GEOMETRIA PLANA

Pelo Professor Geraldo Pacheco

Ângulos

Ângulos são as regiões internas (ângulo convexo) e regiões externas(ângulo côncavo) compreendidas entre duas semi-retas de mesma origem, são representada por letras gregas minúsculas, a principal unidade de ângulo é o **grau** (^{o}), sendo 1^o equivalente a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência, os submúltiplos do grau são os **minutos (‘)** e o **segundo (“).**

Então teremos:

1^o=60’ ∴ 1’ = 60” ∴ 1^o = 3600”

Temos também as seguintes medidas:

***Grado (gr)** é a medida do ângulo central subtendido por um arco igual $\frac{1}{400}$ da circunferência que contêm o arco.*

***Radiano (rad)** é quantas vezes o raio da circunferência, estiver contido no arco determinado por ela.*

Radiano = $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi rad$

***Regra Geral**: Proporção de transformação*

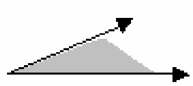
360º	....	*2π rad*	....	*400 gr*
x^o	....	$y\ rad$	....	$z\ \ gr$

Só estudaremos ÂNGULOS CONVEXOS

Tipos de Ângulos:

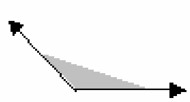
a) Nulo: É o ângulo formado por segmentos de mesma direção e sentido ($\alpha = 0^o$)

b) *Agudo*: É o ângulo menor que 90^o $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$

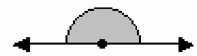


c) *Reto*: É o ângulo de 90^o ($\alpha = 90^o$)

d) Obtuso: É o ângulo maior que 90^o e menor que 180^o ($90^o < \alpha < 180^o$)



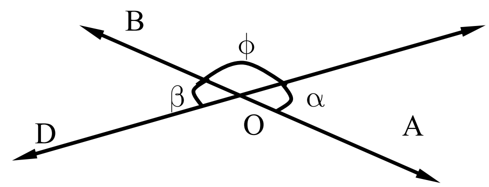
e) Raso: É o ângulo de 180^o ($\alpha=180^o$)



Classificação Relativa entre dois Angulos

a) Ângulos Congruentes: São os que possuem mesma medida. Ex: $\alpha = 30^o$ e $\theta = 30^o$

b) Ângulos Opostos pelo Vértice: São os que possuem o mesmo vértice e são opostos entre si.
Ex. β e □



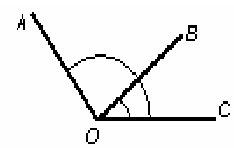
Teorema:

Os ângulos OPV são congruentes
(suas medidas são iguais).

$$\begin{cases} \alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \theta \\ \beta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \theta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

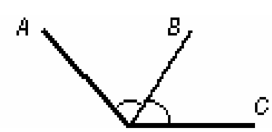
c) Ângulos Consecutivos: São os que possuem um lado em comum e pontos internos comuns

Ex. AÔC e BÔC



d) Ângulos Adjacentes: São os ângulos consecutivos que não possuem pontos internos comuns.

Ex. AÔB e BÔC

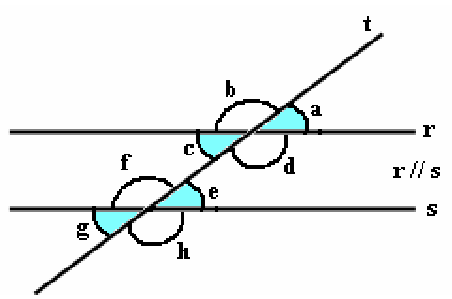


e) Ângulos Complementares: Dois ângulos **α** e **β** são ditos complementares se **α + β = 90^o**.
Nesse caso dizemos que o complemento de **α** é **β** e vice-versa e o complemento de um ângulo **α** é **90 - α.**

f) Ângulos Suplementares: Dois ângulos **α** e **β** são ditos complementares se **α + β = 180^o**.
Nesse caso dizemos que o suplemento de **α** é **β** e vice-versa e o suplemento de um ângulo **α** é **180– α.**

g) Ângulos Replementares: Dois ângulos α e β são ditos replementares se $\alpha + \beta = 360^o$. Nesse caso dizemos que o replemento de α é β e vice-versa e o replemento de um ângulo α é **360– α**

Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal



a) Ângulos Correspondentes: São Ângulos que estão do mesmo lado da transversal e teremos um dentro e outro fora e vice-versa. Ex: a e e; d e h; b e f; c e g.

Obs. Os ângulos correspondentes são congruentes (suas medidas são iguais).

b) Ângulos Colaterais Internos: São os que estão em um mesmo lado em relação à transversal e por dentro em relação às retas paralelas. Ex: d e e; c e f.

Obs. Os ângulos colaterais internos são suplementares

c) Ângulos Colaterais Externos: São os que estão em um mesmo lado em relação à transversal e por fora em relação às retas paralelas. Ex. a e h; b e g.

Obs. Os ângulos colaterais externos são suplementares

d) Ângulos Alternos Internos: São os que estão em lados opostos em relação à transversal e por dentro em relação às retas paralelas. Ex. c e e; d e f.

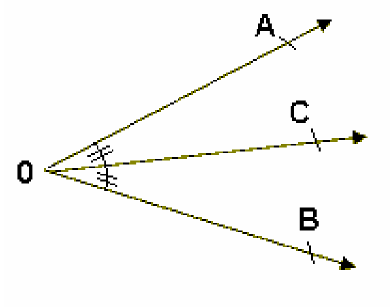
Obs. Os ângulos alternos internos são congruentes (suas medidas são iguais)

e) Ângulos Alternos Externos: São os que estão em lados opostos em relação à transversal e por fora em relação às retas paralelas. Ex. a e g; b e h.

Obs. Os ângulos alternos externos são congruentes (suas medidas são iguais)

Bissetriz de um ângulo

É a semi-reta que, partindo do vértice, divide o ângulo em dois ângulos adjacentes e congruentes, ou seja, divide ao meio. Dessa forma, todos os pontos da bissetriz são eqüidistantes dos lados do ângulo.



$$\begin{cases} \text{Se } \overrightarrow{OC} \text{ é bissetriz de } \measuredangle AOB \\ \text{Então } A\hat{O}C = B\hat{O}C \end{cases}$$

TAREFAS

01) Se X = 104° 25' 35" – 100° 12' 5" o valor de X é:

a) 7° 3' 20" b) 6° 8' 25" c) 5° 5' 10"
d) 4° 13' 30" e) 2° 23' 33"

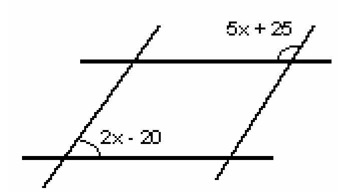
02) Sendo F = 5° 18' 53" + 10° 41' 7", o valor de F é:
a) 15° 15' 30" b) 15° 17' 15" c) 16°
d) 16° 15" e) 14° 55'

03) Seja D =30° – 4° 34' 35", o seu valor é:

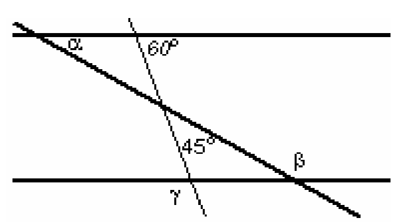
a) 25° 25' 25" b) 24° 14' 34" c) 26° 16' 16"
d) 25° 15' 25" e) 24° 20"

04) Na figura abaixo temos lados paralelos dois a dois. O complemento de **x** é:

a) 65°
b) 7°
c) 75°
d) 78°
e) 82°



05) Se na figura ao lado, temos duas retas paralelas e duas transversais, a soma $\alpha+\beta+\gamma$ vale:



a) 275° b) 310° c) 300° d) 290° e) 280°

06) Determine a medida de um ângulo que excede o seu complemento em 45^o.

a) 50^o b) 52^o c) $60^o\ 20'$ d) $65^o\ 20'\ 20''$ e) $67^o\ 30'$

07) Qual o replemento do ângulo, cujo suplemento é o triplo do complemento?

a) 315^o b) 200^o c) 185^o d) 120^o

08) O ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes mede 65^o. Se um deles mede 48^o, qual a medida do outro?

