Aufgaben des Mannschaftswettbewerbes “Baltic Way 2001”

Hamburg, 4. November 2001

German version

1. Für einen Wettbewerb wurden acht Probleme ausgewählt. Jeder Teilnehmer erhielt 3 Probleme. Je zwei Teilnehmer erhielten höchstens ein gleiches Problem. Was ist die größtmögliche Teilnehmerzahl?

2. Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Gibt es n paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen von $\{1, 2, 3, \dots\}$ derart, dass jede positive ganze Zahl eindeutig als Summe von höchstens n Summanden darstellbar ist, die sämtlich aus verschiedenen Teilmengen gewählt sind?

3. In einem 7×7 Quadrat sind die Zahlen $1, 2, \dots, 49$ platziert. Es wird die Summe der Zahlen in jeder Zeile und jeder Spalte gebildet. Einige dieser 14 Summen sind ungerade, die anderen gerade. Es sei A die Summe aller ungeraden Summen und B die Summe aller geraden Summen. Ist es möglich, dass die Zahlen derart in das Quadrat platziert wurden, dass $A = B$ gilt?

4. Es seien p und q verschiedene Primzahlen. Beweisen Sie:

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{1}{2}(p-1)(q-1) \quad .$$

(Hier bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl nicht größer als x.)

5. Gegeben seien 2001 Punkte auf einem Kreis, jeder von ihnen entweder rot oder grün gefärbt. In einem Schritt werden nach folgender Regel alle Punkte gleichzeitig umgefärbt: Wenn beide Nachbarn eines Punktes P die gleiche Farbe wie P haben, dann behält P seine Farbe, ansonsten erhält P die andere Farbe. Mit einer ersten Färbung F_1 startend, erhalten wir nach mehreren Umfärbungsschritten die Färbungen $F_2, F_3, \dots$. Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl $n_0 \leq 1000$ gibt, so dass $F_{n_0} = F_{n_0+2}$ gilt! Bleibt diese Aussage wahr, wenn 1000 durch 999 ersetzt wird?

6. Die Punkte A, B, C, D, E liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis c und erfüllen $AB \parallel EC$ und $AC \parallel ED$. Die Tangente des Kreises c im Punkt E schneidet die Gerade AB im Punkt P. Die Geraden BD und EC schneiden sich im Punkt Q. Beweisen Sie, dass $|AC| = |PQ|$ gilt!

7. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Ein Kreis durch A schneidet die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ in den inneren Punkten M, K und N. Beweisen Sie:

$$|AB| \cdot |AM| + |AD| \cdot |AN| = |AK| \cdot |AC| \,.$$

8. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, und N der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Es gelte $\sphericalangle AND = 135^\circ$. Beweisen Sie:

$$|AB| + |CD| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |BC| \geq |AD| \,.$$

9. Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte P, welche innerhalb des Rhombus liegen und $\sphericalangle APD + \sphericalangle BPC = 180^\circ$ erfüllen!

10. In einem Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ die Seite $\overline{BC}$ im Punkt D. Es gelte $|BD| \cdot |CD| = |AD|^2$ und $\sphericalangle ADB = 45°$. Bestimmen Sie die Winkel des Dreiecks ABC!

11. Die reellwertige Funktion f ist definiert für alle positiven ganzen Zahlen. Für alle ganzen Zahlen $a > 1$, $b > 1$ mit $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ gilt

$$f(ab) = f(d) \left(f \left(\frac{a}{d} \right) + f \left(\frac{b}{d} \right) \right).$$

Bestimmen Sie alle möglichen Werte für $f(2001)$!

12. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen, welche $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 3$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i^5 = 5$ erfüllen. Beweisen Sie, dass $\sum_{i=1}^{n} a_i > 3/2$ gilt!

13. Es sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_0 = 1$ und $a_n = a_{\lfloor 7n/9 \rfloor} + a_{\lfloor n/9 \rfloor}$ für $n = 1, 2, \ldots$. Beweisen Sie, dass es eine positive ganze Zahl k gibt, so dass $a_k < \frac{k}{2001!}$ gilt! (Hier bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl nicht größer als x.)

14. Gegeben seien $2n$ Karten. Auf jeder Karte ist eine reelle Zahl x, $1 \leq x \leq 2$ geschrieben (es können verschiedene Zahlen auf verschiedenen Karten stehen). Beweisen Sie, dass die Karten in zwei Stapel mit den Summen s_1 und s_2 aufgeteilt werden können, wobei $\frac{n}{n+1} \leq \frac{s_1}{s_2} \leq 1$ gilt!

15. Es sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Folge positiver reeller Zahlen, welche $i \cdot a_i^2 \geq (i+1) \cdot a_{i-1} a_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots$ erfüllen. Weiterhin seien x und y positive reelle Zahlen und $b_i = x a_i + y a_{i-1}$ für $i = 1, 2, \ldots$. Beweisen Sie, dass $i \cdot b_i^2 > (i+1) \cdot b_{i-1} b_{i+1}$ für alle $i \geq 2$ gilt!

16. Sei f eine reellwertige Funktion, definiert für alle positiven ganzen Zahlen, welche folgende Bedingung erfüllt: Für alle $n > 1$ existiert ein Primteiler p von n derart, dass $f(n) = f(n/p) - f(p)$ gilt. Es sei $f(2001) = 1$ vorausgesetzt. Welchen Wert hat $f(2002)$?

17. Es sei n eine positive ganze Zahl. Beweisen Sie, dass aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ mindestens $2^{n-1} + n$ Zahlen so ausgewählt werden können, dass für je zwei verschiedene ausgewählte Zahlen x und y die Summe $x + y$ kein Teiler des Produktes $x \cdot y$ ist!

18. Es sei a eine ungerade ganze Zahl. Beweisen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n und m mit $n \neq m$ die Zahlen $a^{2^n} + 2^{2^n}$ und $a^{2^m} + 2^{2^m}$ teilerfremd sind!

19. Bestimmen Sie die kleinste positive ungerade ganze Zahl, welche die gleiche Anzahl von positiven Teilern wie die Zahl 360 besitzt!

20. Aus der Folge (a, b, c, d) ganzer Zahlen kann in einem Schritt für jede ganze Zahl n jede der Folgen

$$(c, d, a, b), \quad (b, a, d, c), \quad (a + nc, b + nd, c, d), \quad (a + nb, b, c + nd, d)$$

erzeugt werden. Ist es möglich, $(3, 4, 5, 7)$ aus $(1, 2, 3, 4)$ durch eine Folge von Schritten zu erzeugen?