

Besondere Lernleistung
Approximation von Funktionen
Dokumentation

Bearbeitet von: Steffen Weber
Leistungskurs Mathematik
Georg-Cantor-Gymnasium Halle

Betreut durch: Dr. R. Picht
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische Mathematik

Beschreibung der Arbeitsabläufe

Im Schuljahr 1999/2000 beschäftigte ich mich in meiner wissenschaftlich-praktischen Arbeit mit dem Thema "Eindimensionale Interpolation". Dabei wurde ich von Frau Dr. Picht und Herrn Dr. Bruder betreut. In meiner Besonderen Lernleistung, die von Herbst 2000 bis Frühjahr 2002 bearbeitet wurde, knüpfte ich mit dem Thema "Approximation von Funktionen" an die wissenschaftlich-praktische Arbeit an. Bei der Ausarbeitung wurde mir entsprechendes Material zur Verfügung gestellt. Bei der präzisen Formulierung erhielt ich Hilfe von Frau Dr. Picht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Approximation stetiger Funktionen	4
2.1	Begriffe und Definitionen	4
2.2	Approximation mittels allgemeinem Ansatz	4
2.3	Approximation mittels Polynomen	6
2.4	Approximation periodischer Funktionen	7
2.4.1	Schnelle FOURIER-Transformation	9
3	B-Splines	13
3.1	Definitionen und Begriffe	13
3.2	Existenz und Eindeutigkeit der B-Splines	14
3.3	Lokale Basen	15
4	Zweidimensionale Approximation	19
4.1	Interpolation von Flächen mittels Dreiecken	19
4.2	Interpolation von Flächen mittels Parallelogrammen	20
5	Literaturverzeichnis	23
A	Bestimmung von Wirkungsgradkennlinien von Sonnenkollektoren	24
A.1	Berechnung der Kollektorkennwerte	24

Kapitel 1

Einleitung

Häufig ist eine Funktion $f(x)$ gegeben, für die zum Beispiel der Rechenaufwand für die Funktionswertberechnung groß ist. Deshalb soll eine Funktion $F(x)$ so konstruiert werden, dass sie leichter zu berechnen ist und möglichst "nah" an der gegebenen Funktion liegt. Diese Funktion $F(x)$ heißt Approximationsfunktion. Als Approximationsfunktionen werden dann zum Beispiel Polynome verwendet wegen der relativ schnellen Berechnung deren Funktionswerte. Für periodische Funktionen werden dagegen Summen trigonometrischer Funktionen als Approximationsfunktionen genutzt.

In anderen Fällen sind in der Numerischen Mathematik statt einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nur einige diskrete Funktionswerte $f(x_i)$ an endlich vielen Stellen x_i gegeben. Dies trifft zum Beispiel zu, wenn die Funktionswerte $f(x_i)$ in der Form experimenteller Daten vorliegen. Dann sind Funktionen gesucht, deren Graph durch die bekannten Punkte $(x_i, f(x_i))$ verläuft.

Kapitel 2

Approximation stetiger Funktionen

2.1 Begriffe und Definitionen

Es werden Definitionen und Eigenschaften von Matrizen gebraucht, um ein Maß für die "Abweichung" der approximierenden Funktion $F(x)$ von der gegebenen Funktion $f(x)$ zu haben.

Definition 2.1: Vektornorm

Die Abbildung $\| \cdot \|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Vektornorm auf \mathbb{R}^n , wenn gilt:

$$\| \vec{x} \| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \| \vec{x} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \quad (\text{Definitheit})$$

$$\| c \cdot \vec{x} \| = |c| \cdot \| \vec{x} \| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \wedge \forall c \in \mathbb{R} \quad (\text{Homogenität})$$

$$\| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Definition 2.2: L_p -Norm

Sei $f(x)$ eine auf $[a, b]$ stetige Funktion.

Die stetige L_p -Norm ist definiert als

$$\| f(x) \|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty, p \text{ ganzzahlig,}$$

$$\text{und } \| f(x) \|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Definition 2.3: Symmetrie einer Matrix

Eine quadratische Matrix A ist symmetrisch, wenn $A = A^T$ gilt.

Definition 2.4: Positive Definitheit einer Matrix

Eine quadratische Matrix A ist positiv definit, wenn $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ die Ungleichung $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ gilt.

2.2 Approximation mittels allgemeinem Ansatz

Der Graph einer Approximationsfunktion $F(x)$ soll in einem Intervall $[a, b]$ möglichst "nah" an den Graph einer gegebenen, stetigen Funktion $f(x)$ liegen. Da der Gebrauch der quadratischen Norm (L_2 -Norm) üblich ist, lautet die Approximationsforderung:

$$\| F(x) - f(x) \|_2 \rightarrow \min \tag{2.1}$$

Wegen der Monotonie und der Nichtnegativität der quadratischen Funktion $\| \cdot \|^2$ wird im Weiteren nur $\| \cdot \|_2^2$ betrachtet, so dass $\| F(x) - f(x) \|_2^2$ minimal sein soll.

$$\| F(x) - f(x) \|_2^2 \rightarrow \min \quad (2.2)$$

Mit der auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion $f(x)$ wird für die Approximation $F(x)$ der folgende Ansatz

$$F(x) = \sum_{j=1}^n a_j g_j(x) \quad (2.3)$$

mit den stetigen, vorgegebenen Funktionen $g_j(x)$ und gesuchten, reellen Koeffizienten a_j gemacht. Es wird wegen der Forderung (2.2)

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_n) := \| F(x) - f(x) \|_2^2 \quad (2.4)$$

definiert. Damit gilt nun mit der Definition 2.2 und Ansatz (2.3):

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j g_j(x) - f(x) dx \quad (2.5)$$

Nach dem notwendigen Kriterium für ein Extremum müssen die ersten partiellen Ableitungen von Q gleich null sein. Durch partielle Differentiation von $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nach a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, ergeben sich die folgende Gleichungen

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = \int_a^b 2 \left(\sum_{j=1}^n a_j g_j(x) - f(x) \right) g_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

Nun wird $\frac{\partial Q}{\partial a_k}$ gleich null gesetzt, so dass

$$\int_a^b (a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x) - f(x)) g_k(x) dx = 0 \quad (2.7)$$

folgt. Umformen von (2.7) liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \int_a^b g_1(x)g_1(x)dx & \cdots & \int_a^b g_n(x)g_1(x)dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b g_1(x)g_n(x)dx & \cdots & \int_a^b g_n(x)g_n(x)dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f(x)g_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b f(x)g_n(x)dx \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Da die Koeffizientenmatrix von (2.8) symmetrisch ist, besitzt das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, wenn die Koeffizientenmatrix positiv definit ist. Durch Einsetzen der berechneten Koeffizienten in (2.3) folgt die Funktion $F(x)$. Die zweiten partiellen Ableitungen von $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ werden benötigt, um das hinreichende Kriterium zu überprüfen.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial a_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 Q}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial a_n \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 Q}{\partial a_n^2} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(x)g_1(x)dx & \cdots & \int_a^b g_n(x)g_1(x)dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b g_1(x)g_n(x)dx & \cdots & \int_a^b g_n(x)g_n(x)dx \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Die rechte Matrix der Gleichung (2.9) ist die Koeffizientenmatrix der Gleichung (2.8). Somit ist Q für jede eindeutige Lösung von (2.8) ein Minimum.

