LOGARITMO

❖ Pelo Professor Geraldo Pacheco

Os logaritmos foram inventados por um rico proprietário rural escocês chamado:

Barão de Murchiston ou JOHN NAPIER ou JOHN NEPER (1550 – 1617),

Como barão ele administrava suas propriedades e escrevia sobre vários assuntos, trabalhou 20 anos nos logaritmos.

A palavra logaritmo, usada por Napier pela primeira vez, é uma composição de duas palavras gregas **"Logos"** e **"Arithmos"** que significam respectivamente **"Razão"** e **"Número''.**

A definição de logaritmos de Napier não usava bases e era físico-geométrica.

Seus trabalhos com os logaritmos sempre visaram as simplificações dos cálculos, em particular os produtos e quocientes.

Em 1614, Napier publica o livro **MIRIFICI LOGARITHMONORUM CANONIS DESCRIPTIO** (uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).

O matemático inglês **HENRY BRIGGS (1561- 1631)** ao tomar conhecimento dos trabalhos de Napier, foi a sua casa na escócia para discutir possíveis modificações no método dos logaritmos, propondo o uso de **potencias de base 10**, já cogitada por Napier, de comum acordo, estabeleceram que **log1 = 0 e log10 = 1.**

Após a morte de Napier, coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos decimais, publicando-a em 1619.

Foram desenvolvidas ao mesmo tempo idéias muito semelhante à Napier, na suíça por **JOBST BURG (1552 – 1632)**.

A invenção dos logaritmos teve um tremendo impacto na estrutura da Matemática e na época, solucionou os problemas da navegação e astronomia.

Com o advento das calculadoras eletrônicas, as tabuas de logaritmos caíram em desuso, mas os logaritmos continuam sendo muito importantes em diversas áreas do conhecimento humano.

Definição:

Têm-se $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$

Nomenclatura:

a é a base com **a > 0 e a ≠ 1**
b é o logaritmando com **b > 0**
x é o logaritmo com **x** $\in$ **R**

Conseqüências:

Da definição de logaritmos são imediatas as seguintes conseqüências para **1 ≠ a > 0, b > 0 e m ∈ R:**

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^m = m$
4. $a^{\log_a b} = b$
5. **Se temos b = c** $\Leftrightarrow \log_a b = \log_a c$
6. $\text{antilog}_a x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$

Propriedades

Condições de existência

$1 \neq base > 0$ **e** $Logaritmando > 0$

1ª Propriedade: $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

2ª Propriedade: $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

3ª Propriedade: $\log_a b^{\alpha} = \alpha . \log_a b$

Conseqüência: $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} . \log_a b$

Cologaritmo $\Rightarrow \log_a \left(\frac{1}{b}\right) = \log_a b^{-1} = -\log_a b = \text{co}\log_a b$

4ª Propriedade: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Conseqüência: $\log_a b . \log_b a = 1$

Sistemas de logaritmos

Sistemas de logaritmos Neperianos ou Naturais

É o sistema de logaritmos de base **e**, onde **e** é o número irracional, conhecido como o
número de **Euller e = 2,71828...**

Para $x > 0 \rightarrow \log_e x$ = lnx.

O nome **neperiano** é atribuído ao matemático **John Neper.**

Sistemas de logaritmos Decimais ou Vulgares

É o sistema de logaritmos cuja **base é 10**

Para x > 0 $\rightarrow \log_{10} x = \log x$

Henry Briggs mostrou a vantagem de se utilizar os logaritmos na base 10.

Forma Mista ou Forma Preparada

Na calculadora encontramos o log 0,0258 = — 1,5884

(com aproximação de quatro casas decimais),
isto é:

log 0,0258 = − 1,5884 = − 1 + (− 0,5884)

Somando (− 1) na parte inteira e 1 na parte decimal, para escrever este logaritmo de uma forma que mostre a característica e a mantissa, temos:

log 0,0258 = −1 + **(−1)** + $[1 + (-0{,}5884)]$ = — 2 + 0,4116 = $\bar{\mathbf{2}}$**, 4116**

Então escrevemos: log 0,0258 = $\bar{2}$, 4116, onde a barra sobre o número 2 indica que apenas a parte inteira(a característica) é negativa

(onde indica-se −2 por $\bar{2}$)

Esta forma de representar o logaritmo de um número é chamado:
FORMA MISTA ou **FORMA PREPARADA** ou de **LOGARITMO PREPARADO**, em que aparecem claramente a característica

(onde indica-se −2 por $\bar{2}$) e a mantissa (0,4116).