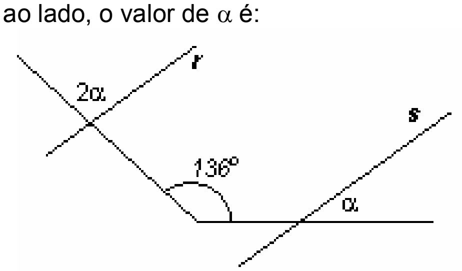
a) 55^o b) 64^o c) 73^o d) 82^o e) 88^o

09) Sobre dois ângulos, tem-se que, se um aumentar 10^o, os dois se tornarão complementares. Se o quádruplo da diferença entre eles é o suplemento do menor, o maior mede:

a) 55^o b) 60^o c) 64^o d) 70^o e) 72^o

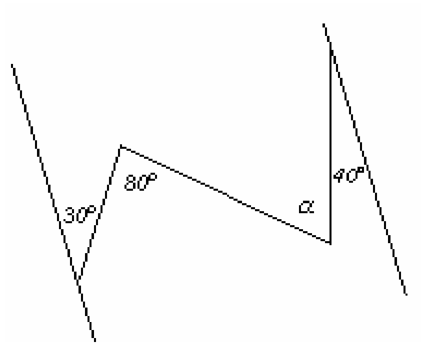
10) Na figura ao lado, o valor de α é:

a) 52^o
b) 50^o
c) $45^o\ 20'$
d) $22^o\ 40'$
e) $10^o\ 10'$



11) No gráfico ao abaixo, tem-se três retas transversais entre duas paralelas. α vale,

a) 90^o
b) 80^o
c) 70^o
d) 65^o
e) nda



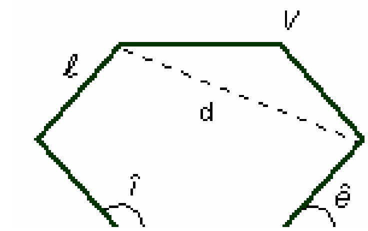
12) A diferença entre o suplemento de 4/3 de um ângulo e 3/4 do seu complemento dá $97^o\ 20'$. Esse ângulo está entre:

a) 17^o e 22^o b) 25^o e 30^o c) 37^o e 42^o

d) 50^o e 56^o e) 60^o e 70^o

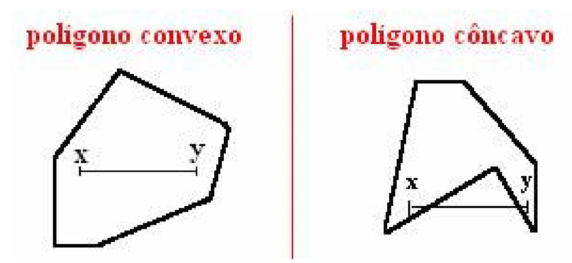
Polígonos

Conceito: São figuras geométricas planas e fechadas, formadas por vários segmentos de reta.



L = lado V = vértice
d = diagonal î = ângulo interno
ê = ângulo externo

Existem dois tipos de polígonos, convexo e côncavo, só iremos trabalhar com os convexos:



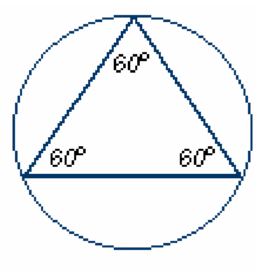
Nomenclatura dos Polígonos

Os polígonos são designados em função de ***n***, que é o seu número de lados.

_n_	_nome_
3 lados	**Trilátero(Triângulo)**
4 lados	**Quadrilátero**
5 lados	**Pentágono**
6 lados	**Hexágono**
7 lados	**Heptágono**
8 lados	**Octógono**
9 lados	**Eneágono**
10 lados	**Decágono**
11 lados	**Undecágono**
12 lados	**Dodecágono**
15 lados	**Pentadecágono**
20 lados	**Icoságono**

Polígonos Regulares

Um polígono é dito regular, se e somente se os seus ângulos e lados forem congruentes. Dessa forma, sempre existirá uma circunferência que contenha os seus vértices. Veja:



Triângulo Regular ou Eqüilátero

Elementos de um polígono

a) Lado: É cada um dos segmentos que constituem um polígono.

b) Vértice: É o encontro ou intersecção de dois lados consecutivos

c) Perímetro (***2p***): É a soma de todos os lados; sendo o semi-perímetro (***p***) a metade da soma.

d) Ângulo Interno (**a** $_i$): É o ângulo que, formado por dois lados consecutivos.

Obs₁: A soma dos ângulos internos para de qualquer polígono é dada pela expressão:

$$S_i = 180^\circ.(n-2)$$

Obs₂: Se o **Polígono for regular** podemos determinar o valor de cada ângulo interno pela expressão:

$$a_i = \frac{180^\circ (n-2)}{n}$$

e) Ângulo Externo (**a** $_e$): É o suplemento de cada ângulo interno.

$$a_e + a_i = 180^\circ \Rightarrow a_e = 180^\circ - a_i$$

Obs₃: A soma dos ângulos externos vale 360°.

$$S_e = 360^\circ$$

Obs₄: Se o **Polígono for Regular**, podemos determinar o valor cada ângulo externo pela expressão:

$$a_e = \frac{360^\circ}{n}$$

f) Diagonal: É o segmento formado por dois vértices não consecutivos.

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Obs. Quando o polígono tem gênero par, ele terá diagonais que passam pelo centro, que será calculado por:

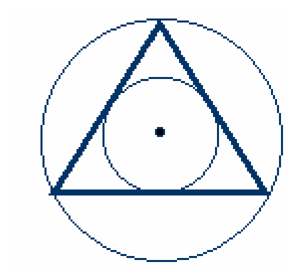
$$D_{PC} = \frac{n}{2}$$

Polígonos Regulares

Um polígono é dito regular, se e somente se os seus ângulos e lados forem congruentes.

I) Sempre existirá uma circunferência em que esse polígono esteja inscrito.

II) Sempre existirá uma circunferência em que esse polígono esteja circunscrito.



Elementos Notáveis de um Polígono Regular

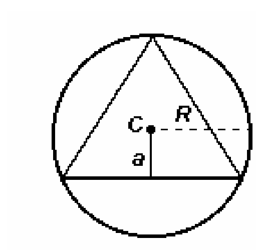
a) Centro das Circunferências: É o ponto central das duas circunferências, que por sua vez são concêntricas.

b) Raios das Circunferências *(R)*: Os raios são tidos como grandezas-padrão na análise do polígono inscrito ou circunscrito.

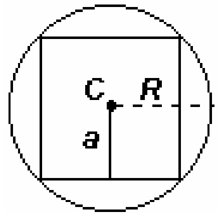
c) Apótema (a): É o segmento que liga o centro ao ponto médio de qualquer lado do polígono.

Polígonos Inscritos em uma Circunferência

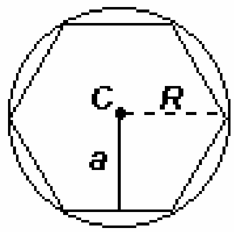
a) *Triângulo* Eqüilátero



b) *Quadrado*



c) Hexágono



Para os **Polígonos Inscritos**

	Triângulo	***Quadrado***	***Hexágono***
Lado	$\ell = \sqrt{3}\ R$	$\ell = \sqrt{2}\, R$	$\ell = R$
Apótema	$a = \dfrac{R}{2}$	$a = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Polígonos Circunscritos numa Circunferência

Para os **Polígonos Circunscritos**

	Triângulo	***Quadrado***	***Hexágono***
Lado	$\ell = 2R\sqrt{3}$	$\ell = 2R$	$\ell = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$
Apótema	$a = R$	$a = R$	$a = R$