2.3 Approximation mittels Polynomen

Da Funktionswerte und Ableitungen von Polynomen (geringen Grades) leicht zu berechnen sind, wird für die Approximationsfunktion der Ansatz

$$F(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \quad (2.10)$$

gemacht. Mit $g_j(x) = x^j$ und einer Indexverschiebung sind die Gleichungen (2.3) und (2.10) äquivalent. Also gilt die zu (2.7) äquivalente Gleichung

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n - f(x)) x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.11)$$

Nach Integration ergibt sich die folgende Gleichung für jedes k

$$\frac{a_0(b^{k+1} - a^{k+1})}{k+1} + \frac{a_1(b^{k+2} - a^{k+2})}{k+2} + \dots + \frac{a_n(b^{k+n+1} - a^{k+n+1})}{k+n+1} - \int_a^b f(x)x^k dx = 0 \quad (2.12)$$

Umformen von (2.12) liefert das folgende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} b-a & \frac{b^2-a^2}{2} & \dots & \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \\ \frac{b^2-a^2}{2} & \frac{b^3-a^3}{3} & \dots & \frac{b^{n+2}-a^{n+2}}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} & \frac{b^{n+2}-a^{n+2}}{n+2} & \dots & \frac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b f(x)x dx \\ \vdots \\ \int_a^b f(x)x^n dx \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Sei A die Koeffizientenmatrix von (2.13) und $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)^T$, dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{p}^T A \vec{p} &= \sum_{i=0}^n \left(p_i \sum_{j=0}^n \left(\int_a^b x^{i+j} dx p_j \right) \right) \\ \vec{p}^T A \vec{p} &= \int_a^b \sum_{i=0}^n p_i x^i \sum_{j=0}^n p_j x^j dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Gleichung (2.14) lässt sich auch wie folgt darstellen

$$\vec{p}^T A \vec{p} = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n p_i x^i \right)^2 dx \quad (2.15)$$

Da der rechte Term von (2.15) größer als null ist, falls $p_i x^i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, ist die Koeffizientenmatrix A positiv definit. Des Weiteren gilt $A = A^T$, so dass das Gleichungssystem (2.13) wegen der positiven Definitheit und der Symmetrie der Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar ist. Die Lösung \vec{a} dieses Gleichungssystems liefert die Koeffizienten des Polynom $F(x)$.

Wird die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0,1]$ betrachtet, so hat die Koeffizientenmatrix $A =: H_n$ folgende Form

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Die Matrix H_n wird als HILBERT-Matrix bezeichnet. Für große n ist die HILBERT-Matrix schlecht konditioniert, so dass geringe numerische Abweichungen der Elemente der Matrix große Abweichungen des Vektors \vec{a} bedeuten können.

2.4 Approximation periodischer Funktionen

Die Bewegung gekoppelter Schwinger kann durch eine periodische Funktion mit einer kleinsten Periode p_0 beschrieben werden. Bei vielen schwingenden Körpern wird der Aufwand zur Berechnung von Funktionswerten sehr groß, so dass eine periodische Funktion gesucht wird, welche die gegebene Funktion approximiert. Bei geeigneter Skalierung der Abszisse beträgt die kleinste Periode 2π .

Satz 2.1: Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode 2π und über $[-\pi, \pi]$ quadratisch integrierbar, dann ist

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (2.17)$$

die beste stetige Approximation, wenn gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2.18)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.19)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.20)$$

Beweis 2.1: Für die beste Approximation von f ist

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m) := \int_{-\pi}^{\pi} (F(x) - f(x))^2 dx \quad (2.21)$$

minimal. Damit $Q(a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m)$ minimal ist, müssen nach dem notwendigen Kriterium für Extrema die ersten partiellen Ableitungen nach den Variablen a_k, b_k gleich null sein. Es gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \frac{2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{q=1}^m (a_q \cos(qx) + b_q \sin(qx)) \right) dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \frac{1}{2}a_0(\pi - (-\pi)) + \sum_{q=1}^m \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_q \cos(qx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_q \sin(qx) dx \right) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = a_0\pi + \sum_{q=1}^m a_q(\sin(q\pi) - \sin(-q\pi)) + \sum_{q=1}^m b_q(-\cos(q\pi) + \cos(-q\pi)) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2.22)$$

Aufgrund der Ganzzahligkeit von q gilt $\sin(q\pi) = \sin(-q\pi) = 0$. Die Cosinusfunktion ist eine gerade Funktion, es gilt $\cos(x) - \cos(-x) = 0$. Deshalb folgt nun

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = a_0\pi - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2.23)$$

Für $k = 1, 2, \dots, m$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial a_k} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} (F(x) - f(x)) \cos(kx) dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{2} a_0 \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{q=1}^m 2a_q \cos(qx) \cos(kx) dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{q=1}^m 2b_q \sin(qx) \cos(kx) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{q=1}^m a_q (\cos((q+k)x) + \cos((q-k)x)) dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{q=1}^m b_q (\sin((q+k)x) + \sin((q-k)x)) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\
&= a_0 (\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)) + \sum_{q=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} a_q (\cos((q+k)x) + \cos((q-k)x)) dx \\
&\quad + \sum_{q=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} b_q (\sin((q+k)x) + \sin((q-k)x)) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Da $\int \cos((q-k)x) dx = \frac{\sin((q-k)x)}{q-k}$ ist, muss $q = k$ separat behandelt werden. Somit folgt aus (2.24) und $\sin(k\pi) = 0$ wegen ganzzahligem k

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial a_k} &= \sum_{q=1, q \neq k}^m \int_{-\pi}^{\pi} a_q (\cos((q+k)x) + \cos((q-k)x)) dx \\
&\quad + \sum_{q=1, q \neq k}^m \int_{-\pi}^{\pi} b_q (\sin((q+k)x) + \sin((q-k)x)) dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} a_k (\cos(2kx) + 1) + b_k \sin(2kx) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\
&= \sum_{q=1, q \neq k}^m \int_{-\pi}^{\pi} a_q (\cos((q+k)x) + \cos((q-k)x)) dx \\
&\quad + \sum_{q=1, q \neq k}^m \int_{-\pi}^{\pi} b_q (\sin((q+k)x) + \sin((q-k)x)) dx \\
&\quad + a_k (\sin(2k\pi) - \sin(-2k\pi) + \pi - (-\pi)) \\
&\quad + b_k (-\cos(2k\pi) + \cos(-2k\pi)) - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\
&= \sum_{q=1, q \neq k}^m b_q \left(\frac{-\cos((q+k)\pi) + \cos(-(q+k)\pi)}{q+k} + \frac{-\cos((q-k)\pi) + \cos(-(q-k)\pi)}{q-k} \right) \\
&\quad + 2a_k \pi - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Da die Cosinusfunktion gerade ist, folgt wegen der Ganzzahligkeit von q und k aus (2.25) die Gleichung

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = 2a_k\pi - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (2.26)$$

Für $k = 1, 2, \dots, m$ gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial b_k} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} (F(x) - f(x)) \sin(kx) dx$$

Analog zur Herleitung von Gleichung (2.26), wird die Gleichung

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = 2b_k\pi - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (2.27)$$

hergeleitet. Da $Q(a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m)$ nur dann minimal wird, wenn $\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \frac{\partial Q}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial a_m} = \frac{\partial Q}{\partial b_1} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial b_m} = 0$ gilt, folgen aus (2.22), (2.26) und (2.27) die Gleichungen (2.18), (2.19) und (2.20). Dabei wird auf den Nachweis verzichtet, dass die hinreichenden Forderung erfüllt wird.