Importante

Dizemos que um capital está colocado a juros compostos se no final de cada período financeiro o juro adquirido é incorporado ao capital, rendendo juros novamente. Determine a expressão que indica o montante(M) produzido num capital inicial C num período financeiro (n) com uma taxa (i).

Solução:

Temos:

Capital inicial = C, Montante = M, Taxa = i e Período ou Tempo = n

Então:

1º período: **Capital = C e Juros = C.i**

Montante =M = C + C.i = $\boxed{C(1+i)}$

2º período: **Capital = C(1+i) e Juros = C(1+i). i**

Montante = M = C(1+i) + C(1+i).i = C(1+i).(1 + i) = $\boxed{C(1+i)^2}$

3º período: **Capital = $C(1+i)^2$ e Juros = $C(1+i)^2.i$**

Montante = M = $C(1+i)^2 + C(1+i)^2.i = C(1+i)^2.(1 + i) =$ $\boxed{C(1+i)^3}$

Daí teremos:

Para o período n, vem

$$\boxed{M = C(1+i)^n}$$

Tarefa para o aluno tentar resolver

EXPONENCIAIS

❖ **Pelo Professor Geraldo Pacheco**

1) Resolva as equações Exponenciais:

a) $\dfrac{3^{5x-7}}{9^{x+2}} = \sqrt[3]{3}$

b) $2^{x^2+16} = \left(32^x\right)^2$

c) $2^x.3^x = 36$

d) $2^{2^x} = 256$

e) $\sqrt{3^x.\sqrt{3^{2x}}} = \dfrac{1}{27}$

f) $7^{2x-3} = 8^{2x-3}$

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x-2}{x-3}} = \sqrt{5^{3x-6}}$

h) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^x-1}} = -1$

i) $\sqrt{2^{x^2-x}} = \sqrt{4^x}$

j) $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-3} = 199$

k) $5^{x-2} + 5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = \dfrac{156}{25}$

l) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = \dfrac{13}{10}.\left(5^x + 5^{x-1}\right)$

m) $\dfrac{36}{5}.\left[\left(\sqrt{2}\right)^x + \left(\sqrt{2}\right)^{x-2} - \left(\sqrt{2}\right)^{x-4}\right] = \left(\sqrt{3}\right)^x + \left(\sqrt{3}\right)^{x+2}$

n) $3^{2x} - 12.3^x = -27$

o) $2^x + 2^{x-1} + 2^{2x} = 2.\left(3 + 2^{x+1}\right)$

p) $3^{4\sqrt{x}} - 4.3^{\sqrt{4x}} + 3 = 0$

q) $2^{x+1} - \dfrac{7}{2^{x-1}} + 2^{x-2} = \dfrac{1}{2^{x-2}}$

r) $4^{x^2+2} - 3.2^{x^2+3} = 160$

s) $\dfrac{3^x}{3^x-1} - \dfrac{1}{3^x-5} - \dfrac{7}{8} = 0$

t) $\dfrac{2^m - 2^{-m}}{2^m + 2^{-m}} = \dfrac{7}{9}$

u) $4^x + 6^x = 2.9^x$

v) $\begin{cases} 9^{2x-1} = 81^y \\ 3^{x+1} = 27^y \end{cases}$

w) $\begin{cases} 2^x.3^y = 108 \\ 4^x.2^y = 128 \end{cases}$

x) $\begin{cases} 9^x.27^y = \dfrac{1}{3} \\ 4^x.64^y = 4 \end{cases}$

y) O crescimento de uma determinada população após t a partir de um instante t=0 é dado por: $P(t) = P(0).3^{0,25t}$, onde P(t) indica a população no instante t. Após quanto tempo a população triplicará?

z) Um automóvel vale atualmente R$ 10.000,00 e desvaloriza 10% ao ano. A expressão v(t) que dá o valor do automóvel após t anos é dada por:

$$V(t) = 10.000.\left(1 - \frac{10}{100}\right)^t \Rightarrow V(t) = 10.000.(0,9)^t$$

Pede-se:

I) Qual o valor do automóvel para t = 4 anos?

II) Após quanto tempo o automóvel valerá R$ 8.100,00?

III) Após 3 anos quanto o carro desvalorizou?