TAREFAS

12a) Seja ***L***, o lado e ***a*** o apótema de um triângulo regular inscrito em uma circunferência de raio 6 cm. O valor de ***L+ a*** é:

a) $3\left(1+2\sqrt{3}\right)$ b) $2\left(1-2\sqrt{3}\right)$ c) $3\left(2+\sqrt{3}\right)$

d) $2\left(3+5\sqrt{3}\right)$ e) $1+2\sqrt{3}$

13) Um hexágono e um quadrado, ambos regulares, estão inscritos numa circunferência. Se o lado do primeiro mede 7dm, a medida do perímetro do outro é:

a) 51dm b) $28\sqrt{2}$ dm c) $22\sqrt{2}$ dm d) $30\sqrt{3}$ dm

14) Um quadrado e um triângulo eqüilátero estão inscritos em uma circunferência. Se o lado do quadrado mede $8\sqrt{2}$, o apótema do triângulo mede:

a) 4 b) 6 c) 7 d) 10 e) 15

15) A medida do diâmetro de uma circunferência, em que está inscrito um triângulo eqüilátero de apótema 5 cm, é:

a) 12 cm b) 28 cm c) 14 cm d) 20 cm e) nda

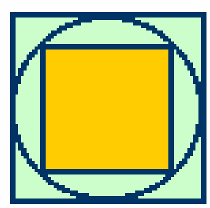
16) O apótema de um hexágono regular mede $\sqrt{3}$ dam. O seu perímetro mede:

a) 120dm b) 1200dm c) 150dm
d) 1500dm e) nda

17) Num círculo estão inscritos um quadrado e um triângulo eqüilátero. Se a diagonal do quadrado mede 6 cm, a altura do triângulo eqüilátero mede, em cm:

a) 4,0 b) 4,5 c) 5,0 d) 5,5 e) 7,0

18) Se na figura abaixo, o semi-perímetro do maior quadrado mede 2***x***, o lado do menor quadrado mede:



a)0,5$x\sqrt{2}$
b) $x\sqrt{2}$
c) 0,8$x\sqrt{3}$
d) $x\sqrt{3}$
e) x

19) A altura de um triângulo eqüilátero é $\dfrac{15}{\pi}$ cm. Determine, em cm, o comprimento da circunferência nele inscrita.

a) 2π b) 10 c) $1,5\pi$ d) π e) nda

20) Se aumentarmos de 346 cm o lado de um triângulo eqüilátero, ele deixa de ser inscrito para ser circunscrito a uma circunferência. Se $\sqrt{3}=1,73$, o diâmetro da circunferência é:

a) 220 cm b) 230 cm c) 280 cm
d) 300 cm e) 400 cm

21) Inscrito a uma circunferência de mármore, um aluno pretendeu fazer um hexágono regular de um arame que custa R$ 0,60 o metro. No final das contas, ele teve de gastar R$ 5,52 a mais, pois foi obrigado a fazer um hexágono regular circunscrito à circunferência. Considerando $\sqrt{3} = 1,73$, na construção do menor hexágono o aluno gastaria:

a) 34,00 b) 36,00 c) 38,50
d) 41,00 e) nda

Triângulos

É um polígono de três lados e, portanto, de três ângulos internos e três vértices.
O triângulo não possui diagonais e a soma dos seus ângulos internos vale 180°.

Condição de Existência de um Triângulo

Em qualquer triângulo, qualquer lado é sempre menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença entre eles.

Classificação dos Triângulos

Quanto aos Lados

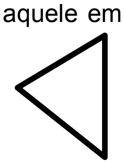
1) Triângulo Eqüilátero: É aquele que possui os três lados iguais.

2) Triângulo isósceles: É aquele que possui dois lados iguais e um diferente.

3) Triângulo Escaleno: É aquele que possui todos os lados diferentes.

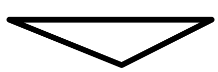
Quanto aos Ângulos

1) Triângulo Acutângulo: É aquele em que todos os ângulos são agudos.



2) Triângulo Retângulo: É aquele que possui um ângulo reto.

3) Triângulo Obtusângulo: É aquele que possui um ângulo obtuso.



Síntese de CLAIRAULT

Em um triângulo qualquer, se pegarmos o maior lado, vamos considerar t como sendo o maior, e x e y como outros dois lados do referido triângulo, se:

Se $t^2 = x^2 + y^2 \rightarrow$ O triângulo é RETÂNGULO

Se $t^2 < x^2 + y^2 \rightarrow$ O triângulo é ACUTÂNGULO

Se $t^2 > x^2 + y^2 \rightarrow$ O triângulo é OBTUSÂNGULO

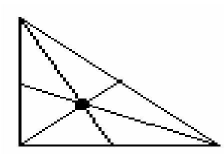
CEVIANAS de um Triângulo

São segmentos com uma extremidade em um vértice e a outra no lado oposto.
A altura, a mediana e a bissetriz interna do triângulo são **cevianas**.
O nome ceviana é homenagem a **Tommaso Ceva**, matemático italiano (1648-1736).

As principais cevianas são:

1) **Mediana:** Segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

O ponto de encontro das medianas é denominado **baricentro.**

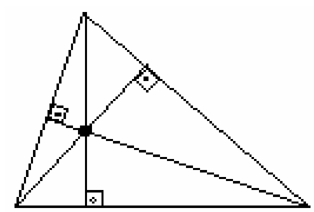


Propriedade: O BARICENTRO

Divide a mediana em duas partes tal que à parte que contém o vértice é o dobro da que contém o lado e é chamado o **centro de gravidade (G)** de um triângulo.

2) **Altura:** Segmento que une um vértice Perpendicularmente ao lado oposto.

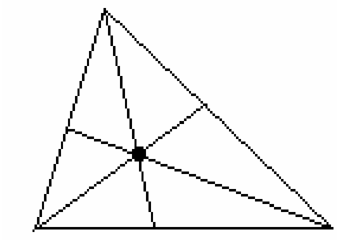
O ponto de encontro das alturas é denominado ***ortocentro.***



Propriedade: O ORTOCENTRO
No triângulo retângulo é no vértice do ângulo reto

3) **<u>Bissetriz</u>:** Segmento que une um vértice ao lado oposto, dividindo o ângulo ao meio.

O ponto de encontro das bissetrizes é denominado ***incentro.***



Propriedades: O INCENTRO
Dista igualmente dos três lados do triângulo é o centro da circunferência inscrita.

Importante:
Mediatriz é um ponto notável mais não é Ceviana

MEDIATRIZ
E reta perpendicular que passa pelo ponto médio de cada lado do triangulo.

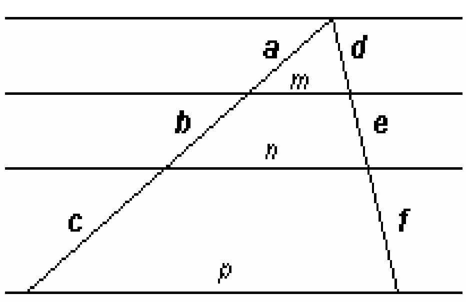
As três mediatrizes determinam um ponto chamado **CIRCUNCENTRO**

Propriedade: O CIRCUNCENTRO
Dista igualmente dos três vértices é o centro da circunferência circunscrita.

Observação:
No triangulo eqüilátero, o baricentro, incentro, circuncentro e o ortocentro, são coincidentes.

Teorema de Tales

Considere um conjunto ou feixe de retas paralelas, como visto abaixo. Valem as seguintes considerações.



1) $\frac{a}{b} = \frac{d}{e} \therefore \therefore \therefore \frac{b}{c} = \frac{e}{f}$

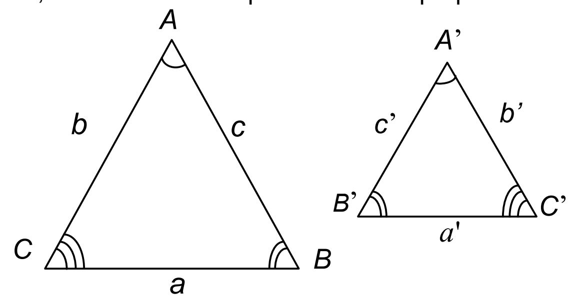
2) $\frac{a}{a+b} = \frac{d}{d+e} \therefore \therefore \therefore \frac{c}{b+c} = \frac{e}{e+f}$

3) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

4) $\frac{m}{a} = \frac{n}{a+b} \therefore \therefore \therefore \frac{m}{d} = \frac{n}{d+e}$

Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos "correspondentes" são congruentes. Dessa forma, seus lados correspondentes são proporcionais.

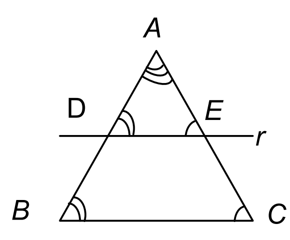


Se $\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$, então $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

Os lados correspondentes (que ocupam o mesmo lugar) estão opostos a ângulos congruentes. Estes por sua vez são proporcionais, por um fator ***K***, denominado constante de proporcionalidade.

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k}$$

<u>Teorema Fundamental</u>: Toda a reta paralela a um dos lados de um triângulo determina um outro triângulo semelhante ao primeiro.