Bemerkung 2.1: Die Funktion $F(x)$ (2.17) ist die so genannte FOURIER-Entwicklung der Funktion $f(x)$.

Der Integrand der rechten Seite ist im Allgemeinen komplizierter als der Integrand der zu approximierenden Funktion. Deshalb wird dieses Integral mit Hilfe von Interpolationsquadraturen numerisch berechnet.

2.4.1 Schnelle FOURIER-Transformation

Die Integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ und $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$, $k = 1, 2, \dots, m$, sind meist nur schwer berechenbar. Deshalb sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ von (2.17) ebenfalls schwer berechenbar, so dass sie mit Hilfe der schnellen FOURIER-Transformation (engl. **F**ast **F**ourier **T**ransform) bestimmt werden. Die Approximationsaufgabe werde als diskretes Problem mit $N = 2^p$ Stützstellen betrachtet.

Mit $x_j := \frac{2\pi}{N}j$ und $f_j := f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, können die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ numerisch mittels Trapezregel berechnet werden: Anstelle der stetigen Funktion f wird die stückweise lineare Funktion f^* integriert, die an den Stellen x_j die Funktionswerte f_j besitzt. Dann folgt aus (2.18), (2.19) und (2.20)

$$a_k^* = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j \cos(kx_j), \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (2.28)$$

$$b_k^* = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin(kx_j), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.29)$$

Die Funktion $F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ aus Satz 2.1 kann mit Hilfe der Euler'schen Formel als

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^m \left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \quad (2.30)$$

dargestellt werden. Dabei bezeichnet i die imaginäre Einheit.
Nun kann $F(x)$ wie folgt umgeformt werden.

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^m \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right) \quad (2.31)$$

Mit den Substitutionen $c_0 := \frac{1}{2}a_0$, $c_k := \frac{a_k - ib_k}{2}$ für $k = 1, 2, \dots, m$ und $c_k := \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}$ für $k = -m, -m + 1, \dots, -1$ gilt

$$F(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx} \quad (2.32)$$

Für die numerischen Koeffizienten werden die analogen Substitutionen $c_0^* := \frac{1}{2}a_0^*$, $c_k^* := \frac{a_k^* - ib_k^*}{2}$ für $k = 1, 2, \dots, m$ und $c_k^* := \frac{a_{-k}^* + ib_{-k}^*}{2}$ für $k = -m, -m + 1, \dots, -1$ gemacht, so dass gilt

$$c_0^* := \frac{1}{2}a_0^* = \frac{1}{2} \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos(0) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \quad (2.33)$$

Für $k = 1, 2, \dots, m$ gilt

$$\begin{aligned} c_k^* &:= \frac{a_k^* - ib_k^*}{2} = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos(kx_j) - i \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin(kx_j) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j (\cos(kx_j) - i \sin(kx_j)) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-kx_j} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Für $k = -m, -m + 1, \dots, -1$ gilt

$$\begin{aligned} c_k^* &:= \frac{a_{-k}^* - ib_{-k}^*}{2} = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos(-kx_j) + i \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin(-kx_j) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j (\cos(kx_j) - i \sin(kx_j)) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-kx_j} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Damit gilt $c_k^* = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ikx_j}$ für $k = -m, -m+1, \dots, m$.

Bemerkung 2.2: Die Zahl $c_{-k}^* = \overline{c_k^*}$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu c_k^* für $k = 1, 2, \dots, m$.

Es wird die Bezeichnung

$$c_k^{\hat{}} := N c_k^* = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ikx_j} \quad (2.36)$$

eingeführt, da ein $\frac{1}{N}$ konstanter Faktor ist. Mit $w_N := e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ gilt

$$c_k^{\hat{}} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-kx_j} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ik\frac{2\pi}{N}j} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}} \right)^{kj} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j w_N^{kj} \quad (2.37)$$

Angenommen k ist gerade, d.h. $k = 2t$, so gilt $w_N^{kj} = w_N^{k(j+\frac{1}{2}N)}$ wegen
 $w_N^{kj} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}}\right)^{kj} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}\right) \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}}\right)^{2t} = e^{(-i\frac{2\pi}{N}kj - i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}2t)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}(kj + \frac{N}{2}k)} = w_N^{k(j+\frac{N}{2})}$.
Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} c_k^{\hat{}} &= f_0 w_N^{0k} + f_1 w_N^{1k} + \dots + f_{\frac{N}{2}-1} w_N^{(\frac{N}{2}-1)k} \\ &\quad + f_{\frac{N}{2}} w_N^{\frac{N}{2}k} + f_{\frac{N}{2}+1} w_N^{(\frac{N}{2}+1)k} + \dots + f_{N-1} w_N^{(N-1)k} \\ c_k^{\hat{}} &= (f_0 + f_{\frac{N}{2}}) w_N^{0k} + (f_1 + f_{\frac{N}{2}+1}) w_N^{1k} + \dots + (f_{\frac{N}{2}-1} + f_{N-1}) w_N^{(\frac{N}{2}-1)k} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Mit $g_j := f_j + f_{\frac{N}{2}+j}$ ist (2.38) äquivalent zu der folgenden Gleichung.

$$\begin{aligned} c_k^{\hat{}} &= g_0 w_N^{0k} + g_1 w_N^{1k} + \dots + g_{\frac{N}{2}-1} w_N^{(\frac{N}{2}-1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} g_j w_N^{kj} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} g_j (w_N^2)^{tj} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} g_j w_{\frac{N}{2}}^{tj} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Falls k ungerade ist, d.h. $k = 2t + 1$, so gilt wegen $w_N^{kj} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{N}}\right)^{kj} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} ((-1)^2)^{t+1}$
 $= e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} (-1) e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}(2t+1)} = (-1) e^{(-i\frac{2\pi}{N}kj - i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}k)} = -e^{-i\frac{2\pi}{N}k(j+\frac{N}{2}k)} = -w_N^{k(j+\frac{N}{2}k)}$

$$\begin{aligned} c_k^{\hat{}} &= f_0 w_N^{0k} + f_1 w_N^{1k} + \dots + f_{\frac{N}{2}-1} w_N^{(\frac{N}{2}-1)k} \\ &\quad + f_{\frac{N}{2}} w_N^{\frac{N}{2}k} + f_{\frac{N}{2}+1} w_N^{(\frac{N}{2}+1)k} + \dots + f_{N-1} w_N^{(N-1)k} \\ c_k^{\hat{}} &= (f_0 - f_{\frac{N}{2}}) w_N^{0k} + (f_1 - f_{\frac{N}{2}+1}) w_N^{1k} + \dots + (f_{\frac{N}{2}-1} - f_{N-1}) w_N^{(\frac{N}{2}-1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_j - f_{\frac{N}{2}+j}) w_N^j w_N^{2tj} \end{aligned}$$

Mit $h_j := (f_j - f_{\frac{N}{2}+j}) w_N^j$ ergibt sich aus der oben stehenden Gleichung die folgende.

$$\begin{aligned} c_k^{\hat{}} &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} h_j (w_N^2)^{tj} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} h_j w_{\frac{N}{2}}^{tj} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Unter FFT_N ist die Bestimmung von N Variablen $c_k^{\hat{}}$, $k = 0, 1, \dots, N$, zu verstehen. Mit (2.39) und (2.40) kann jede FFT_N mit N Gliedern in zwei $FFT_{\frac{N}{2}}$ mit $\frac{N}{2}$ Gliedern überführt

werden.
Wegen (2.36) gilt

$$c_k^* = \frac{1}{N} c_k \hat{\quad} \quad (2.41)$$

Die Rücksubstitutionen der c_k^* ergeben $a_0^* = 2c_0^*$, $a_k^* = c_k^* + c_{-k}^* = c_k^* + \overline{c_k^*} = 2\text{Re}(c_k^*)$ und $b_k^* = i(c_k^* - c_{-k}^*) = i(c_k^* - \overline{c_k^*}) = -2\text{Im}(c_k^*)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Dabei ist $\text{Re}(c_k^*)$ der Realteil von c_k^* und $\text{Im}(c_k^*)$ der Imaginärteil von c_k^* .

