunkten, $z_0 \in G, f(z_0) = 0, f'(z_0) = 1$, wird der innere

Flächeninhalt des Bildgebietes minimal bei konformer Abbildung auf eine zu Null konzentrische Kreisscheibe.

Satz 20.54: Unter allen schlicht konformen Abbildungen des einfach zusammenhängenden Gebietes G mit mindestens zwei Randpunkten, $z_0 \in G, f(z_0) = 0, f'(z_0) = 1$, nimmt $f_0(z) = z$ das Minimum der Länge des Bildrandes an.

Satz 20.55 ***(Satz von Landau, Toeplitz):*** Unter allen Abbildungen obiger Klasse nimmt $f_0(z)$ und nur $f_0(z)$ das Minimum des Durchmesser der Bildgebiete an.

Definition 20.17: $\mathcal{S} = \{f(z) : f$ schlicht konforme Abbildung von $|z| < 1, f(0) = 0, f'(0) = 1, f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots\}$,
$\Sigma = \{f(z) : f$ schlicht konforme Abbildung von $|z| > 1, f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\}$ (hydrodynamische Normierung),
$\Sigma' = \{f(z) : f$ schlicht konforme Abbildung von $|z| > 1, f(z) = A_0 + z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots,$ mit beliebiger Konstante $A_0\}$.

Satz 20.56 ***(Zweiter Bieberbach'scher Flächensatz, Growell'scher Flächensatz):*** $f \in \Sigma$, $f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$, dann gilt $\sum_n = 1^\infty n|a_n|^2 \leq 1$.

Satz 20.57 ***(Koebe'scher Viertelsatz):*** Für $f \in \mathcal{S}$ ist der Abstand des Bildrandes von $w = 0$ stets größer oder gleich $\frac{1}{4}$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $f = f_\vartheta = \frac{z}{(z+e^{i\vartheta})^2} \equiv$ Koebefunktion ist.