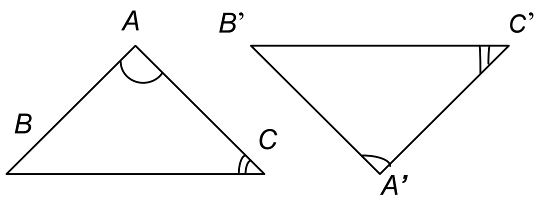


Â = Â
B = D
C = E

Casos de Semelhança de Triângulo

1) **Ângulo a Ângulo (AA)**

Se dois triângulos têm dois ângulos congruentes, eles são semelhantes.

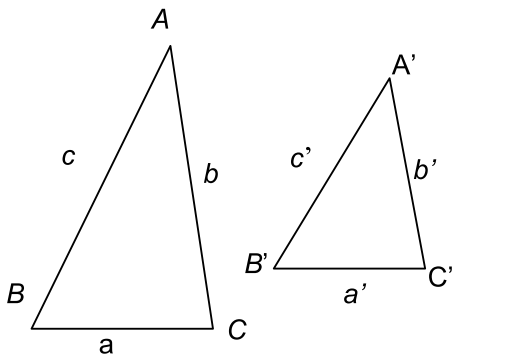


Se $\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$, então $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

2) **Lado a Lado (LLL)**

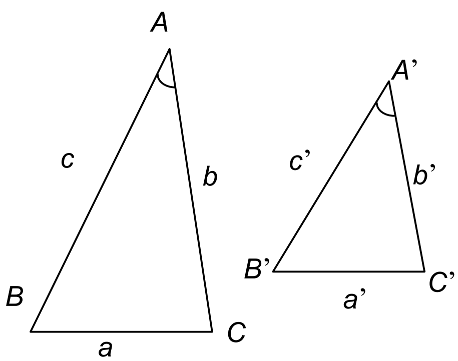
Se os lados de dois triângulos são proporcionais, eles triângulos são semelhantes.

Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, então $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$



3) **Lado - Ângulo – Lado (LAL)**

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e que formam, entre si, ângulos congruentes, eles são semelhantes.



Se $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, e Â = Â' conclui-se que:

$\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

TAREFAS

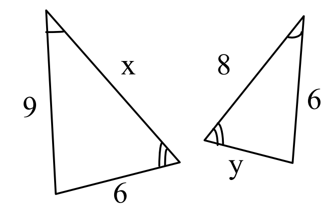
22)

Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
b) O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
c) O incentro é interno ao triângulo.
d) O baricentro é interno ao triângulo.
e) O ortocentro é interno ao triângulo.
f) O circuncentro é interno ao triângulo.
g) O baricentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

23) Os lados de um triângulo são 20, 22 e 20***m***+12. É correto afirmar:
a) m < 10
b) m < 3 ou m > 11
c) -1,2 < m < 13
d) m > 7,5
e) m < 1,5 ou m > - 0,5

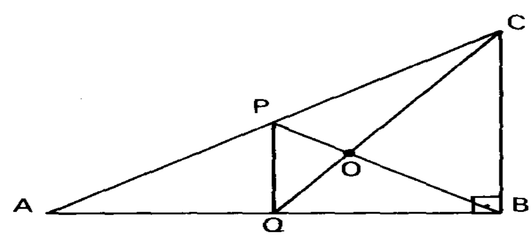
24) Na figura abaixo, o valor de M = ***x*** + ***y*** vale:



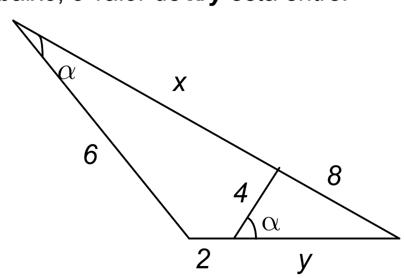
a) 9 b) 12 c) 13 d) 14 e) 16

25)

Na figura, *Q* é o ponto médio de $\overline{AB}$. $\overline{QP}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Sendo $\overline{AC}$ = = *30 cm*, determine $\overline{PO}$.



26) Na figura abaixo, o valor de ***x/y*** está entre:

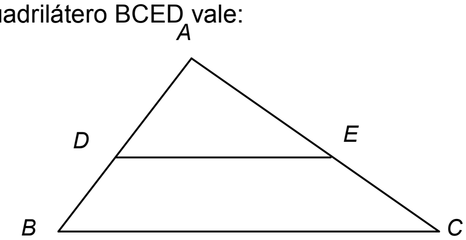


a) 0 e 0,15
b) 0,15 e 0,45
c) 0,45 e 0,60
d) 0,60 e 0,80
e) 0,80 e 1,0

27) A paralela a um lado de um triângulo determina, sobre um segundo lado, segmentos de 7 cm e 12 cm. Determine os segmentos correspon-dentes sobre o terceiro lado, que mede 57 cm.

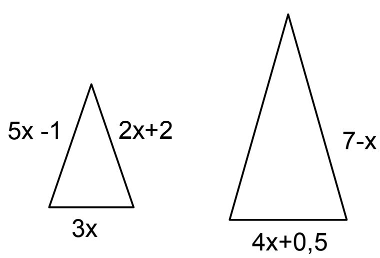
a) 21 e 36 b) 22 e 35 c) 23 e 34
d) 20 e 37 e) 18 e 30

28) Na figura abaixo, se têm os comprimentos:
AD = 20, DB = 5, AC = 30 e BC = 45. Se os segmentos DE e BC são paralelos, o semi-perímetro do quadrilátero BCED vale:



a) 46 b) 41 c) 36 d) 31 e) 51

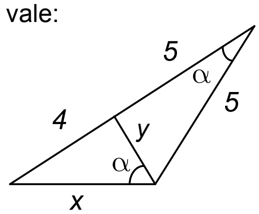
29) Na figura abaixo, o triângulo ***E*** (da esquerda) é semelhante ao triângulo ***D*** (da direita). Pode-se afirmar que o perímetro de ***E*** mede:



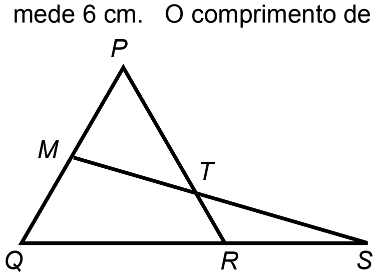
a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 14

30) Na figura abaixo, ***x+3y*** vale:

a) 13
b) 16
c) 20
d) 21
e) 25

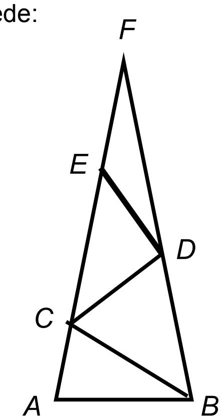


43) O perímetro do triângulo eqüilátero PQR mede 24 cm, M é o ponto médio de PQ e o segmento RS mede 6 cm. O comprimento de PT é:



a) 4,4cm
b) 4,6cm
c) 4,8cm
d) 5,0cm
e) 5,6cm

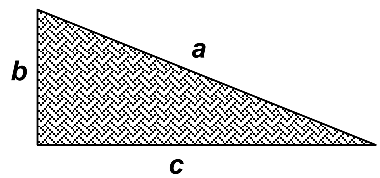
31) O triângulo ABF, da figura, é isósceles com base AB. Se AB=BC=CD=DE=EF, o ângulo interno no vértice de F mede:



a) 10^o
b) 15^o
c) 20^o
d) 25^o
e) 30^o

Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo, possui dois ângulos agudos e um ângulo reto. Um exemplo clássico de um triângulo retângulo, de lados ***a***, ***b*** e ***c***, temos na figura abaixo,



Onde:
a é a hipotenusa (maior lado e olha sempre para o ângulo reto).
b e ***c*** são catetos.

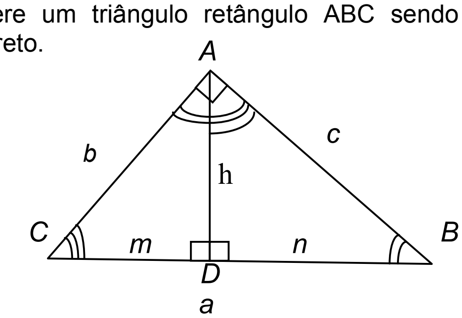
Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

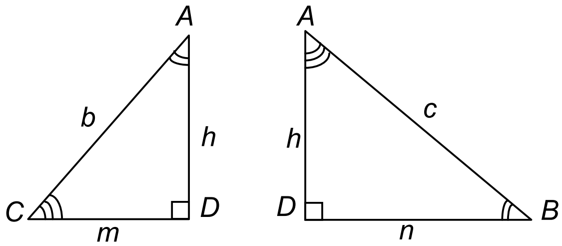
$$a^2 = b^2 + c^2$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere um triângulo retângulo ABC sendo A o ângulo reto.