Beispiel 2.1: Gegeben seien die Daten $(0,1)$, $(\frac{\pi}{4},3)$, $(\frac{\pi}{2},-1)$, $(\frac{3\pi}{4},-2)$, $(\pi,-1)$, $(\frac{5\pi}{4},-3)$, $(\frac{3\pi}{2},2)$, und $(\frac{7\pi}{4},0)$. Gesucht ist die beste Approximation $F(x)$ mit

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) + \frac{a_4}{2} \cos(4x)$$

Mit Hilfe des folgenden Schemas werden die Koeffizienten c'_k berechnet:

	dual	FFT ₈	2 FFT ₄ (1. Red.)	4 FFT ₂ (2. Red.)	8 FFT ₁ (3. Reduktion)		dual
f_0	f_{000}	1	0	1	-1	c'_0	c'_{000}
f_1	f_{001}	3	0	-2	3	c'_4	c'_{100}
f_2	f_{010}	-1	1	-1	$-1 - 2i$	c'_2	c'_{010}
f_3	f_{011}	-2	-2	$-2i$	$-1 + 2i$	c'_6	c'_{110}
f_4	f_{000}	-1	2	$2 + 3i$	$(2 + 4\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})i$	c'_0	c'_{000}
f_5	f_{101}	-3	$3\sqrt{2}i$	$4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$	$(2 - 4\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2})i$	c'_5	c'_{101}
f_6	f_{110}	2	$3i$	$2 - 3i$	$(2 - 4\sqrt{2}) - (3 + 2\sqrt{2})i$	c'_3	c'_{011}
f_7	f_{111}	0	$\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	$-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$	$(2 + 4\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2})i$	c'_7	c'_{111}

Nach (2.41) und Rücksubstitution folgt $a_0 = \frac{2}{8}c'_0 = -\frac{1}{4}$ und die Werte der anderen Koeffizienten:

$$F(x) = -\frac{1}{8} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2} \cos(3x) + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} \sin(3x) + \frac{3}{8} \cos(4x) \quad (2.42)$$

Bemerkung 2.3: Wenn die Indizes k und j der f_k und der c_j im Dualsystem dargestellt werden, so ist ersichtlich, dass die Indizes der f_k invers zu den Indizes der c_j in der gleichen Zeile sind.

Bemerkung 2.4: Beispiel 2.1 ist auch eine Interpolation, da die Anzahl der Stützstellen gleich der Anzahl der Koeffizienten ist und der Graph von $F(x)$ durch die gegebenen Punkte verläuft.

$$\begin{aligned} F(0) &= -\frac{1}{8} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 = 1 \\ F(\frac{\pi}{4}) &= -\frac{1}{8} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{8} \cdot (-1) = 3 \\ F(\frac{\pi}{2}) &= -\frac{1}{8} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \cdot (-1) + \frac{3}{8} \cdot 1 = -1 \\ F(\frac{3\pi}{4}) &= -\frac{1}{8} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{8} \cdot (-1) = -2 \\ F(\pi) &= -\frac{1}{8} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = -1 \\ F(\frac{5\pi}{4}) &= -\frac{1}{8} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{8} \cdot (-1) = -3 \\ F(\frac{3\pi}{2}) &= -\frac{1}{8} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \cdot (-1) - \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = 2 \\ F(\frac{7\pi}{4}) &= -\frac{1}{8} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{8} \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

Kapitel 3

B-Splines

Die Grundidee der sogenannten Spline-Interpolation besteht darin, eine Kurve durch diskrete Punkte mittels "aneinander gehefteter" Funktionen zu beschreiben, um so Zwischenstellen leicht interpolieren zu können. Dabei sind die Funktionen, die stückweise auf den Intervallen definiert sind, durch bestimmte Forderungen verheftet.

Wird über ein Gitter $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ linear interpoliert, so entsteht folgende Funktion $s(x)$:

$$s(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 1$$

Der Graph dieser Funktion ist ein Polygonzug.

Definition 3.1: Innere Knoten und Randknoten

Die Knotenmenge $\Omega_n := \{x_i\}_{i=0}^n$, bestimme die Zerlegung des Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Dabei soll $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ gelten.

Dann sind x_1, x_2, \dots, x_{n-1} innere Knoten, x_0 und x_n die Randknoten.

3.1 Definitionen und Begriffe

Es werden weitere Definitionen und Begriffe benötigt.

Definition 3.2: Polynom-Splines

Eine Funktion $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polynom-Spline von Grad m , wenn gilt

a) s ist auf $[a, b]$ $(m-1)$ -mal stetig differenzierbar

b) s ist ein Polynom vom Grad m für $x \in [x_i, x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Die Menge aller Polynom-Splines vom Grad m zur Zerlegung Ω_n wird mit $S_m(\Omega_n)$ bezeichnet.

Für die weiteren Ausführungen wird die Darstellung sogenannter abgebrochener Potenzen (auch: Peano'sche Restglieddarstellung) benutzt:

$$(x - x_i)_+^m = \begin{cases} (x - x_i)^m & \text{für } x \geq x_i \\ 0 & \text{für } x < x_i \end{cases}$$

Definition 3.3: Basis

$B := \{1, x, x^2, \dots, x^m, (x - x_1)_+^m, \dots, (x - x_{n-1})_+^m\}$ heißt Basis vom Raum $S_m(\Omega_n)$ mit

$S_m(\Omega_n)$ ist der Raum der Splines $s(x)$ mit der folgenden Form :

$$s(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j + \sum_{k=1}^{n-1} b_k (x - x_k)_+^m \quad (3.1)$$

Es ist wünschenswert, gleichartige Basisfunktionen zu besitzen. Diese Basisfunktionen sollten zusätzlich nur auf möglichst kleinen Intervallen von null verschieden sein, da diese für die Berechnung von Splines geeignet sind. Bereits Schoenberg führte 1946 sogenannte "Basis-Splines" ein, die später kurz B-Splines genannt wurden.

3.2 Existenz und Eindeutigkeit der B-Splines

Für den Existenzbeweis werde die unendliche Knotenmenge $\Omega_\infty = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $\lim_{i \rightarrow \pm\infty} x_i = \pm\infty$ betrachtet, um Endbedingungen nicht berücksichtigen zu müssen.

Satz 3.1: Für jedes $i \in \mathbf{Z}$ existiert genau ein Spline $s \in S_m(\Omega_\infty)$ mit $s(x) = 0$ für $x < x_i$ und für $x_{i+1} \leq x$, der die Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} s(x) dx = \int_{x_i}^{x_i+m+1} s(x) dx = 1$ erfüllt.