LOGARITMO

❖ **Pelo Professor Geraldo Pacheco**

1) Determine os Valores de x para que existam os logaritmos:

a) $\log(2x + 6)$ b) $\log_{3x-2} 5$ c) $\log_{(x-1)}(x^2 - x - 6)$

d) $\log_{(x+3)}(\frac{x-1}{2+x})$ e) $\log_{(2-x)}(-x^2 + 3x + 4)$ f) $\log_{(3x-9)}(4^x - 1)$

2) Determine x nos seguintes casos:

a) $\log_{\sqrt{2}}(-x^2 + 3x + 5) = 0$ b) $\log_x 16 = 2$ c) $\log_5(\frac{x-1}{3}) = \log_5(\frac{3x-3}{x-7})$

3) Sendo **a**, **b**, **c** e **d** números reais positivos, escreva na base 10 o desenvolvimento logarítmico das seguintes expressões:

a) $x = \sqrt{a}.b^2.c$ b) $x = \dfrac{a\sqrt{b}}{c^3}$ c) $x = \dfrac{a.\sqrt{b.c}}{d}$

d) $y = \dfrac{a^3\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}.d}$ e) $y = \sqrt{\dfrac{a.\sqrt{b}}{c.d}}$ e) $y = \dfrac{\sqrt[3]{a}.b^2}{\sqrt{c}}$

4) Aumentando um número x de 16 unidades, seu logaritmo na base 3 aumenta de duas unidades. Calcule x.

5) Determine dois números positivos cuja soma é 5, tais que a soma de seus logaritmos na base 6 é igual a 1.

6) A diferença dois logaritmos na base 2 de dois números a e b, nesta ordem é 1. Determine esses números sendo o seu produto 8.

7) Resolva as questões que envolvem logaritmo:

a) $\log x = 1 + \log 3$

b) $\log_2(x^2 - 1) = 3$

c) $\log(x+3) = \log 2x + \log 5$

d) $\log_4 \sqrt{x+1} + \log_4 2 = \log_4(2x - 2)$

e) $\log_2(3x+7) - \log_2(x^2 - 1) = 1$

f) $\log^2{}_2 x - \log_2 x^2 - 8 = 0$

g) $\log^2{}_2 x - \log_2 x^2 - 3 = 0$

h) $\log^2{}_2 x - 15.\log_8 x^2 + 16 = 0$

i) $2\log^2{}_{10}(x+1) - \log_{10}(x+1)^2 - 4 = 0$

j) $\log^3{}_3 x - \log_3 x^2 = 0$

k) $\begin{cases} 2\log x + 3\log y = 7 \\ 4\log x - \log y = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = -8 \\ 5\log x - 2\log y = -9 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x^2 - 5y^2 = 5 \end{cases}$

n) $\frac{1}{\log_8 x} + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_4 x} = \log_x 6$

o) Sendo $\log_a b = 1 + 2x$ e $\log_b a = \frac{1}{x^2 - x + 1}$. Calcule x.

p) Dado $\log_2 5 = a$, calcule em função de a $\log \sqrt[3]{40}$

q) Sendo dados: $\log_{15} 3 = a$ e $\log_{15} 2 = b$ obtenha $\log_2 3$ em função de a e b.

r) Sendo $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, determine $\log_9 20$; $\log_{64} 27$; $\log_6 144$ e $\log_{24} 360$.

s) $\log_2 x + \log_8 x = 8$

t) $\log_4(x+2).\log_x 2 = 1$

u) $\log_2 x = \log_{\sqrt{x}} x^2 + \log_x 2$

v) $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{\log_y 2} = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

w) $\begin{cases} \log_4 x + \log_8 y = 3 \\ 16x - y = 0 \end{cases}$

x) $\begin{cases} 2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} y = 4 \\ x\sqrt{y} = 2^6 \end{cases}$

y) $e^{1+2\ln x} = 4e$

z) $e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} = 3$

aa) Se log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47 calcule:

a) log 6

b) log 5

c) log 72

d) log 25

e) $\log_{100} \sqrt{2}$

f) $\log_{\sqrt{10}} 12$

g) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{1,5}$

Tarefas Extra de LOGARITMO

❖ **Pelo Professor Geraldo Pacheco**

1) São dados $\log_{15} 3 = a$ e $\log_{15} 2 = b$. O valor de $\log_{10} 2$ é?

2) Se $k = \log_5(6 + \sqrt{35})$, então $5^k + 5^{-k}$ é igual a?

3) Sejam $a \in R$ e $a > 1$ e $f : R \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$ a função inversa de f é dada por?