A altura AD divide a hipotenusa em dois segmentos, "m" e "n", que são, respectivamente, as projeções dos catetos "b" e "c".



Aplicando-se parte a parte, a semelhança de triângulos nesses, vistos acima, temos mais 5 relações de caráter indispensável que, juntamente com o teorema de Pitágoras, constituem a essência da geometria tri-retangular.

$\Delta ABC \approx \Delta ACD$, então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h}$ $\Longrightarrow$ b.c = a.h

$\Delta ABC \approx \Delta ACD$, então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{m}$ $\Longrightarrow$ $b^2 = m.a$

$\Delta ABC \approx \Delta ABD$, então $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{n}$ $\Longrightarrow$ $c^2 = n.a$

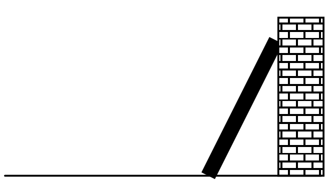
$\Delta ABC \approx \Delta ACD$, então $\dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h}$ $\Longrightarrow$ $h^2 = m.n$

TAREFAS

32) As medidas dos lados de um triângulo retângulo são inteiros consecutivos. A soma das medidas dos catetos vale:

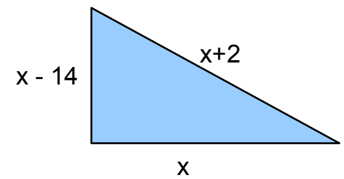
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 11

33) A extremidade superior de uma escada de 25dm está apoiada numa parede vertical, e a sua base está apoiada no piso, a 7dm do pé da referida parede. Se o topo da escada deslizar 4dm sobre a parede, a sua base deslizará:



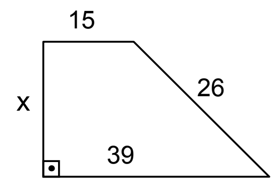
a) 8dm b) 6dm c) 5dm d) 4dm e) 3dm

34) O valor de x na figura abaixo é:



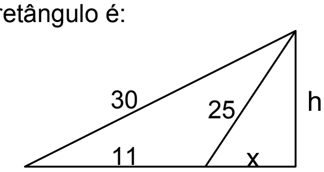
a) 12
b) 27
c) 16
d) 24
e) 18

35) O semi-perímetro do trapézio abaixo mede:



a) 60
b) 40
c) 80
d) 90
e) 45

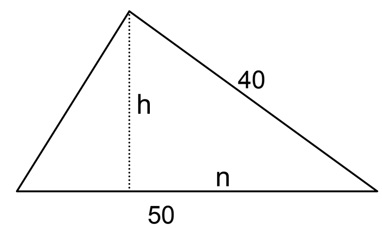
36) Na figura abaixo, o valor de ***M*** =x+h no triângulo retângulo é:



a) 28
b) 30
c) 31
d) 35
e) 36

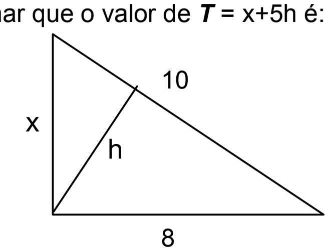
37) De acordo com o desenho abaixo, se o maior triângulo é retângulo, os valores ***n*** e ***h*** são respectivamente:

a) 24 e 32
b) 32 e 24
c) 30 e 36
d) 36 e 30
e) 40 e 40

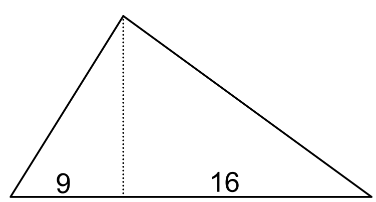


38) Observando-se os três triângulos retângulos da figura, é possível afirmar que o valor de ***T*** = x+5h é:

a) 30
b) 25
c) 24
d) 22
e) 12



39) Determine o perímetro do maior triângulo retângulo, na figura abaixo.

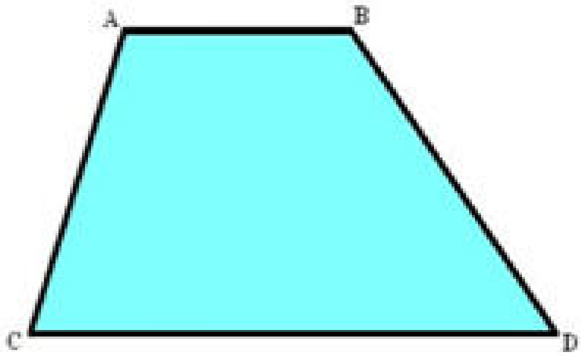


a) 40
b) 45
c) 50
d) 60
e) 70

Quadriláteros

Trapézio

É todo quadrilátero que possui somente um par, de lados opostos paralelos.



$\overline{AB} = \overline{CD}$

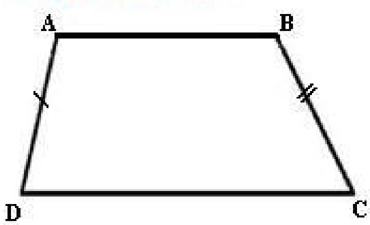
$\begin{cases} \overline{AB} \text{ e } \overline{CD} \text{ são as bases do trapézio} \\ \overline{AC} \text{ e } \overline{BD} \text{ são os lados transversos} \end{cases}$

Teorema

A soma das medidas dos quatro ângulos internos de um quadrilátero qualquer é igual a 360º.

Classificação dos Trapézios

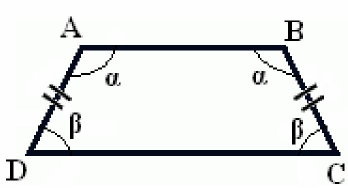
Trapézio escaleno



• Os lados transversos têm medidas dferentes.

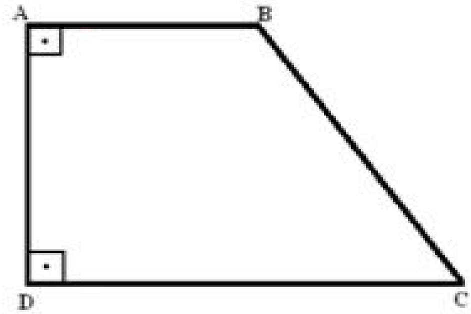
$\overline{AD} \neq \overline{BC}$

Trapézio isósceles



• Os lados transversos têm medidas iguais.
AD = BC

Trapézio retângulo

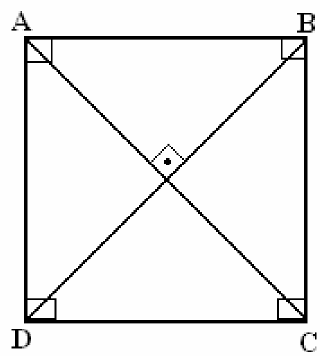


• Um dos lados transversos é perpendicular às bases.

Quadriláteros Notáveis

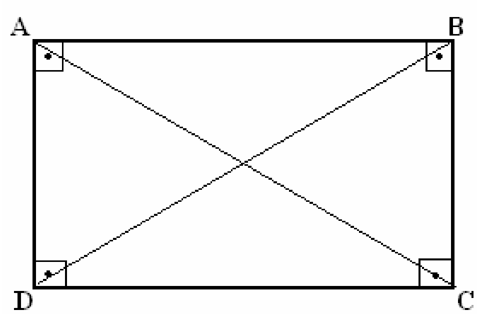
Paralelogramo é um trapézio que tem todos os pares de lados paralelos iguais

Quadrado



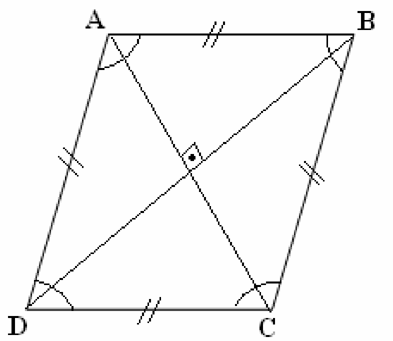
•É todo paralelogramo que é retângulo e losango simultaneamente, ou seja, seus ângulos são retos e seus lados são congruentes.

Retângulo



•É todo pralelogramo que possui seus quatro ânglos retos

Losango



• É todo paralelogramo que possui quatro lados congruentes.