Beweis 3.1: In der Basisdarstellung (3.1) kann wegen $s(x) = 0 \forall x \leq x_i$ kein Polynomteil auftreten. In den nun betrachteten Intervall $[x_{i-1}, x_{i+m+2}]$ besitzt der Spline die folgende Darstellung

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} b_k (x - x_{i+k})_+^m \quad (3.2)$$

Für $\tilde{n} = m + 1$ ergibt sich ein eindeutig lösbares Gleichungssystem für die Koeffizienten b_0, b_1, \dots, b_{m+1} , denn für $x \geq x_{i+m+1}$ gilt $(x - x_{i+k})_+^m = (x - x_{i+k})^m$ und $s(x) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{m+1} b_k (x - x_{i+k})^m = \sum_{k=0}^{m+1} b_k \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} x^{m-\ell} (-x_{i+k})^\ell \\ 0 &= \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} x^{m-\ell} \sum_{k=0}^{m+1} b_k (-x_{i+k})^\ell \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Monome $x^{m-\ell}$ sind linear unabhängig, so dass nun folgt

$$0 = \sum_{k=0}^{m+1} b_k (-x_{i+k})^\ell \quad (3.4)$$

Aus der Normierungsbedingung für $x \geq x_{i+m+1}$ folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{x_i}^{x_{i+m+1}} \sum_{k=0}^{m+1} b_k (x - x_{i+k})_+^m dx = \sum_{k=0}^{m+1} b_k \int_{x_i}^{x_{i+m+1}} (x - x_{i+k})^m dx \\ m+1 &= \sum_{k=0}^{m+1} b_k [(x - x_{i+k})^{m+1}]_{x_{i+k}}^{x_{i+m+1}} = \sum_{k=0}^{m+1} b_k (x_{i+m+1} - x_{i+k})^{m+1} \\ m+1 &= \sum_{k=0}^{m+1} b_k \sum_{\ell=0}^{m+1} \binom{m+1}{\ell} x_{i+m+1}^{m+1-\ell} (-x_{i+k})^\ell \end{aligned}$$

$$m+1 = \sum_{\ell=0}^{m+1} \binom{m+1}{\ell} (-1)^\ell x_{i+m+1}^{m+1-\ell} \sum_{k=0}^{m+1} b_k x_{i+k}^\ell \quad (3.5)$$

Bei Einsetzen der Identität (3.4) folgt aus (3.5) die Gleichung

$$(-1)^n (m+1) = \sum_{k=0}^{m+1} b_k x_{i+k}^{m+1} \quad (3.6)$$

Das Gleichungssystem aus (3.4) und (3.6) besitzt eine Vandermond'sche Matrix und hat deshalb eine eindeutige Lösung.

3.3 Lokale Basen

Definition 3.4: B-Splines

Gegeben sei eine Knotenmenge $\Omega_\infty = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $x_i < x_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}$.
Dann heißen die Funktionen

$$B_{m,i}(x) := (x_{i+m+1} - x_i)[x_i, \dots, x_{i+m+1}](\cdot - x)_+^m \quad (3.7)$$

B-Splines vom Grad m zum Knoten x_i der Knotenmenge Ω_∞ .

Die B-Splines lassen sich besonders leicht mit Hilfe so genannter Steigungen berechnen.

Definition 3.5: Steigung

Die k -te Steigung (auch: k -te dividierte Differenz) $[t_i, \dots, t_{i+k}]g(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ ist definiert als

$$[t_i]g(\cdot) = g(t_i) \text{ für } k = 0$$

$$\text{und } [t_i, \dots, t_{i+k}]g(\cdot) = \frac{[t_{i+1}, \dots, t_{i+k}]g(\cdot) - [t_i, \dots, t_{i+k-1}]g(\cdot)}{t_{i+k} - t_i} \text{ für } k \geq 1.$$

Satz 3.2: Es gilt die Gleichung

$$[x_i, \dots, x_{i+\mu}](\cdot - x)_+^m = \sum_{k=i}^{i+\mu} \left(\prod_{\ell=i; \ell \neq k}^{i+\mu} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m \right) \quad (3.8)$$

Beweis 3.2:

Induktionsanfang: $[x_i](\cdot - x)_+^m = (x_i - x)_+^m$

$$\text{und } \sum_{k=i}^i \left(\prod_{\ell=i; \ell \neq k}^i (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m \right) = (x_i - x)_+^m \text{ für } \mu = 0.$$

Induktionsvoraussetzung: Satz 3.2 gilt für $\mu \leq \nu$.

Induktionsbehauptung: Satz 3.2 gilt für $\mu = \nu + 1$.

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} [x_i, \dots, x_{i+\nu+1}](\cdot - x)_+^m &= \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+\nu+1}](\cdot - x)_+^m - [x_i, \dots, x_{i+\nu}](\cdot - x)_+^m}{x_{i+\nu+1} - x_i} \\ &= \sum_{k=i+1}^{i+\nu+1} \left(\prod_{\ell=i+1; \ell \neq k}^{i+\nu+1} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m \right) - \sum_{k=i}^{i+\nu} \left(\prod_{\ell=i; \ell \neq k}^{i+\nu} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=i+1}^{i+\nu} \left(\prod_{\ell=i+1; \ell \neq k}^{i+\nu+1} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m - \prod_{\ell=i; \ell \neq k}^{i+\nu} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m \right) \\
&\quad + \prod_{\ell=i+1}^{i+\nu} (x_{i+\nu+1} - x_\ell)^{-1} (x_{i+\nu+1} - x)_+^m - \prod_{\ell=i+1}^{i+\nu} (x_i - x_\ell)^{-1} (x_i - x)_+^m \\
&= \sum_{k=i+1}^{i+\nu} \left(\prod_{\ell=i+1; \ell \neq k}^{i+\nu+1} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m - \prod_{\ell=i; \ell \neq k}^{i+\nu} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m \right) \\
&\quad + \prod_{\ell=i+1}^{i+\nu} (x_{i+\nu+1} - x_\ell)^{-1} (x_{i+\nu+1} - x)_+^m - \prod_{\ell=i+1}^{i+\nu} (x_i - x_\ell)^{-1} (x_i - x)_+^m
\end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen folgt dann:

$$\begin{aligned}
(x_{i+\nu+1} - x_i)[x_i, \dots, x_{i+\nu+1}](\cdot - x)_+^m &= (x_{i+\nu+1} - x_i) \sum_{k=i}^{i+\nu+1} \left(\prod_{\ell=i; \ell \neq k}^{i+\nu+1} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m \right) \\
[x_i, \dots, x_{i+\nu+1}](\cdot - x)_+^m &= \sum_{k=i}^{i+\nu+1} \left(\prod_{\ell=i; \ell \neq k}^{i+\nu+1} (x_k - x_\ell)^{-1} (x_k - x)_+^m \right) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Nach den Satz der vollständigen Induktion folgt aus Induktionsanfang und Induktionsschritt die Gültigkeit von Satz 3.2 für alle μ .

Mit $\mu = m + 1$ folgt aus Satz 3.2, dass Definition 3.3 und Definition 3.5 äquivalent sind.