TAREFAS

40)

Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

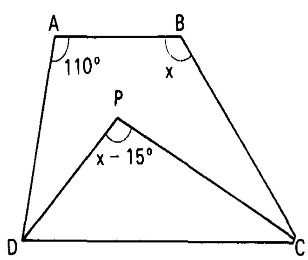
a) Todo retângulo é um paralelogramo.
b) Todo paralelogramo é retângulo.
c) Todo quadrado é retângulo.
d) Todo retângulo é quadrado.
e) Todo paralelogramo é losango.
f) Todo quadrado é losango.

41)

A soma dos ângulos consecutivos de um trapézio é igual a $78°$ e sua diferença é $4°$. Determine o maior ângulo do trapézio.

42)

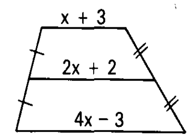
$ABCD$ é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Se $\overline{DP}$ e $\overline{CP}$ são bissetrizes, determine x e $B\hat{C}D$.



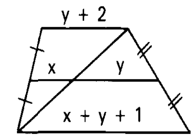
43)

Considerando que os segmentos com "marcas iguais" são congruentes, determine os valores das incógnitas nos casos:

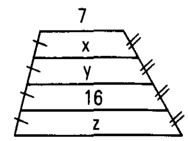
a) trapézio



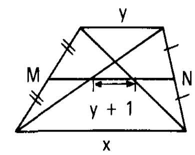
b) trapézio



c) trapézio



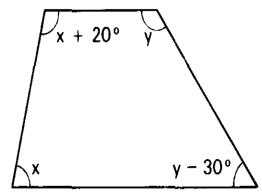
d) trapézio (MN = x − 2y + 5)



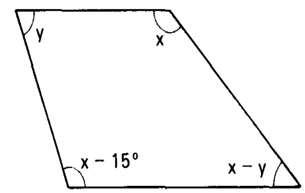
44)

Se $ABCD$ é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine x e y.

a)

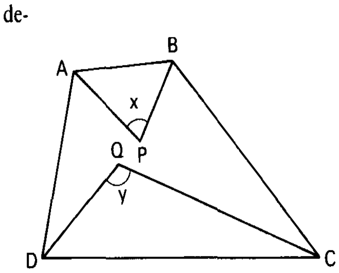


b)



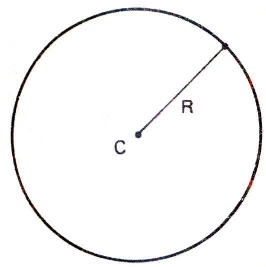
45)

Se $\overline{BP}$, $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$ e $\overline{DQ}$ são bissetrizes, determine $x + y$.



Circunferência e Círculo

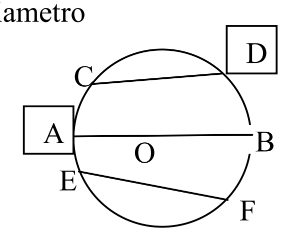
1) Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que estão situados a uma mesma distância de um ponto fixo chamado centro(c), e que a distância comum chama-se raio(R):



2) Qualquer segmento de reta que una dois pontos de uma circunstância é chamado corda, e que a corda que e passa pelo centro recebe o nome de diâmetro:

$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF} \rightarrow$ cordas

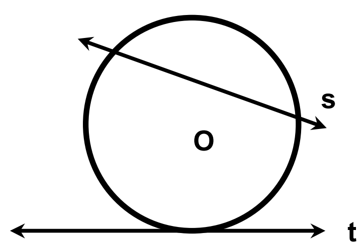
$\overline{AB} \rightarrow$ diametro



3) Uma reta, em relação a uma circunferência, pode ser:

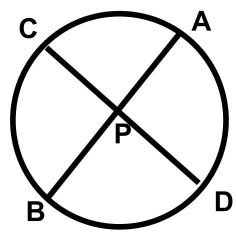
- ***Secante**: Quando intercepta a circunferência em dois pontos. (reta **s**, na figura abaixo)*

- ***Tangente**: Quando intercepta a circunferência em apenas um ponto, este ponto é chamado ponto de tangencia e é perpendicular ao raio. (reta **t**, na figura abaixo).*



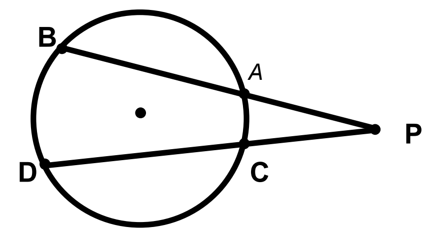
Relação entre duas cordas

Quando duas cordas se cruzam no interior de um círculo, o produto das medidas dos dois segmentos determinados sobre essas cordas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados sobre a outra.



Relação métrica das secantes

Quando duas secantes se cortam extremamente a um círculo, o produto da medida da secante inteira pela medida de sua parte externa é igual ao produto da medida da outra secante pela medida de sua parte externa.

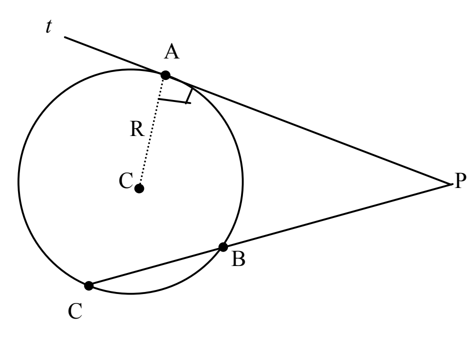


$$PA.PB = PC.PD$$

Relação métrica entre secante e tangente

Quando, de um ponto exterior, traçamos uma tangente e uma secante a um círculo, a medida da tangente é média proporcional entre a medida da secante inteira e a medida da sua parte externa.

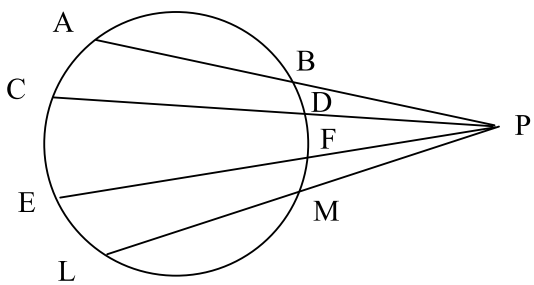
Em que: a reta t é perpendicular ao raio (t $\perp$ R)



$$PA^2 = PB.PC$$

Potencia de um ponto em relação a uma circunferência

Na circunferência da figura abaixo, $\overline{PA}, \overline{PC}, \overline{PE}, \overline{PL}$ são segmentos secantes que partem todos do mesmo ponto **P**.



Aplicando a segunda relação a esses segmentos, podemos escrever:

$\overline{PA}\ \overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD} = \overline{PE}.\ \overline{PF} = \overline{PL}.\ \overline{PM}$ **=cte**

Isto significa que o produto da medida do segmento secante pela medida da sua parte externa é sempre constante. Esse produto recebe o nome de potência do ponto **P** em relação à circunferência e costuma ser indicado por:

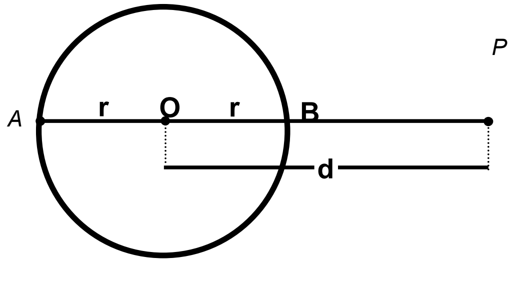
Pot(P) = PA. PB

Como a potência de um ponto não depende da direção da secante, vamos considerar um segmento secante à circunferência passando pelo centro **O**, conforme a figura ao abaixo. Sendo **d** a distância de **P** ao centro **O** e **r** o raio da circunferência, temos:

PB = d – r e PA = d + r

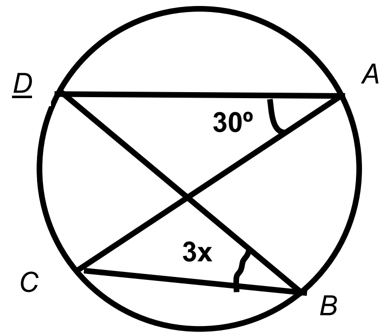
Então:
Pot(P) = PA. PB
Pot(P) = (d + r).(d – r)

$$Pot(P) = d^2 - r^2$$



TAREFAS

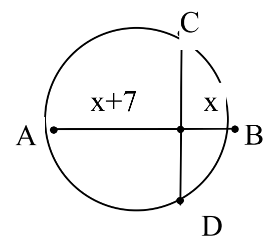
46) Na figura ao lado, calcule o valor de x.