Es gilt offensichtlich

$$B_{0,i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (3.10)$$

Satz 3.3: Es gilt für $i \in \mathbb{N}^+$ und $m \in \mathbb{Z}$ die Rekursionsformel

$$B_{m,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} B_{m-1,i}(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} B_{m-1,i+1}(x) \quad (3.11)$$

Beweis 3.3:

$$\begin{aligned}
&\text{Induktionsanfang: } B_{1,i} = (x_{i+2} - x_i)[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](\cdot - x)_+^1 \\
&= [x_{i+1}, x_{i+2}](\cdot - x)_+ - [x_i, x_{i+1}](\cdot - x)_+ \text{ und} \\
&\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} B_{0,i}(x) + \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} B_{0,i+1}(x) = (x - x_i)[x_i, x_{i+1}](\cdot - x)_+^0 + (x_{i+2} - x)[x_{i+1}, x_{i+2}](\cdot - x)_+^0 \\
&= [x_{i+1}, x_{i+2}](\cdot - x)_+ - [x_i, x_{i+1}](\cdot - x)_+
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Satz 3.3 gilt für $m = \mu - 1$.

Induktionsbehauptung: Satz 3.3 gilt für $m = \mu$.

Induktionsbeweis: Anwenden der Leibniz'schen Regel ergibt

$$\begin{aligned}
B_{\mu,i}(x) &= (x_{i+\mu+1} - x_i)[x_i, \dots, x_{i+\mu+1}](\cdot - x)_+^\mu \\
&= (x_{i+\mu+1} - x_i) \sum_{q=0}^{\mu+1} [x_i, \dots, x_{i+q}](\cdot - x)[x_{i+q}, \dots, x_{i+\mu+1}](\cdot - x)_+^{\mu-1} \\
&= (x_{i+\mu+1} - x_i)(x_i - x)[x_i, \dots, x_{i+\mu+1}](\cdot - x)_+^{\mu-1} \\
&\quad + (x_{i+\mu+1} - x_i)[x_{i+1}, \dots, x_{i+\mu+1}](\cdot - x)_+^{\mu-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x - x_i)[x_i, \dots, x_{i+\mu}](\cdot - x)_+^{\mu-1} \\
&\quad + (x_{i+\mu+1} - x)[x_{i+1}, \dots, x_{i+\mu+1}](\cdot - x)_+^{\mu-1}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schießlich

$$B_{\mu,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+\mu} - x_i} B_{\mu-1,i}(x) + \frac{x_{i+\mu+1} - x}{x_{i+\mu+1} - x_{i+1}} B_{\mu-1,i+1}(x) \quad (3.12)$$

Nach den Satz der vollständigen Induktion folgt aus Induktionsanfang und Induktionsschritt die Gültigkeit von Satz 3.3 für alle m .

Aus $B_{0,i}(x) > 0 \forall x \in (x_i, x_{i+1})$ folgt mit der Rekursionsformel (3.11)

$$B_{m,i}(x) > 0 \forall x \in (x_i, x_{i+m+1}) \quad (3.13)$$

Die B-Splines $B_{m,i}$, $i = -m, -m+1, \dots, n-1$, sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$s(x) = \sum_{i=-m}^{n-1} c_i B_{m,n-1}(x) = 0 \quad x \in (x_0, x_n) \quad (3.14)$$

nur mit den Koeffizienten $c_{-m} = c_{-m+1} = \dots = c_{n-1} = 0$ gilt. Der kleinste Index aller $c_i \neq 0$ sei j . Dann gilt

$$s(x) = c_j B_{m,j}(x) \quad x \in (x_j, x_{j+1})$$

Angenommen $s(x)$ wäre null für $x \in (x_j, x_{j+1})$, so wäre wegen (3.13) $c_j = 0$. Also besitzt die endliche Menge $\{-m, -m+1, \dots, n-1\}$ kein kleinstes Element j mit $c_j \neq 0$. Somit gilt (3.14) nur für $c_{-m} = c_{-m+1} = \dots = c_{n-1} = 0$ und die B-Splines sind linear unabhängig.

Satz 3.4: Jeder Spline $s \in S_m(\Omega_n)$ besitzt in $[x_0, x_n]$ eine eindeutige Darstellung durch B-Splines:

$$s(x) = \sum_{i=-m}^{n-1} d_i B_{m,n-1}(x) \quad , d_i \in \mathbb{R}, x \in [x_0, x_n] \quad (3.15)$$

Dabei heißen die d_i de Boor-Punkte.

Beweis 3.4: Aus der linearen Unabhängigkeit der B-Splines $B_{m,i}(x)$, $i = -m, -m+1, \dots, n-1$, folgt dann, dass die Darstellung des interpolierenden Splines $s(x)$, der an den Stellen x_0, x_1, \dots, x_n die gegebenen Werte y_0, y_1, \dots, y_n annimmt, eindeutig ist.

Satz 3.5: De Boor-Algorithmus

Es ist $x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_{m+n}$ eine Knotenfolge mit einer B-Spline-Linear kombination $s(x) = \sum_{i=-m}^{n-1} d_i B_{m,i}(x)$.

Ist dann $\hat{x} \in [x_k, x_{k+1}] \subseteq [x_0, x_n]$ ein fester Wert, so liefert die Rekursion

$$d_i^{(0)}(\hat{x}) := d_i \quad (3.16)$$

$$d_i^{(j+1)}(\hat{x}) := d_{i-1}^{(j)}(\hat{x}) \frac{x_{i+m} - \hat{x}}{x_{i+m} - x_i} + d_i^{(j)}(\hat{x}) \frac{\hat{x} - x_i}{x_{i+m} - x_i} \quad (3.17)$$

den Funktionswert $s(\hat{x}) = d_k^{(m)}(\hat{x})$.

Beweis 3.5: Es wird die Gleichung

$$s(\hat{x}) = \sum_{i=k-m+j}^k d_i^{(j)} B_{m-j,i}(\hat{x}) \quad (3.18)$$

mittels vollständiger Induktion und mit Hilfe der Identität $B_{m,i}(\hat{x}) = 0$ für alle $i \in \{-m, \dots, -m+k, k+1, \dots, n-1\}$, $\hat{x} \in [x_k, x_{k+1})$ bewiesen.

Induktionsanfang: Es gilt $s(\hat{x}) = \sum_{i=k-m}^k d_i B_{m,i}(\hat{x})$ und

$$\sum_{i=k-m+0}^k d_i^{(0)} B_{m-0,i}(\hat{x}) = \sum_{i=k-m}^k d_i B_{m,i}(\hat{x}).$$

Induktionsvoraussetzung: Gleichung (3.18) gilt für $j \leq \ell$.

Induktionsbehauptung: Gleichung (3.18) gilt für $j = \ell + 1 \leq k$.

Induktionsbeweis:

Mit (3.16) und der Rekursionsvorschrift (3.11) gilt

$$\begin{aligned} s(\hat{x}) &= \sum_{i=k-m+\ell}^k d_i^{(\ell)} B_{m-\ell,i}(\hat{x}) \\ &= \sum_{i=k-m+\ell}^k d_i^{(\ell)} \left(\frac{\hat{x} - x_i}{x_{i+m-\ell} - x_i} B_{m-\ell-1,i}(\hat{x}) + \frac{x_{i+m-\ell+1} - \hat{x}}{x_{i+m-\ell+1} - x_{i+1}} B_{m-\ell-1,i+1}(\hat{x}) \right) \\ &= \sum_{i=k-m+\ell+1}^{k+1} d_{i-1}^{(\ell)} \frac{x_{i+m-\ell} - \hat{x}}{x_{i+m-\ell} - x_i} B_{m-\ell-1,i}(\hat{x}) + \sum_{i=k-m+\ell}^k d_i^{(\ell)} \frac{\hat{x} - x_i}{x_{i+m-\ell} - x_i} B_{m-\ell-1,i}(\hat{x}) \end{aligned}$$

Mit der Rekursionsformel (3.17) folgt nun:

$$s(\hat{x}) = \sum_{i=k-m+\ell+1}^k d_i^{(\ell+1)} B_{m-\ell-1,i}(\hat{x}) \quad (3.19)$$

Aus Induktionsanfang und Induktionsschritt folgt nach den Satz der vollständigen Induktion die Gültigkeit von (3.18) für alle $j \leq k$.