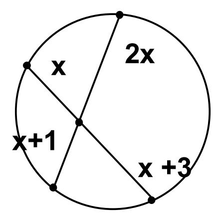
47) Determine valor de x:

a) Se $AB \cap CD = P$ e CP = 6; PD = 3

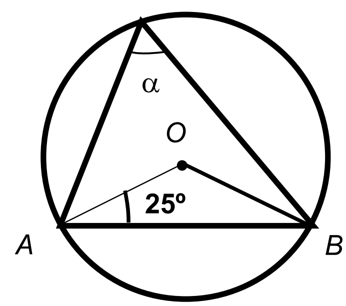
a)



b)

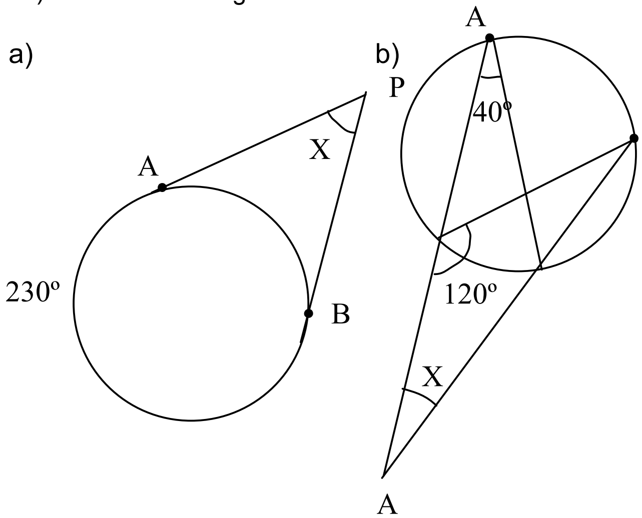


48) Na figura, calcule o valor de x.

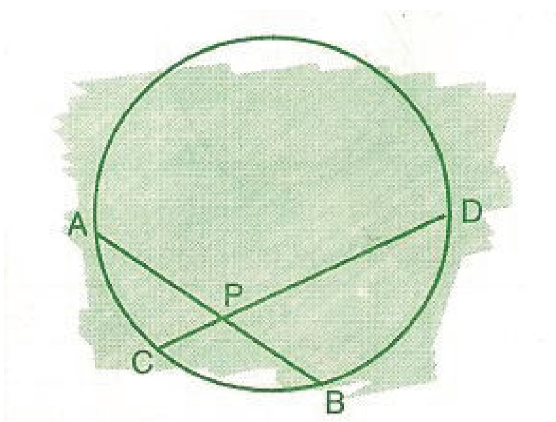


49) Calcule X nas figuras:

a) b)



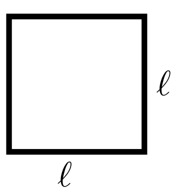
50) As cordas AB e CD de uma circunferência se interceptam em P. Se AP = x + 3, BP = 7 – x, CP = x – 1, DP = 3x – 11 determine o valor de x.



Áreas de Figuras Planas

ÁREA do QUADRADO

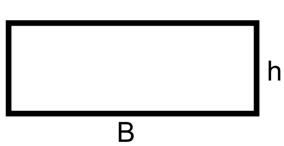
Chamando de ℓ cada lado do quadrado, temos:



$A_Q = \ell^2$

ÁREA do RETÂNGULO

A área do retângulo é igual ao produto da base pela altura.



$A_R = B.h$

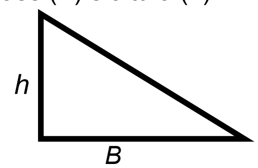
ÀREA do TRIÂNGULO

São muitos os casos de triângulos.

Dessa forma vamos analisar um a um.

1) *Dois lados ortogonais ou Triangulo retângulo*

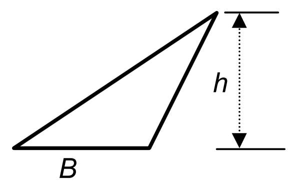
Os lados perpendiculares podem ser tomados como base (B) e altura (h).



$A_{TRI} = \frac{B.h}{2}$

2) *Uma projeção ortogonal a um lado*

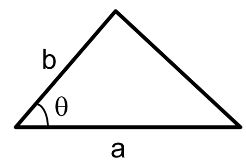
Tomando-se um lado como base, a projeção a ele perpendicular é a altura.



$A_{TRI} = \frac{B.h}{2}$

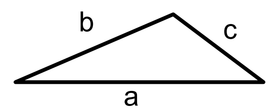
3) *Um ângulo e dois lados conhecidos*

Tendo-se dois lados conhecidos, como também o ângulo por eles formado, calcula-se a área como:



$A_{TRI} = \frac{ab \cdot \text{sen}\,\theta}{2}$

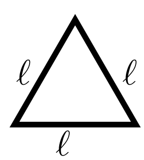
4) Três lados conhecidos - **Teorema de Heron**



Sendo ***p***, a medida do semi-perímetro, temos:

$$S = \sqrt{a(p-a)(p-b)(p-c)}$$

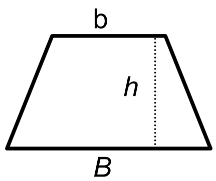
5) Triângulo Eqüilátero



$$S = \frac{l^2.\sqrt{3}}{4}$$

ÁREA do TRAPÉZIO

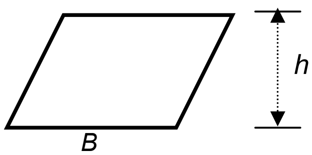
Como em todo trapézio se tem B (base maior), b (base menor) e h (altura), a sua área é dada por:



$$A_{TRA} = \frac{(B+b).h}{2}$$

ÁREA do PARALELOGRAMO

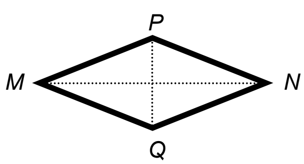
No paralelogramo, podemos tomar um lado como base e a projeção ortogonal do lado consecutivo como altura.



$$A_P = B.h$$

ÁREA do LOSANGO

A área do losango é dada pela expressão:

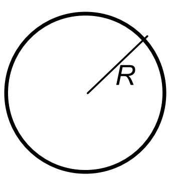


$$A_L = \frac{D.d}{2}$$

onde D = MN e d = PQ

ÁREA do CÍRCULO

A área do círculo é dada pela expressão:

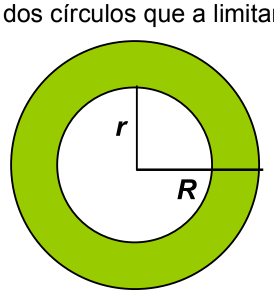


$$A_C = \pi R^2$$

onde $\pi \cong 3{,}14$ e R é o raio do círculo.

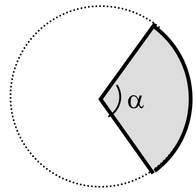
ÁREA da COROA CIRCULAR

A área da coroa circular é a diferença entre as áreas dos círculos que a limitam.



$$A_{CC} = \pi\,(R^2 - r^2)$$

ÁREA do SETOR CIRCULAR

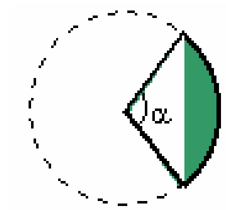


$$S_{Setor} = \frac{\pi.R^2.\alpha}{360^\circ}$$

α = Graus
π = 3,1415...