Mit $j = m$ liefert (3.18) für $\hat{x} \in [x_k, x_{k+1})$ die Gleichung $s(\hat{x}) = d_k^{(m)}(\hat{x}) B_{0,k}(\hat{x}) = d_k^{(m)}(\hat{x})$.

Bemerkung 3.1: Anstelle von d_i werden auch $\vec{d}_i \in \mathbb{R}^{dim}$, $dim > 1$ verwendet. Der dadurch definierte Spline $s(x) := \sum_{i=-m}^{n-1} \vec{d}_i B_{m,n-1}(x)$ wird als Bezier-Spline oder Bezier-Kurve bezeichnet. Bezier-Kurven haben eine große Bedeutung in CAD und CAGD.

Bemerkung 3.2: Der de Boor-Algorithmus ist neben dem Horner-Schema und dem Neville-Algorithmus eine dritte Möglichkeit, Polynomwerte zu berechnen.

Kapitel 4

Zweidimensionale Approximation

Häufig tritt in der numerischen Mathematik die Situation auf, dass statt einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nur einige diskrete Funktionswerte $f(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, an endlich vielen Punkten (x_i, y_i) gegeben sind. Dies trifft zum Beispiel zu, wenn die Funktion f in der Form experimentell gewonnener Daten vorliegt. Auch bei den meisten numerischen Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen wird die gesuchte Lösung $f(x, y)$ nur an endlich vielen Stellen berechnet. Historisch trat das Problem bei der Berechnung von zusätzlichen Funktionswerten zwischen tabellarischen Werten auf. Heute ist eines der bedeutendsten Anwendungsfelder die Computergrafik, bekannt unter den Kürzeln CAD und CAGD.

4.1 Interpolation von Flächen mittels Dreiecken

Gegeben sei eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$ mit $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ über ein Gitter mit n Knoten $P_r(x_r, y_r)$ und zugehörigen Funktionswerten f_r , $r = 1, 2, \dots, n$. Weiterhin sei Δ_m , $m = 1, 2, \dots, M$, ein beliebiges Dreieck, deren Ecken gegebene Knoten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ und $P_3(x_3, y_3)$ sind. Da die Fläche über Δ_m eben sein soll, wird der folgende dreigliedrige, lineare Ansatz

$$p_{3,m}(x, y) = c_1^{(m)} + c_2^{(m)}x + c_3^{(m)}y \quad (4.1)$$

mit der Interpolationsforderung

$$(p_{3,m}(x_1, y_1), p_{3,m}(x_2, y_2), p_{3,m}(x_3, y_3))^T = (f_1, f_2, f_3)^T \quad (4.2)$$

gemacht. Damit die Koeffizienten $c_1^{(m)}$, $c_2^{(m)}$ und $c_3^{(m)}$ leichter zu berechnen sind, wird Δ_m in das Einheitsdreieck Δ'_m mit den Ecken $P_1^*(0, 0)$, $P_2^*(1, 0)$ und $P_3^*(0, 1)$ transformiert.

Für jeden Punkt (x, y) in Δ_m gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1], t \in [0, 1 - s] \quad (4.3)$$

Das geordnete Paar (s, t) ergibt sich demzufolge als Lösung des folgenden Gleichungssystems, wobei (x, y) der zu transformierende Punkt sei.

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Somit folgt nun aus (4.1) die Gleichung

$$p_{3,m}(s, t) = c_1^{*(m)} + c_2^{*(m)}s + c_3^{*(m)}t \quad (4.5)$$

und das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{*(m)} \\ c_2^{*(m)} \\ c_3^{*(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

mit $c_1^{*(m)} = c_1^{(m)} + c_2^{(m)}x_1 + c_3^{(m)}y_1$, $c_2^{*(m)} = c_2^{(m)}(x_2 - x_1) + c_3^{(m)}(y_2 - y_1)$ und $c_3^{*(m)} = c_2^{(m)}(x_3 - x_1) + c_3^{(m)}(y_3 - y_1)$ wegen (4.1) und (4.2).

Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (4.6) ist die so genannte Haar'sche Matrix H .

Mit $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{*(m)} \\ c_2^{*(m)} \\ c_3^{*(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Vereinfachen von (4.7) ergibt

$$\begin{pmatrix} c_1^{*(m)} \\ c_2^{*(m)} \\ c_3^{*(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Einsetzen der erhaltenen Koeffizienten in (4.5) liefert folgenden Ausdruck

$$p_{3,m}(s, t) = f_1 + (f_2 - f_1)s + (f_3 - f_1)t \quad (4.9)$$

Durch Einsetzen der Lösung von (4.3) folgt

$$\begin{aligned} p_{3,m}(x, y) = & f_1 + (f_2 - f_1) \frac{(x-x_1)(y_3-y_1)-(y-y_1)(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-x_1)(y_3-x_1)} \\ & + (f_3 - f_1) \frac{(y-y_1)(x_2-x_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-x_1)(y_3-x_1)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Durch Zusammensetzen der Ebenenstücke über allen Teildreiecken Δ_m , $m = 1, 2, \dots, M$, entsteht eine Polyederfläche z mit

$$z(x, y) = \cup_{m=1}^M p_{3,m}(x, y) \quad (4.11)$$

Bemerkung 4.1: Die Funktion z , welche die Polyederfläche beschreibt, ist stetig, da die Fläche im Inneren der Dreiecke Δ_m stetig ist und alle Seiten $\overline{P_{i_1}P_{i_2}}$, die keine Ränder der Polyederfläche sind, sowohl Seite von Dreieck $\triangle P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}$ als auch von Dreieck $\triangle P_{i_1}P_{i_2}P_{i_4}$ sind.

4.2 Interpolation von Flächen mittels Parallelogrammen

Wie in Kapitel 4.1. sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f = f(x, y)$ mit $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ über ein Gitter gegeben mit n Knoten $P_r(x_r, y_r)$ und zugehörigen Funktionswerten f_r ,

$r = 1, 2, \dots, n$. Weiterhin sei \square_m , $m = 1, 2, \dots, M$, ein beliebiges Parallelogramm, dessen Ecken die gegebene Knoten $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ und $P_4(x_4, y_4)$ sind. Die Fläche von \square_m soll eben sein. Also wird der folgende viergliedrige, bilineare Ansatz gemacht:

$$p_{4,m}(x, y) = c_1^{(m)} + c_2^{(m)}x + c_3^{(m)}y + c_4^{(m)}xy \quad (4.12)$$

Dabei soll die folgende Interpolationsforderung erfüllt sein:

$$(p_{4,m}(x_1, y_1), p_{4,m}(x_2, y_2), p_{4,m}(x_3, y_3), p_{4,m}(x_4, y_4))^T = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \quad (4.13)$$

Bemerkung 4.2: Für ein festes x oder ein festes y beschreibt $p_{4,m}(x, y)$ eine lineare Funktion in der jeweils anderen Variablen.

Damit die Koeffizienten $c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, c_3^{(m)}$ und $c_4^{(m)}$ leichter zu berechnen sind, wird \square_m in das Einheitsquadrat \square_m^* mit den Ecken $P_1^*(0, 0), P_2^*(1, 0), P_3^*(1, 1)$ und $P_4^*(0, 1)$ transformiert. Für jeden Punkt (x, y) in \square_m gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1], t \in [0, 1] \quad (4.14)$$

Die Variablen s und t ergeben sich demzufolge als Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Somit folgt nun aus (4.12) die Gleichung

$$p_{4,m}(s, t) = c_1^{*(m)} + c_2^{*(m)}x + c_3^{*(m)}y + c_4^{*(m)}xy \quad (4.16)$$

und das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{*(m)} \\ c_2^{*(m)} \\ c_3^{*(m)} \\ c_4^{*(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (4.17) werde mit A bezeichnet.

Mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ folgt jetzt

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} c_1^{*(m)} \\ c_2^{*(m)} \\ c_3^{*(m)} \\ c_4^{*(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Nach Vereinfachen von (4.18) ergibt sich dann

$$\begin{pmatrix} c_1^{*(m)} \\ c_2^{*(m)} \\ c_3^{*(m)} \\ c_4^{*(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - f_1 \\ f_4 - f_1 \\ f_1 + f_3 - f_2 - f_4 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Das Einsetzen der erhaltenen Koeffizienten in (4.16) liefert folgenden Ausdruck

$$p_{4,m}(s, t) = f_1 + (f_2 - f_1)s + (f_4 - f_1)t + (f_1 + f_3 - f_2 - f_4)st \quad (4.20)$$

Durch Einsetzen der Lösung von (4.15) in (4.20) folgt

$$\begin{aligned} p_{4,m}(x, y) = & f_1 + (f_2 - f_1) \frac{(x-x_1)(y_3-y_1)-(y-y_1)(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-x_1)(y_3-x_1)} \\ & + (f_3 - f_1) \frac{(y-y_1)(x_2-x_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-x_1)(y_3-x_1)} \\ & + (f_1 + f_3 - f_2 - f_4) \frac{(x-x_1)(y_3-y_1)-(y-y_1)(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-x_1)(y_3-x_1)} \frac{(y-y_1)(x_2-x_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-x_1)(y_3-x_1)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Durch Vereinigung aller Flächen über den Parallelogrammen $\square_m, m = 1, 2, \dots, M$, entsteht eine Polyederfläche z mit

$$z(x, y) = \cup_{m=1}^M p_{4,m}(x, y) \quad (4.22)$$

Bemerkung 4.3: Die Funktion $z(x, y)$, welche die Polyederfläche beschreibt, ist stetig. Die Funktion, welche die Fläche im Inneren der Parallelogramme \square_m beschreibt, ist stetig und auch alle Seiten $\overline{P_{i_1}P_{i_2}}$, die keine Ränder der Polyederfläche sind, erfüllen die Stetigkeitsbedingungen, da sie sowohl Seite des Parallelogramms $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_3}P_{i_4}$ als auch des Parallelogramms $P_{i_1}P_{i_2}P_{i_5}P_{i_6}$ sind.

Kapitel 5

Literaturverzeichnis

- [1] PREUß, W., WENISCH, G.: Numerische Mathematik; 184; Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hauser Verlag, Leipzig 2001.
- [2] HÄMMERLIN, G., HOFFMANN, K.: Numerische Mathematik; 244- 264; Springer-Verlag, Berlin 1994.

Anhang A

Bestimmung von Wirkungsgradkennlinien von Sonnenkollektoren

Ziel der Bestimmung ist die Vorhersage des Kollektorertrags (auch: Solarertrag). Dieser Kollektorertrag ist interessant für die Planung von Solaranlagen mit den jeweiligen Kollektor und für die Fördermöglichkeit von Maßnahmen zur Nutzung.

Zur Berechnung werden gewisse Kollektorkennwerte und weiter Systemkomponenten gebraucht (Dachausrichtung, Kollektoranbindung, Speicher, ...). Die Ermittlung der Kollektorkennwert ist genormt, um diese vergleichbar zu machen. In Deutschland wird die Vornorm DIN V 4757-4 vom November 1995 verwendet, während in der Schweiz das sogenannte Rapperswieler-Testverfahren angewandt wird. Für die Messung in angewandter Norm gibt es zugelassene Prüfinstitutionen. Aus den ermittelten Daten wird dann mit Hilfe des Simulationsprogramms TSOL der Kollektorertrag berechnet.

A.1 Berechnung der Kollektorkennwerte

Die Dichte ρ des Wassers, der Volumenstrom V , die spezifischen Wärmekapazität c_p und die Bezugsfläche A sind bekannt. Die Globalstrahlung E_k der Sonne in Kollektorebene, die Eintrittstemperatur T_E und die Austrittstemperatur T_A werden gemessen. Nun kann die Temperaturänderung $(T_A - T_E)$, der Massestrom $m = \rho V$ und damit auch die Nutzwärme $Q_{Nutz} = mc_p(T_A - T_E)$ und die Globalstrahlung $Q_{Strahl} = E_k A$ berechnet werden. Das liefert die Gleichung für den momentanen Wirkungsgrad η

$$\eta = \frac{Q_{Nutz}}{Q_{Strahl}} = \frac{\rho V c_p (T_A - T_E)}{E_k A}$$

Mit der Lufttemperatur T_L kann die Temperaturdifferenz $\Delta T = \frac{1}{2}(T_A + T_E) - T_L$ berechnet werden. Die Nutzwärme oder abgeführte Wärme Q_{Nutz} ergibt sich als Differenz der tatsächlichen Wasserwärme Q_{Koll} und der z.B. durch Strahlung verlorenen Wärme $Q_{Verlust}$, dabei ist $Q_{Koll} = E_k A \eta_0$ mit einem unbekanntem Wirkungsgrad η_0 und $Q_{Verlust} = k_{eff} A \Delta T$ mit einer noch zu bestimmenden Wärmedurchgangszahl k_{eff} .

$$\eta = \frac{Q_{Nutz}}{Q_{Strahl}} = \frac{Q_{Koll} - Q_{Verlust}}{E_k A} = \frac{E_k A \eta_0 - k_{eff} A \Delta T}{E_k A} = \eta_0 - k_{eff} \frac{\Delta T}{E_k} \quad (\text{A.1})$$

Neben Ansatz (A.1) wird auch der folgende verwendet:

$$\eta = \eta_0 - k_1 \frac{\Delta T}{E_k} - k_2 \left(\frac{\Delta T}{E_k} \right)^2 \quad (\text{A.2})$$

Mit $x := \frac{\Delta T}{E_k}$ ist (A.1) bzw. (A.2) genau dann die beste Approximation, wenn $(\eta_0, k_{eff})^T$ bzw. $(\eta_0, k_1, k_2)^T$ Lösung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ k_{eff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \eta_i \\ -\sum_{i=1}^n \eta_i x_i \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & -\sum_{i=1}^n x_i & -\sum_{i=1}^n x_i^2 \\ -\sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ -\sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \eta_i \\ -\sum_{i=1}^n \eta_i x_i \\ -\sum_{i=1}^n \eta_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

ist. Für paarweise verschiedene x_i sind die Lösungen eindeutig bestimmt.

Mit der Nullstelle η^* der auf $E_k = 800 \frac{W}{m^2}$ normierten Kurve wird nun der Kollektor ertrag berechnet.