ÁREA do SEGMENTO CIRCULAR

A área do segmento circular é exatamente a diferença entre a área do setor e a do triângulo isósceles, estabelecido pelo ângulo central.



$$S_{segmento} = S_{setor} - S_{triangulo}$$

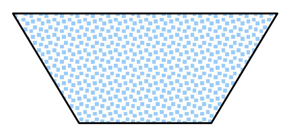
TAREFAS

51) Se 20% da diagonal de um quadrado mede 1,6 cm, a sua área em cm^2 é:
a) 32 b) 23 c) 45 d) 54 e) 60

52) A área de um triângulo escaleno cujos lados são 17 cm, 15 cm e 8 cm vale, em cm^2:
a) 60 b) 61 c) 62 d) 65 e) 68

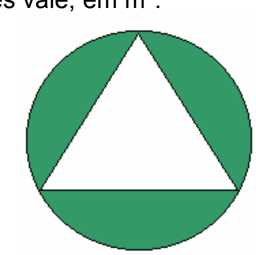
53) O perímetro do trapézio isósceles da figura é 44dm. Se as suas bases medem 20dm e 14dm, a sua área vale em dm^2:

a) 48
b) 54
c) 58
d) 64
e) 68



54) O círculo da figura abaixo tem raio R = 2m e nele se inscreve um triângulo eqüilátero. O valor da área hachurada entre eles vale, em m^2:

a) $\pi - 2\sqrt{3}$
b) $4\pi - 3\sqrt{3}$
c) $5 - 2\pi$
d) $2 - \pi\sqrt{2}$
e) $\sqrt{3 - \pi}$

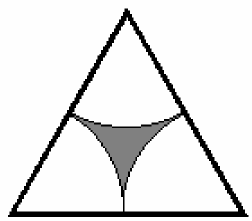


55) Um triângulo isósceles de base 6 cm e perímetro 16 cm têm como área, em cm^2:
a) 19 b) 1 c) 16 d) 13 e) 12

56) Se todos os lados de um heptágono forem aumentados de 50%, o aumento da sua área será de:

a) 50% b) 75% c) 100 d) 125% e) 150%

57) Na figura abaixo temos um triângulo eqüilátero de perímetro 6 cm, e cujos vértices são centros de arcos de circunferências. A área da região sombreada vale, em cm^2 :



a) $\sqrt{3}-\frac{3\pi}{4}$

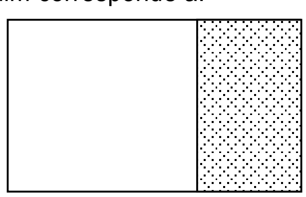
b) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

c) $2\left(\sqrt{3}-\pi\right)$

d) $2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$

e) $8\sqrt{3}-3\pi$

58) A figura abaixo mostra um terreno retangular cuja largura vale 0.6 do comprimento. Uma porção, também retangular, é usada para a construção de um jardim, cuja largura também representa 0,5 do comprimento. Em relação ao terreno, a área do jardim corresponde a:

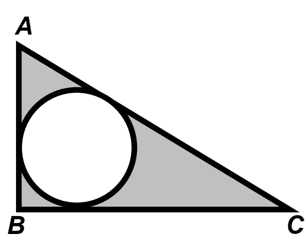


a) 0,6%
b) 12%
c) 25%
d) 36%
e) 45%

59) Os pontos A, B e C são vértices consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12. A área do triângulo ABC é:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{11}$ e) $2\sqrt{3}$

60) O triângulo da figura abaixo tem lados AB=3 cm, BC=4 cm e CA=5 cm. A razão entre a sua área e a do círculo inscrito é:



a) $\frac{12}{\pi}$

b) $\frac{6}{\pi}$

c) $18/\pi$

d) $4/\pi$

e) $1/\pi$

61) Determine, em m^2, a área máxima de um retângulo de 12m de perímetro.

a) 6 b) 12 c) 9 d) 15 e) 21

62) Os triângulos da figura abaixo são retângulos isósceles. A razão entre as suas áreas vale:

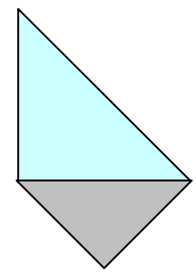
a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{3}{2}$



63) A base de um retângulo de área S é aumentada de 20% e a sua altura é diminuída de 20%. A área do novo retângulo formado é:

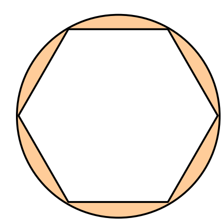
a) 1,04**S** b) 1,02**S** c) **S** d) 0,98**S** e) 0,96**S**

64) Qual a área da coroa limitada pelos círculos circunscrito e inscrito num triângulo regular de perímetro 6dm?

a) π dm^2 b) 2π dm^2 c) 3π dm^2

d) $\pi/2$ dm^2 e) $3\pi/5$ dm^2

65) A figura abaixo representa um hexágono regular inscrito num círculo de raio $\sqrt{2}$. Assinale a área da região hachurada.



a) $8\pi - 7\sqrt{2}$
b) $2\pi - 3\sqrt{3}$
c) $6\pi - 5\sqrt{3}$
d) $5\pi - 4\sqrt{2}$
e) $10\pi - 9$

66) Na figura abaixo o triângulo ABC é eqüilátero, cada um dos seus lados medindo 8 cm. Se $\overline{AD}$ é uma altura do triângulo ABC e M é o ponto médio de $\overline{AD}$, então a área do triângulo AMC, em centímetros quadrados e o segmento $\overline{CM}$, em centímetros, são:

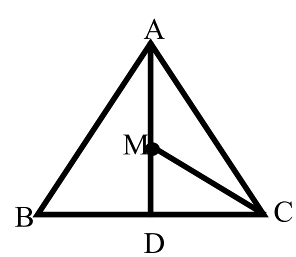
a) $8\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$

b) $4\sqrt{3}$ e $2\sqrt{7}$

c) $4\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

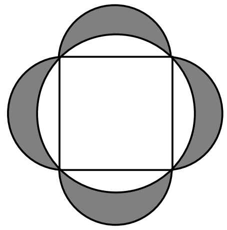
d) $16\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $8\sqrt{3}$ e $2\sqrt{7}$



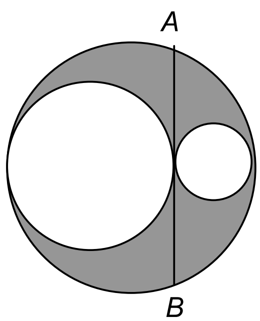
67) Num círculo, inscreve-se um quadrado de lado 7 cm. Sobre cada lado do quadrado, considera-se a semi-circunferência exterior ao quadrado com centro no ponto médio do lado. A área da região hachurada mede:

a) 32
b) 35
c) 36
d) 39
e) 49



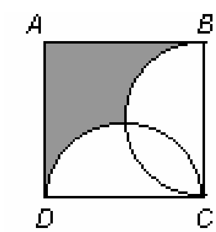
68) Na figura abaixo, **r** é o raio do círculo maior e t é o comprimento da tangente *AB*, comum aos dois círculos menores. Pode-se afirmar que a área hachurada corresponde a:

a) $\dfrac{\pi r^2}{8}$
b) $\dfrac{\pi rt}{8}$
c) $\dfrac{\pi t^2}{8}$
d) $\dfrac{\pi\left(t-r\right)^2}{8}$
e) 1



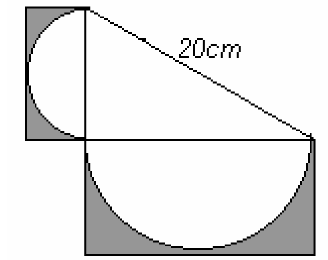
69) Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado de lado 4 cm e as semi-circunferências têm centro nos pontos médios dos lados **BC** e **CD**. Sendo ***M*** a área, em cm^2, da região hachurada, o inteiro mais próximo de ***M*** é:

a) 6
b) 7
c) 9
d) 10
e) 13



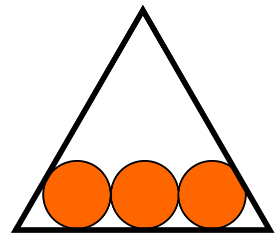
70) Se, na figura abaixo, a hipotenusa do triângulo retângulo mede 20 cm, o valor da região hachurada é, em cm^2:

a) 28
b) 31
c) 34
d) 39
e) 43



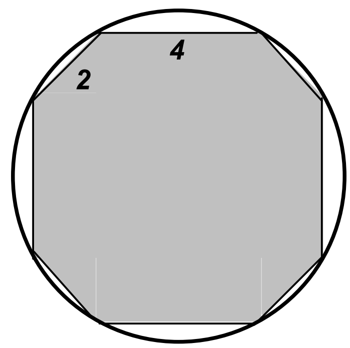
71) Os círculos da figura são idênticos, e a soma das suas áreas vale 3π. A área do triângulo eqüilátero mede:

a) $12+7\sqrt{3}$
b) $7+4\sqrt{3}$
c) $19\sqrt{3}$
d) $11\sqrt{3}$
e) $16\sqrt{3}$



72) Um octógono inscrito em uma circunferência possui lados medindo alternadamente 2 e 4. O inteiro mais próximo da medida de sua área é:

a) 39
b) 43
c) 48
d) 50
e) 52



``Obrigado a DEUS por tudo nas nossas vidas``

Professor Geraldo Pacheco